

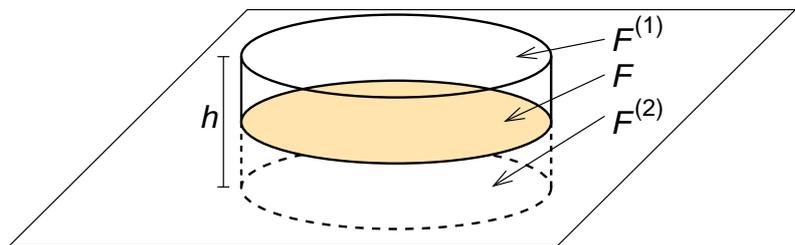
# 15. Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

## 15.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften. Im Allgemeinen sind die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  an Grenzflächen unstetig. Stetigkeitsbedingungen folgen aber für bestimmte Komponenten unter der Annahme, dass die Felder und die zeitlichen Ableitungen beschränkt sind. Der Einfachheit halber sei im folgenden angenommen, dass die Grenzfläche eben sei.

### Abbildung 15.1:

Volumen zur Anwendung des Divergenzsatzes an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.



### 1.) Normalkomponenten von $\vec{B}$ und $\vec{D}$

Wir betrachten

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (15.1)$$

und wenden den Gaußschen Integralsatz auf das symmetrisch an der Grenzfläche angebrachtes Volumen (siehe Fig. 15.1) an: Die Deckflächen  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  eines *Kästchen* (Zylinders) mit Volumen  $V$  und Oberfläche  $\partial V$  mögen symmetrisch zur Grenzfläche liegen; Größe und Gestalt der Deckflächen seien beliebig. Mit dem Divergenzsatz finden wir

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{B} + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{B} + \mathcal{O}(h) = 0 \quad (15.2)$$

wobei die letzte Gleichheit aus Gl. (15.1) folgt. Der Term  $\mathcal{O}(\mathbf{h})$  beschreibt den Beitrag von der Mantelfläche des Zylinders. Macht man die Höhe  $\mathbf{h}$  des Kästchen beliebig klein, so verschwinden im Grenzwert  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  die Mantelbeiträge, und die Stirnflächen  $F^{(1)}, F^{(2)}$  gehen gegen die Grenzfläche  $F$ :

$$\int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = \int_F d\mathbf{f} \vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0. \quad (15.3)$$

Das Vorzeichen kommt ins Spiel, weil die Flächennormalen der oberen und unteren Stirnflächen entgegengesetzt sind:  $\vec{n}^{(1)} = \vec{n} = -\vec{n}^{(2)}$ .  $\vec{\mathcal{B}}^{(1)}$  und  $\vec{\mathcal{B}}^{(2)}$  sind die  $\vec{\mathcal{B}}$ -Felder unmittelbar oberhalb und unterhalb der Grenzfläche  $F$ . Da die Schnittfläche  $F$  beliebig gewählt werden kann, muss für den Integranden selbst gelten:

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0} \quad (15.4)$$

Diese Gleichung besagt, dass die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{B}}$  stetig durch die Grenzfläche hindurchgehen muss; da es nur eine Normalkomponente gibt, lässt sich diese Gleichung auch als  $\mathcal{B}_n^{(1)} = \mathcal{B}_n^{(2)}$  schreiben.

Analog folgt aus

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f \quad (15.5)$$

mit dem Divergenzsatz

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \mathcal{O}(\mathbf{h}) = \int_V d^3x \rho_f \quad (15.6)$$

und im Grenzwert  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  wird

$$\int_V d^3x \rho_f \rightarrow \int_F d\mathbf{f} \gamma_f,$$

wobei  $\gamma_f$  die freie Ladung pro Fläche auf der Grenzfläche ist. Wenn die räumliche Ladungsdichte  $\rho_f$  der Ladung überall stetig ist, wird  $\gamma_f = 0$ . Ein  $\gamma_f \neq 0$  kann nur auftreten, wenn  $\rho_f$  auf der Grenzfläche singularär ist und dort einen endlichen Wert pro Fläche besitzt. Für die dielektrische Verschiebung gilt also

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}^{(2)}) = \gamma_f} \quad (15.7)$$

oder auch  $\mathcal{D}_n^{(1)} - \mathcal{D}_n^{(2)} = \gamma_f$ . Für Dielektrika mit  $\gamma_f = 0$  ist die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{D}}$  stetig; dagegen springt  $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{D}}$  beim Übergang von Leiter zu Nichtleiter um  $\gamma_f$  um den Wert der Ladung pro Grenzfläche.

## 2.) Tangentialkomponenten von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\mathcal{H}$

Wir benutzen die Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f. \quad (15.8)$$

Wir verwenden jetzt eine andere Version des Gaußschen Satzes, die wir auf dasselbe Zylindervolumen von Fig. 15.1 anwenden können. Man findet diese Version wie folgt; es gilt

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{b}(\vec{x}) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{b}(\vec{x})$$

mit Volumen  $V$ , Oberfläche  $\partial V$  und differenzierbarem Vektorfeld  $\vec{b}(\vec{x})$ . Sei nun  $\vec{b}(\vec{x}) = \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x})$  mit beliebigem konstantem Vektor  $\vec{c}$ :

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) \quad (15.9)$$

Im Integranden der linken Seite ist (mit Summenkonvention)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) &= \partial_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} c_\beta a_\gamma(\vec{x}) = -c_\beta \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial_\alpha a_\gamma(\vec{x}) \\ &= -\vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{a}(\vec{x})) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von Gl. (15.9) hingegen gilt für das Spatprodukt

$$d\vec{f} \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) = \vec{c} \cdot (\vec{a}(\vec{x}) \times d\vec{f}) = -\vec{c} \cdot (d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x}))$$

Einsetzen in Gl. (15.9) ergibt

$$\vec{c} \cdot \int_V d^3x \nabla \times \vec{a}(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \oint_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x})$$

und weil  $\vec{c}$  beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\int_V d^3x \nabla \times \vec{a}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x}) \quad (15.10)$$

Mit dieser Form des Gaußschen Integralsatzes erhalten wir aus Gl. (15.8) und mit dem Grenzwert  $h \rightarrow 0$

$$\int_V \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \int_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{\mathcal{E}} = \int_F d\vec{f} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = \int_F d\vec{f} \vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)})$$

(15.11)

Wir nehmen an, dass das  $\vec{\mathcal{B}}$ -Feld und seine zeitliche Ableitung auf der Grenzfläche beschränkt ist, sodass

$$\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

und damit

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0.$$

Da die Schnittfläche  $\mathcal{F}$  beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0}, \quad (15.12)$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{E}}$  bezüglich der Schnittfläche ist stetig. Bei der zweiten Gleichung von (15.8) tritt zusätzlich  $\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \vec{\mathbf{j}}_f$  auf. Wiederum verschwindet das Integral, wenn die Flussdichte auf der Grenzfläche stetig ist; die Grenzfläche kann aber eine singuläre Flächenstromdichte tragen; dann schreiben wir  $d^3\mathbf{x} = d\mathbf{f} d\mathbf{z}$  mit der  $\mathbf{z}$ -Koordinate in Normalenrichtung, und damit

$$\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \vec{\mathbf{j}}_f = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \int_{-h/2}^{h/2} d\mathbf{z} \vec{\mathbf{j}}_f \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \vec{\eta}_f \quad \text{mit} \quad \vec{\eta}_f = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} d\mathbf{z} \vec{\mathbf{j}}_f$$

$\vec{\eta}_f$  ist dadurch definiert, dass  $dQ = |\vec{\eta}_f| d\mathbf{l}_n dt$  die Ladung ist, die während der Zeit  $dt$  innerhalb der Grenzfläche in  $\vec{\eta}_f$ -Richtung durch ein Linienelement  $d\mathbf{l}_n$  senkrecht zu  $\vec{\eta}_f$  transportiert wird.

Unter Annahme der Beschränktheit von  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  an der Grenzfläche erhalten wir

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = \vec{\eta}_f} \quad (15.13)$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{H}}$  springt an der Grenzfläche um die Flächenstromdichte  $\vec{\eta}_f$  in der Grenzfläche senkrecht zu  $\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathcal{H}}$ .

## 15.2 Lineare, isotrope Medien

In linearen, isotropen Medien gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen  $\vec{\mathcal{H}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  sowie zwischen  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{D}}$ :

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (15.14)$$

Dann findet man aus (15.4), (15.12), (15.7) und (15.13):

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{n} \cdot (\mu_1 \vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \mu_2 \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = 0} \quad (15.15)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}^{(2)}) = \gamma_f \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{n} \cdot (\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = \gamma_f} \quad (15.16)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{\mathcal{D}}^{(1)}}{\epsilon_1} - \frac{\vec{\mathcal{D}}^{(2)}}{\epsilon_2} \right) = 0} \quad (15.17)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = \vec{\eta}_f \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{\mathcal{B}}^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\vec{\mathcal{B}}^{(2)}}{\mu_2} \right) = \vec{\eta}_f} \quad (15.18)$$

### Grenzfläche zwischen Metallen

Gilt das Ohmsche Gesetz,

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}}, \quad (15.19)$$

mit *Leitfähigkeit*  $\sigma$ , so folgt aus Gl. (15.12) für die Tangentialkomponente von  $\vec{j}_f$ :

$$\boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{j}_f^{(1)}}{\sigma_1} - \frac{\vec{j}_f^{(2)}}{\sigma_2} \right) = 0}. \quad (15.20)$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (15.21)$$

bei Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (wie unter 1.)

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j}_f = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f + \mathcal{O}(h) = - \int_V d^3x \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

und damit im Grenzwert  $h \rightarrow 0$

$$\int_F d\vec{f} \vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = - \int_F d\vec{f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial t}$$

Wegen freier Wahl von F folgt

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = - \frac{\partial \gamma_f}{\partial t}}. \quad (15.22)$$

Speziell für stationäre Ströme folgt aus

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0 \quad (15.23)$$

die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = 0. \quad (15.24)$$

### Übergang Leiter - Nichtleiter

Wir betrachten ein leitfähiges Medium auf Seite (1) und ein nichtleitendes auf Seite (2). Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, gilt mit Gl. (15.24)

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = 0, \quad (15.25)$$

und über das Ohmsche Gesetz Gl. (15.19) folgt, dass

$$\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = 0, \quad (15.26)$$

da  $\sigma_1 \neq 0$ . Dagegen folgt für  $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(2)}$  aus Gl. (15.16):

$$\epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(2)} = -\gamma_f. \quad (15.27)$$

Insbesondere für die Elektrostatik ist, wegen  $\vec{j}_f = 0$ , auch

$$\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = 0; \quad (15.28)$$

dann fordert (15.12)

$$\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}^{(2)} = 0, \quad (15.29)$$

also steht das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters.

### 15.3 Reflexion und Brechung von Licht

In Abwesenheit freier Ladungen  $\rho_f = 0$ ,  $\vec{j}_f = 0$  lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0 \quad (15.30)$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \quad (15.31)$$

Sie vereinfachen sich mit der Annahme linearer, isotroper Medien

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}, \quad (15.32)$$

zu

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (15.33)$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (15.34)$$

Wie in Kap. 9 lassen sich die Gleichungen (15.34) unter Beachtung von (15.33) entkoppeln, z.B.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}})}_{=0} - \Delta \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2}, \quad (15.35)$$

und man erhält die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0, \quad (15.36)$$

wobei  $c'$  die Phasengeschwindigkeit im Medium ist (vgl. Abschnitt 9.3):

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} = \epsilon \mu}. \quad (15.37)$$

### Ebene Wellen

Da wir im folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir Lösungen von (15.36) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (15.38)$$

wobei zwischen  $\omega$  und  $\vec{k}$  die Beziehung

$$\omega = c' k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (15.39)$$

gelten muss. Wie in Kap. 9 findet man, dass  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  und  $\vec{k}$  senkrecht zueinander stehen; aus  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  folgt  $\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{k} = 0$ , und es gilt

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad \leadsto \quad \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \mu\omega \vec{\mathcal{E}}$$

und damit

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mu c'} \vec{e} \times \vec{\mathcal{E}} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c'} \vec{e}.$$

Gleichung (15.39) unterscheidet sich von (9.25) dadurch, dass dort  $c$  eine Konstante ist, während  $c'$  von  $\omega$  abhängt, da im Allgemeinen  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ . Die Komponenten verschiedener Frequenz  $\omega$  in einem Wellenpaket laufen also mit verschiedener Geschwindigkeit  $c' = c'(\omega)$ , das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (*Zerfließen* von Wellenpaketen; vgl. hierzu Abschnitt 10.3).

### Phasen- versus Gruppengeschwindigkeit

Je nach Verlauf von  $\epsilon(\omega)$  kann  $c' > c$  werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit*  $v_{ph} = c'$  nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*

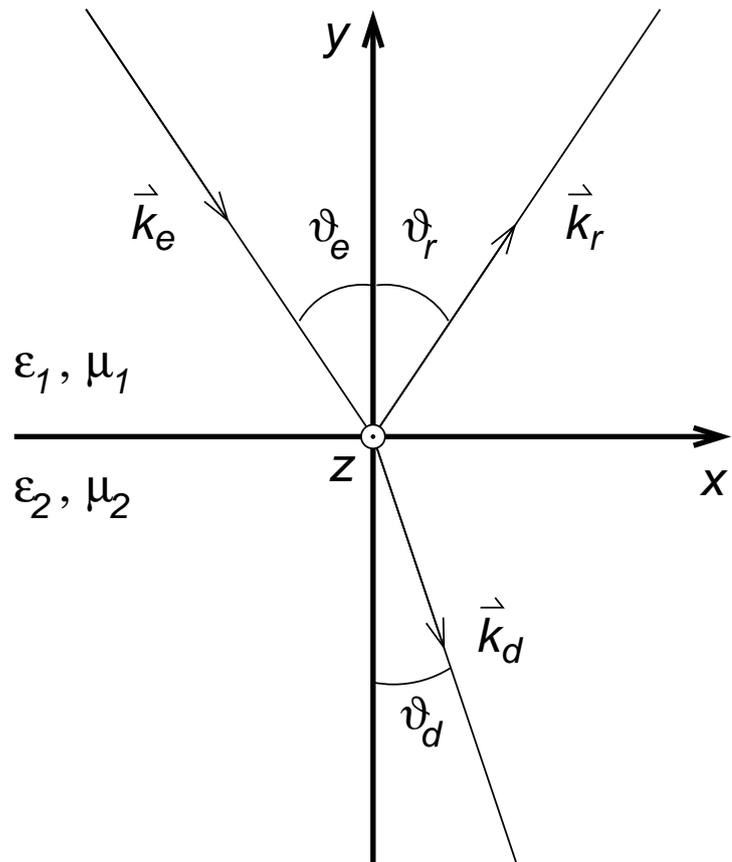
$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \tag{15.40}$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl  $k_0$  konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch  $v_g$  und nicht durch  $v_{ph}$  bestimmt.

### Randbedingungen für jede stetige Komponente von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (15.38), an einer ebenen Grenzfläche (siehe Fig. 15.2). O.B.d.A. wählen wir den Ursprung des Koordinatensystems in der Grenzfläche, und wir orientieren das Koordinatensystem, dass der Einfallswellenvektor  $\vec{k}_e$  mit der Grenzflächennormale  $\vec{n}$  die  $xy$ -Ebene definiert. Die Grenzfläche  $F$  ist dann also die  $xz$ -Ebene. Für eine beliebige stetige Komponente, die wir  $A$  nennen, muss beim Übertritt von Medium 1 nach Medium 2 die Stetigkeit zwischen Welle oberhalb und Welle unterhalb der Grenze gelten, und zwar für alle Zeiten  $t$ :

$$A_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{x} - \omega t)} + A_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{x} - \omega t)} = A_d e^{i(\vec{k}_d \cdot \vec{x} - \omega t)} \tag{15.41}$$



**Abbildung 15.2:** Ebene Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}_e$  wird an einer Grenzfläche ( $xz$ -Ebene) reflektiert und gebrochen.

wobei  $\vec{x}$  für einen beliebigen Punkt in der Grenzfläche steht.  $A_e$ ,  $A_r$  und  $A_d$  sind die Amplituden der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Wellenkomponente.

Da Gl. (15.41) insbesondere auch für  $t = 0$  gelten muss, folgt die Forderung der Phasengleichheit

$$\vec{k}_e \cdot \vec{x} = \vec{k}_r \cdot \vec{x} = \vec{k}_d \cdot \vec{x} \quad (15.42)$$

für jeden Punkt  $\vec{x}$  aus der Grenzfläche, ohne die Gl. (15.41) nicht erfüllbar wäre. Diese Beziehung besagt, dass alle drei Wellenvektoren dieselbe Projektion auf die Grenzfläche  $F$  haben. Wählt man  $t = 0$  und  $\vec{x} = 0$ , so folgt aus Gl. (15.41) für die Amplituden

$$A_e + A_r = A_d. \quad (15.43)$$

Schließlich kann man Gl. (15.41) auch für  $\vec{x} = 0$ ,  $t \neq 0$  betrachten; daraus folgt die Erhaltung der Frequenz

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d. \quad (15.44)$$

Die Frequenz (Farbe) des Lichts ändert sich also bei Reflexion und Brechung nicht.

## Koplanarität

Gl. (15.42) bedeutet, dass die drei Wellenvektoren  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  in einer Ebene  $\vec{N}$  senkrecht zur Grenzfläche  $F$  liegen; das ist die Einfallsebene, gebildet aus  $\vec{k}_e$  und  $\vec{n}$ , im gewählten System die  $xy$ -Ebene. Diese *Koplanarität* von  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  macht man sich klar, indem man speziell  $\vec{x} = \vec{x}_0$  in der Grenzfläche so wählt, dass  $\vec{k}_e \cdot \vec{x}_0 = 0$ ; dann müssen gemäß Gl. (15.42) die 3 Vektoren  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  senkrecht zu  $\vec{x}_0$  sein, was nur möglich ist, wenn  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  in einer Ebene liegen (koplanar sind).

## Reflexionsgesetz

Außerdem folgt aus der Gleichheit der Projektionen der Wellenvektoren auf die Grenzfläche, Gl. (15.42)

$$k_e \sin \vartheta_e = k_r \sin \vartheta_r = k_d \sin \vartheta_d. \quad (15.45)$$

Wegen der Gleichheit der Frequenzen (15.44)  $\omega_e = \omega_r$  gilt  $c_1 k_e = c_1 k_r$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_1$  im Medium 1. Also ist  $k_e = k_r$ , und es folgt das *Reflexionsgesetz*:

$$\vartheta_e = \vartheta_r. \quad (15.46)$$

Die Welle wird im selben Winkel reflektiert, in dem sie eingefallen ist.

## Brechungsgesetz

Aus (15.44) ergibt sich

$$\frac{k_e}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \omega = \frac{k_d}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \quad \text{mit} \quad c_1^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1}, \quad c_2^2 = \frac{1}{\epsilon_2 \mu_2},$$

also

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (15.47)$$

mit Brechungsindizes  $n_1 = c\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  und  $n_2 = c\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  der beiden Medien. Mit Gl. (15.45), also  $k_e \sin \vartheta_e = k_d \sin \vartheta_d$ , folgt das *Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \vartheta_e}{\sin \vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (15.48)$$

Man kann jetzt von der einen stetigen Komponente  $\mathbf{A}$  zu den kompletten Beziehungen für beliebige elektromagnetische Wellen gelangen, indem man

zwei Polarisationsfälle betrachtet:

a) Transversales elektrisches Feld  $\vec{\mathcal{E}} \perp \mathbf{N}$  (mit Einfallsebene  $\mathbf{N}$ ); dann hat  $\vec{\mathcal{E}}$  nur eine z-Komponente, die wegen  $\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0$  an der Grenzfläche stetig sein muss.

b) Transversales magnetisches Feld  $\vec{\mathcal{H}} \perp \mathbf{N}$ ; dann hat  $\vec{\mathcal{H}}$  nur eine z-Komponente, die wegen  $\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = 0$  (Dielektrikum,  $\vec{\eta}_f = 0$ ) stetig sein muss.

Der allgemeine Fall lässt sich aus diesen beiden Polarisierungen zusammensetzen.

Wertet man dann die Beziehung (15.43) für die Amplituden  $\mathcal{E}_z$  und  $\mathcal{H}_z$  aus, so erhält man die *Fresnelschen Formeln*, das *Brewstersche Gesetz* (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die *Totalreflexion* (Faser-Optik).

### **Bemerkung**

Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon(\omega)$  im allgemeinen komplex, also auch  $\mathbf{k}$  komplex. Eine elektromagnetische Welle wird also im Medium geschwächt (Absorption).

## **15.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitendem Material**

Wir betrachten einen Ohmschen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit  $\sigma$ . Dafür lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (13.23) und (13.24):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \sigma \vec{\mathcal{E}} &= 0; \end{aligned} \quad (15.49)$$

Solange kein Ladungsstau auftritt, ist  $\rho_f = 0$  (vgl. Abschnitt 4.2) und es existiert eine stationäre Stromverteilung

$$\vec{\mathbf{j}}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}} \neq 0. \quad (15.50)$$

Als Lösung von Gl. (15.49) setzen wir

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)} \quad (15.51)$$

an, mit  $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  (folgt aus  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ ). Mit einem analogen Ansatz für  $\vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)} \quad (15.52)$$

finden wir aus Gl. (15.49):

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega}(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}); \quad \mathbf{i}(\vec{k} \times \vec{\mathcal{H}}) + \mathbf{i}\epsilon\omega \vec{\mathcal{E}} - \sigma\vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (15.53)$$

Benutzt man  $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}}k^2 = -\vec{\mathcal{E}}k^2$  und eliminiert man im letzten Ausdruck von Gl. (15.53)  $\vec{\mathcal{E}}$  oder  $\vec{\mathcal{H}}$ , so erhält man:

$$\frac{-\mathbf{i}k^2}{\mu\omega} + \mathbf{i}\epsilon\omega - \sigma = 0, \quad \curvearrowright \quad k^2 = \omega^2\mu\epsilon + \mathbf{i}\mu\omega\sigma. \quad (15.54)$$

### Komplexe Wellenzahlen

Setzt man den Wellenvektor komplex an (mit reellen  $\alpha$ ,  $\beta$ )

$$k = \alpha + \mathbf{i}\beta; \quad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\mathbf{i}\alpha\beta, \quad (15.55)$$

so kann man  $\alpha$  und  $\beta$  durch  $\mu$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega$  und  $\sigma$  ausdrücken; Koeffizientenvergleich zwischen Gl. (15.54) und (15.55) ergibt:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2; \quad 2\alpha\beta = \mu\omega\sigma. \quad (15.56)$$

Eliminiert man in der ersten Gleichung  $\alpha$  mit Hilfe der zweiten Gleichung, d.h. mit  $\alpha^2 = (\mu\omega\sigma)^2/(4\beta^2)$ , so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu\omega\sigma)^2 + \beta^2\mu\epsilon\omega^2 = 0. \quad (15.57)$$

Da  $\beta$  reell sein soll, kommt als Lösung nur

$$\beta^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right) \quad (15.58)$$

in Frage (für die andere Lösung wäre  $\beta^2 < 0$ ). Analog:

$$\alpha^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right). \quad (15.59)$$

Für verschwindende Leitfähigkeit  $\sigma \rightarrow 0$ , also im Grenzfall Nichtleiter (Dielektrikum), folgt:

$$\beta \rightarrow 0; \quad \alpha^2 \rightarrow \mu\epsilon\omega^2, \quad (15.60)$$

also  $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$  in Einklang mit Gl. (15.39). Da  $\mu\omega\sigma \geq 0$ , müssen  $\alpha$  und  $\beta$  nach Gl. (15.56) gleiches Vorzeichen haben. Für  $\beta \neq 0$  (d.h.  $\sigma \neq 0$ ) wird

eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver  $x$ -Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i(\alpha x-\omega t)} e^{-\beta x}, \quad (15.61)$$

wobei mit  $\alpha > 0$  auch  $\beta > 0$  sein muss.

### Grenzfälle

- 1.) Bei hoher Leitfähigkeit ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) wird die Lichtwelle praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe  $d \sim \beta^{-1} \sim \sigma^{-1/2}$  verschwindet.
- 2.) Für hohe Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty$ ) ist zu beachten, dass  $\sigma$  frequenzabhängig ist:  $\sigma$  wird für  $\omega \rightarrow \infty$  rein imaginär, also  $k^2$  in Gl. (15.54) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit *harter* Röntgenstrahlung nachweisen.

### Skin-Effekt

Als Folge der Dämpfung  $\beta$  können wegen Gl. (15.50) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch  $\beta^{-1}$  bestimmt ist (*Skin-Effekt*).