Teil VII

Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

16. Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

16.0 Die spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie wurde 1905 von Albert Einstein veröffentlicht. Sie ist heute ein Eckpfeiler der Physik, wie die Newtonsche Mechanik, die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik und die Schrödingergleichung der Quantenmechanik. Ihre Ursprünge liegen in der Elektrodynamik. Die Maxwellgleichungen mit ihrer Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Optik führen geradezu zwingend zur speziellen Relativitätstheorie. Diese beruht auf Pionierleistungen von Lorentz und Poincaré, aber die Verallgemeinerung und die Anwendung des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf alle Phänomene der Physik sind das Verdienst Einsteins. Zur Zeit Einsteins gab es keine experimentellen Beweise für die spezielle Relativitätstheorie; diese ist aber inzwischen vielfältig überprüft, und es gibt keine Anhaltspunkte, dass sie falsch sein könnte.

Sinn der Lorentztransformation

Die Maxwellgleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen. Wellen breiten sich üblicherweise in einem Medium aus (zum Beispiel Wasser bei Wasserwellen, Luft bei Schallwellen usw.). Daher lag es vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie nahe, den sogenannten "Äther" als Medium für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen zu postulieren.

Dabei tritt jedoch folgendes Problem mit der Galileiinvarianz auf: Es ist bekannt, dass die Gesetze der klassischen Mechanik invariant unter Galileitransformationen sind, d.h. man kann ein Koordinatensystem Σ durch ein gleichförmig gegenüber Σ bewegtes System Σ' ersetzen, ohne dass sich die Form z.B. der Bewegungsgleichungen ändert:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \qquad t' = t$$

bei geeigneter Wahl der Ursprünge der Koordinatensysteme. Allerdings zeigt man leicht, dass die Wellengleichung nicht Galileiinvariant ist: Sei

$$\Box u = 0$$

für eine Auslenkung u eines mechanischen Systems oder eine Komponente u von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$. Im transformierten Koordinatensystem Σ' erfüllt daher u die Gleichung

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)u = 0\,.$$

Unter Verwendung der Transformationsgleichungen wird diese Gleichung im System Σ aber zu

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\cdot\nabla\right)u = 0\,.$$

Die Form der Wellengleichung ist also unter Galileitransformationen nicht invariant. Das ist für Wellen, die in einem Medium propagieren, kein Problem, denn durch das Medium gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem, und zwar das System, in dem das Medium ruht (z.B. die Luft für Schall). In diesem System gilt dann die übliche Form der Wellengleichung $\Box u = 0$. Für elektromagnetische Wellen ist das jedoch problematisch: Das hypothetische Medium Äther müsste dann das bevorzugte Bezugssystem festlegen als dasjenige, in dem der Äther ruht. Die Versuche, die Bewegung der Erde oder bewegter Bezugssysteme relativ zum Äther zu messen (insbesondere das Michelson-Morley-Experiment), misslangen. Lorentz und Poincaré zeigten, dass die Maxwellgleichungen und die Wellengleichung unter Lorentztransformationen (siehe unten) invariant sind.
Diese unbefriedigende Ätherhypothese war für Einstein der Anstoß zur Erkenntnis, dass die Forderung der Forminvarianz der Gleichungen der Physik unter Galileitransformationen problematisch war. Er schlug stattdessen vor, dass alle Gesetze der Physik der speziellen Relativitätstheorie genügen müssen, die auf den folgende Postulaten basiert:
1. Relativitätsprinzip: Die Naturgesetze sind unabhängig vom Koordinatensystem. Insbesondere haben alle Naturgesetze die gleiche Form in Koordinatensystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen (in Inertialsystemen).
2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Quelle, d.h. Licht hat dieselbe Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen.

16.1 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Physik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz gegen die Lorentztransformation evident macht. Der erste Schritt führt dabei über die Einführung der *Viererschreibweise*.

Ko- und Kontravariante Tensoren

Seien ct, x, y und z Koordinaten im Minkowski-Raum. Man definiert

$$\begin{aligned} x_\mu &:= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ x^\mu &:= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \end{aligned}$$

als *kovariante* (x_μ) bzw. *kontravariante* (x^μ) Vierervektoren. Allerdings ist nicht jedes 4-Tupel ein Vierervektor; nur wenn sich die Komponenten unter Lorentztransformation wie Koordinatendifferenzen verhalten,

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$$

handelt es sich um einen Vierervektor. Per Konvention steht ein griechischer Index für 0...3, ein lateinischer für 1...3. Die Einstein-Konvention, wie wir sie bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt: summiert wird nur noch über gleichnamige Indizien, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, d.h.

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = s^2, \qquad x^i x_i = \sum_{i=1}^{3} x^i x_i\,.$$

Die Beschaffenheit, d.h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Es gilt

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu\,. \tag{16.1}$$

Metrischer Tensor

Im euklidischen vierdimensionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Im Minkowski-Raum hat man dagegen

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.} \qquad (16.2)$$

Mit dieser Metrik ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kovariante in kontravariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Es gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad \text{und} \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \,,$$

wobei $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Metrik darstellt. Es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ und

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda = \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases}$$

Transformationseigenschaften

Wie transformieren sich nun allgemeine Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht überhaupt einen kovarianten Vektor aus? Man betrachte die ko- bzw. kontravarianten Vierervektoren

$$\begin{aligned} A_\mu &= (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \\ A^\mu &= (A^0, A^1, A^2, A^3)\,. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld A_μ hänge von den Kontinuumskoordinaten ab: $A^\mu = A^\mu(x^\mu)$. Durch eine Lorentztransformation werde nun der Übergang zu neuen Koordinaten x'^μ vermittelt. Die ko- bzw. kontravariante Eigenschaft eines Vektors ist nun durch sein Transformationsverhalten in das neue System festgelegt

$$\begin{aligned} \text{kontravarianter Vektor} \; : \quad A'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{kovarianter Vektor} \; : \quad B'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \,. \end{aligned}$$

Invarianz des Skalarproduktes

Eine zentrale Forderung unseres Formalismus soll die Invarianz des Skalarproduktes $B_\mu A^\mu$ gegen Lorentztransformation sein. Dies ist wegen

$$B'_\mu A'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} B_\nu A^\lambda = \delta^\nu{}_\lambda B_\nu A^\lambda = B_\nu A^\nu$$

erfüllt (die Stellung der Indizes am Kroneckersymbol wird später noch klar). Die Motivation für diese Forderung ist offensichtlich: Minkowski-Abstände sollen unabhängig vom Koordinatensystem sein.

Transformation von Ableitungen

Den nächsten Schritt bildet die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Ableitungen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

also lässt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

> *Die Ableitungen nach ko/kontra-varianten Koordinaten transformieren sich wie kontra/ko-variante Vektoren.*

Für die Formulierung von Ableitungen hat sich in der speziellen Relativitätstheorie eine abkürzende Schreibweise durchgesetzt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right), & \text{mit} \quad \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla\right), & \text{mit} \quad -\nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right). \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir Vektorpfeile nur noch auf Vektoren im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ schreiben; x und x^μ bedeuten einen Vierervektor.

Wellengleichung

Nun ist es möglich, die *Viererdivergenz* zu definieren:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu := \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \tag{16.3}$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators bekommt man eine elegante Schreibweise für den d'Alembert-Operator:

$$\boxed{\Box := \partial_\mu \partial^\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \Delta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta .$$

Damit ist die *Wellengleichung* Lorentz-invariant.

Raum- und zeitartige Abstände

Ereignisse $\vec{x}(t)$ werden durch Vektoren im Minkowski-Raum beschrieben. Zwei Ereignisse

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad y^\mu = (y^0, y^1, y^2, y^3)$$

nennt man *raumartig*, wenn sie sich nicht durch ein Lichtsignal verbinden lassen oder *zeitartig*, wenn sie sich durch ein Lichtsignal verbinden lassen, also

$$\left(x^\mu - y^\mu\right)\left(x_\mu - y_\mu\right) = \begin{cases} < 0: & \text{raumartig} \\ > 0: & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Ausgeschrieben ist der Zusammenhang mit der Laufzeit des Lichtsignals klarer:

$$\begin{array}{rl} \text{raumartig} & c^2(t-t')^2 \equiv (x^0-y^0)^2 < (x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2 + (x^3-y^3)^2 \\ \text{zeitartig} & c^2(t-t')^2 \equiv (x^0-y^0)^2 > (x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2 + (x^3-y^3)^2 \end{array}$$

mit $ct = x^0$ und $ct' = y^0$. Zwei 'gleichzeitige' Ereignisse (im Laborsystem) mit $x^0 = y^0$ sind also raumartig. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes ist die Raum- bzw. die Zeitartigkeit unabhängig vom Bezugssystem (nicht jedoch die 'Gleichzeitigkeit').

Die Vierergeschwindigkeit

Aufgrund der Zeitdilatation ist es nicht so einfach, einen Ausdruck für eine Geschwindigkeit hinzuschreiben - nach welcher Zeit soll die Bahnlinie abgeleitet werden? Von besonderer Bedeutung ist hier der Begriff der *Eigenzeit*. Sie bezeichnet die Zeit τ, die eine Uhr anzeigt, die mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, d.h. mit ihm bewegt wird. Mit τ benennt man die Zeit im Ruhesystem des Beobachters. Es gilt $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$, also

$$d\tau^2 = dt^2(1-\beta^2) = \frac{1}{c^2}\Big[(c\ dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\Big] = \frac{ds^2}{c^2}, \quad (16.4)$$

und damit ist die Eigenzeit *invariant* unter Lorentztransformation, genau wie das Lorentz-invariante Linienelement ds. Man hat also eine Zeit, die zur Definition eines Geschwindigkeitbegriffes geeignet ist. Somit definiert man die *Vierergeschwindigkeit* u^μ als

$$\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}}, \qquad u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \vec{v}),$$

also

$$u^0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u^1 = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v_x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \text{etc.} \tag{16.5}$$

Es ist dann

$$u_\mu u^\mu = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right] = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = c^2\,. \tag{16.6}$$

Die Viererbeschleunigung

Analog zur Vierergeschwindigkeit definiert man die *Viererbeschleunigung*

$$\boxed{b^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}}\,.$$

Zwischen Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung besteht ein besonderer Zusammenhang. Es ist nämlich nach Gl. (16.6)

$$0 = \frac{d}{d\tau}\underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2} = \frac{du_\mu}{d\tau}u^\mu + u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = g_{\mu\nu}\frac{du^\nu}{d\tau}u^\mu + u_\mu b^\mu = 2u_\mu b^\mu\,,$$

also $b \perp u$ bezüglich der Minkowski-Metrik. Ein Teilchen bewege sich nun entlang der x-Richtung. Dann ist

$$\frac{u^0}{u^1} = \frac{c}{v_x} = \frac{c\,dt}{dx}\,,$$

was bedeutet, dass der Vektor der Vierergeschwindigkeit immer *tangential* an der Weltlinie (der Kurve im $\mathbb{R}^4$, die jede Ebene $x^0 =$ konst nur einmal schneidet) liegt und damit *zeitartig* ist. Hingegen ist im Ruhesystem des Teilchens

$$b^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0\,,$$

also ist b^μ ein *raumartiger Vektor.*

16.2 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts

Im letzten Abschnitt wurde der Übergang zu den Koordinaten eines neuen Inertialsystems x'^μ vollzogen. Wie findet man aber die x'^μ, wenn man die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme kennt? Die volle Darstellung der Transformationsmatrix $L^\mu{}_\nu$ als Funktion von sechs Parametern (drei Rotationswinkeln, drei Relativgeschwindigkeiten) ist in Kap. 8 der "Theoretischen Mechanik" dargestellt; hier wiederholen wir nur einige Gesichtspunkte. Die allgemeinste lineare Transformation in ein anderes Koordinatensystem wird durch

$$\boxed{x'^\mu = L^\mu{}_\nu\, x^\nu}$$

vermittelt. Wir suchen die Bedingungen, denen $L^\mu{}_\nu$ genügt. Wegen der Invarianz des Minkowski-Abstandes unter Lorentztransformation ist

$$s^2 = s'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \,,$$

also

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma, \qquad \boxed{g_{\rho\sigma} = (L^T)^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma}\,. \tag{16.7}$$

Hier erkennt man deutlich die Ähnlichkeit zu orthogonalen Transformationen. Weiterhin gilt

$$\underbrace{\det g}_{=-1} = \underbrace{\det L^T}_{=\det L} \det g \det L \qquad \Rightarrow \qquad \det L = \pm 1\,.$$

Man nennt Tranformationen mit

$$\det L = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche Lorentztransformation} \\ -1 & \text{uneigentliche Lorentztransformation}\,. \end{cases}$$

Wir untersuchen im folgenden zwei konkrete Beispiele für $L^\mu{}_\nu$.

Rotationen

Man setzt $L^0_0 = 1$, $L^0_i = L^i_0 = 0$:

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Die Untermatrix R beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen dreidimensionalen Unterraum. Wie gewohnt redet man bei

$$\left\{ \begin{matrix} \det L = \det R = 1 \\ \det L = -1 \end{matrix} \right\} \text{ von } \left\{ \begin{matrix} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{matrix} \right\} \text{ Rotationen.}$$

Boosts

Die speziellen Lorentztransformationen werden auch als Boost bezeichnet. Die durch $L^{\mu}_{\ \nu}$ vermittelte Transformation soll in ein mit der Geschwindigkeit v z.B. in x-Richtung bewegtes Inertialsystem führen. Laut den Gleichungen der Lorentztransformation ist

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \qquad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \qquad x'^2 = x^2, \qquad x'^3 = x^3\,, \tag{16.8}$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

was zu

$$L^{\mu}_{\ \nu} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.9}$$

führt. Was ein solcher Boost bedeutet, macht man sich wie folgt klar: Der Ursprung von Σ' (d.h. der Punkt mit $x'^1 = 0$, $x'^2 = 0$, $x'^3 = 0$) hat im Inertialsystem Σ die Koordinaten

$$x^1 = \beta x^0 \equiv vt\,, \quad x^2 = 0\,, \quad x^3 = 0\,,$$

d.h. die Lorentztransformation bildet auf ein mit Relativgeschwindigkeit v in x^1-Richtung bewegtes Koordinatensystem Σ' ab.
Im Grenzwert $c \to \infty$ gehen die speziellen Lorentztransformationen in Galileitransformationen über; z.B. für Gl. (16.8):

$$t' = t\,, \quad x'^1 = x^1 - vt\,, \quad x'^2 = x^2\,, \quad x'^3 = x^3\,.$$

Für *kovariante* Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'_{\mu} = L_{\mu}^{\ \nu} x_{\nu}, \qquad \text{mit} \qquad L_{\mu}^{\ \nu} = g_{\mu\rho} L^{\rho}_{\ \lambda} g^{\lambda\nu}\,,$$

was zu

$$L_{\mu}^{\ \nu} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{16.10}$$

führt. Drei Rotationen um und drei Boosts entlang der Raumachsen ergeben sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer Lorentztransformation. Man sieht das auch auf eine alternative Weise. Die 16 Transformationsgleichungen

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu} L^{\sigma}{}_{\nu}$$

sind nicht alle unabhängig. Wegen der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ hat man nur zehn unabhängige Gleichungen und damit sechs freie Parameter.

Gruppeneigenschaften

Einige weitere Eigenschaften der Lorentztransformation sind die folgenden:

1.) *Die Lorentztransformationen bilden eine Gruppe*
Bei der Hintereinanderausführung zweier Lorentztransformationen ergibt sich wieder eine Lorentztransformation. Diese Gruppe ist aber *nicht kommutativ,* da es sich ja um Matrix-Multiplikationen handelt. Die nächsten beiden Eigenschaften sind Folgen dieser Gruppen-Eigenschaft.

2.) *Die Identität ist eine Lorentztransformation*
Das ist klar, da sich ein Boost für $\beta = 0$ in die Identität verwandelt.

3.) *Zu jeder Lorentztransformation existiert eine Inverse*
Die Hintereinanderausführung einer Lorentztransformation und ihrer Inversen führt also zur Identität. Man kann die Inverse direkt angeben. Wie oben gezeigt, gilt

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu} L^{\sigma}{}_{\nu} \, .$$

Damit ist

$$\delta^{\lambda}{}_{\nu} = g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \underbrace{g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^{\sigma}{}_{\mu}}_{=: L_{\sigma}{}^{\lambda}} L^{\rho}{}_{\nu} = L_{\sigma}{}^{\lambda} L^{\sigma}{}_{\nu} \, .$$

Die gesuchte $(\text{Inverse})^{T}$ lautet also $L_{\sigma}{}^{\lambda} = g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu}$.

16.3 Gaußsches cgs-System

Für die relativistische Formulierung ist es vorteilhaft, nicht das bisher verwendete SI-System für die elektromagnetischen Einheiten zu benutzen, sondern das Gaußsche cgs-System. Die Maxwell-Gleichungen haben im Gaußschen cgs-System (im Vakuum) die Form:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{16.11}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,. \tag{16.12}$$

Die Lorentz-Kraft lautet im Gaußschen cgs-System: $q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right)$.

Aus den Potentialen $\vec{A}$ und ϕ gewinnt man die physikalischen Felder im cgs-System via

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi\,, \tag{16.13}$$

die Lorenz-Eichung hat die Form

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \;=\; 0\,. \tag{16.14}$$

16.4 Ströme, Dichten, Potentiale

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine extrem leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, dass sie unter Lorentztransformation forminvariant bleiben.

1.) Die Kontinuitätsgleichung

Die Viererdivergenz (16.3) legt einen Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung nahe. Setzt man

$$j^\mu \;:=\; (c\rho, \vec{j})\,,$$

für die *Viererstromdichte*, so wird die Kontinuitätsgleichung einfach zu

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}\,, \tag{16.15}$$

Da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant. Man unterscheide zwischen *Forminvarianz* unter Lorentztransformation (das ist das eigentliche Ziel der kovarianten Formulierung) und *Lorentz-Invarianten*, die ihren Wert unter Lorentztransformation beibehalten, so wie die linke Seite von Gl. (16.15). Hier ist das beides aufgrund der skalaren Eigenschaft von $\partial_\mu j^\mu$ der Fall. Eine Lorentz-transformation, z.B. ein Boost, mischt die Ladungs- und Stromdichten.

Diese Eigenschaft ist von nun an für *jede* physikalische Gleichung zu fordern. Die Frage ist hier speziell, ob j^μ wirklich ein Vierervektor ist. Dazu muss sich seine nullte Komponente $c\rho$ als zeitartige Variable transformieren. Die im Volumenelement d^3x eingeschlossene Ladung ist ρd^3x. Das Minkowski-Volumenelement d^4x transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4x' = \underbrace{\left|\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^4)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^4)}\right|}_{=|\det L|=1} d^4x = d^4x\,,$$

also ist d^4x eine Lorentz-Invariante. Dabei ist die Jakobideterminante

$$\left|\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^4)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^4)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{x^0} & \frac{\partial x'^1}{x^0} & \frac{\partial x'^2}{x^0} & \frac{\partial x'^3}{x^0} \\ \frac{\partial x'^0}{x^1} & \frac{\partial x'^1}{x^1} & \frac{\partial x'^2}{x^1} & \frac{\partial x'^3}{x^1} \\ \frac{\partial x'^0}{x^2} & \frac{\partial x'^1}{x^2} & \frac{\partial x'^2}{x^2} & \frac{\partial x'^3}{x^2} \\ \frac{\partial x'^0}{x^3} & \frac{\partial x'^1}{x^3} & \frac{\partial x'^2}{x^3} & \frac{\partial x'^3}{x^3} \end{vmatrix}$$

gerade die Determinante der Transformationmatrix L der Lorentz-transformation.

Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho'\, d^3x' = \rho\, d^3x\,. \tag{16.16}$$

Damit ist gezeigt, dass ρ eine zeitartige Variable ist: Sie transformiert sich wie dx^0.

2.) Die Lorenz-Eichung

Die Lorenz-Eichbedingung lautet

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \;=\; 0\,.$$

Mit der Definition des *Viererpotentials*

$$A^\mu \;:=\; \left(\phi, \vec{A}\right) \tag{16.17}$$

wird dies zu

$$\partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{16.18}$$

Auch das ist als Skalar wieder invariant unter Lorentztransformation. Das gilt offensichtlich nicht für die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

3.) Vektor- und Skalarpotential in Lorenz-Eichung

Die Feldgleichungen für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ können nun kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu} . \tag{16.19}$$

4.) Die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder

Mit $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$ ergibt sich beispielsweise für die x-Komponenten

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \tag{16.20}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \tag{16.21}$$

16.5 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie

Wir definieren zunächst den antisymmetrischen *Feldstärketensor* (auch Feldtensor)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{16.22}$$

Seine kovariante Form erhält man durch

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\lambda} g_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{16.23}$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten *dualen* Feldstärketensor $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ über

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{16.24}$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad \mu, \nu, \lambda, \rho \quad \text{zyklisch} \\ -1 & \text{falls} \quad \mu, \nu, \lambda, \rho \quad \text{antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{16.25}$$

Man sieht, dass man von $F^{\mu\nu}$ direkt nach $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ gelangt, wenn man $\vec{B}$ für $\vec{E}$ und $-\vec{E}$ für $\vec{B}$ einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden. Wir trennen in inhomogene und homogene Gleichungen.

1.) Die inhomogenen Gleichungen
Sie lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu} , \tag{16.26}$$

und diese Formulierung ist, wie man leicht zeigen kann, *Lorentz-invariant*. Also gilt in jedem anderen Inertialsystem K' die Gleichung

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu .$$

2.) Die homogenen Gleichungen
Sie haben die Form

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0} , \tag{16.27}$$

wobei $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ hier der duale Feldstärketensor ist. Wie sich zeigen lässt, kann man die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ schreiben:

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 . \tag{16.28}$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Definition (16.22)). Da aber die Null auf der rechten Seite ganz automatisch allein durch die Definition von $F^{\mu\nu}$ herauskommt, sind die homogenen Gleichungen ohne jede weitere Annahme automatisch erfüllt!

Mit anderen Worten: Schreibt man Gl. (16.22) hin, so sind die homogenen Gleichungen bereits impliziert und damit *trivial*!

Beispielsweise bekommt man dann für $\mu = 0$, $\nu = 1$ und $\lambda = 2$ die z-Komponente der Induktionsgleichung wieder:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_z - \frac{\partial}{\partial x}E_y + \frac{\partial}{\partial y}E_x = -\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \nabla \times \vec{E}\right]_z = 0\,.$$

Für $\mu = 1$, $\nu = 2$, und $\lambda = 3$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = \nabla \cdot \vec{B} \;=\; 0\,.$$

16.6 Transformation der Felder

Wenn man schon die Elektrodynamik kovariant formuliert, dann stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho}\, F^{\lambda\rho}\,.$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit ν entlang der x-Richtung. Die zwischen K und K' vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (16.9) und bewirkt, dass im gestrichenen System die Felder folgende Form annehmen:

$$\begin{array}{rcllrcl} E'_x &=& E_x, & & B'_x &=& B_x \\ E'_y &=& \left(E_y - \beta B_z\right)/\sqrt{1-\beta^2}, & & B'_y &=& \left(B_y + \beta E_z\right)/\sqrt{1-\beta^2} \\ E'_z &=& \left(E_z + \beta B_y\right)/\sqrt{1-\beta^2}, & & B'_z &=& \left(B_z - \beta E_y\right)/\sqrt{1-\beta^2} \end{array}\,. \tag{16.29}$$

Spätestens hier wird klar, dass elektrisches und magnetisches Feld untrennbar verknüpft sind. Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, nicht die getrennten Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. Die korrekte Verallgemeinerung von Gl. (16.29) für allgemeine Geschwindigkeiten $\vec{\nu}$ lautet

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}' &= \gamma\,\vec{B} - \frac{\gamma-1}{\nu^2}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nu}\right)\vec{\nu} - \frac{\gamma}{c}\left(\vec{\nu}\times\vec{E}\right) \\ \vec{E}' &= \gamma\,\vec{E} - \frac{\gamma-1}{\nu^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{\nu}\right)\vec{\nu} + \frac{\gamma}{c}\left(\vec{\nu}\times\vec{E}\right) \end{aligned}}$$

mit

$$\gamma \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Zu beachten ist, dass zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In K' müssen also die Felder als $\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{x}', t')$ und $\vec{B}' = \vec{B}'(\vec{x}', t')$ ausgedrückt werden. In den Formeln (16.29) wird diese Tatsache noch nicht berücksichtigt. Die obigen Formeln machen deutlich, dass beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich elektrische Feldkomponenten auf! Das darf aber nicht zu der Annahme verführen, die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_l = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

erwachse rein aus der Transformation des Magnetfeldes in das Bezugssystem eines bewegten Teilchens. Wie man sich mit Hilfe von Gl. (16.29) leicht überzeugt, gilt diese Aussage nur in niedrigster Ordnung in v/c.