

Teil V

Quellen elektromagnetischer Strahlung

11. Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

11.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.14), (7.15))

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (11.1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.2)$$

mit der Nebenbedingung (Lorenz-Eichung)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (11.3)$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = -\gamma(\vec{r}, t), \quad (11.4)$$

wo Ψ für Φ , A_i und γ für ρ/ϵ_0 , $\mu_0 j_i$ steht.

Greensche Funktion

Die allgemeine Lösung von Gl. (11.4) setzt sich aus der (in Abschnitt 10 diskutierten) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.11) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (11.4) benutzen wir die Methode der *Greenschen Funktionen*.

Wir nehmen an, dass die Felder den ganzen Raum füllen können, sodass wir als Randbedingung das Verschwinden der Lösung im Unendlichen fordern:

$$\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

Um die Gleichungen (11.1) und (11.2) zu lösen, stellen wir die Lösung $\Psi(\vec{x}, t)$ und die Inhomogenität $\gamma(\vec{x}, t)$ durch ihre Fouriertransformierten dar:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3k \int d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) \\ \gamma(\vec{x}, t) &= \int d^3k \int d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)\end{aligned}\quad (11.5)$$

Wir benötigen auch die Umkehrung

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Psi(\vec{x}, t) \\ \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \gamma(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (11.6)$$

Wir bestimmen jetzt die Form der Lösung, indem wir die Entwicklung (11.5) in die Wellengleichung $\square\Psi(\vec{x}, t) = -\gamma(\vec{x}, t)$ einsetzen, unter Verwendung von

$$\square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = - \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

und erhalten den Zusammenhang

$$\int d^3k \int d\omega \left[\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) - \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) \right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0 \quad (11.7)$$

Wir schließen wie in Kap. 10.4 aus dem Verschwinden der Fourierdarstellung auf das Verschwinden der Fouriertransformierten:

$$\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) - \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) = 0; \quad \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) = \frac{\tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (11.8)$$

Einsetzen in die Fouriertransformation (11.5) unter Verwendung der Umkehrung (11.6) für $\tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)$ ergibt:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x' \int dt' e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}'-\omega t')} \gamma(\vec{x}', t') \quad (11.9)$$

Wir vertauschen die \vec{x}', t' -Integration mit der \vec{k}, ω -Integration und erhalten das Ergebnis in der Form

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \int dt' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \gamma(\vec{x}', t') \\ G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\end{aligned}\quad (11.10)$$

Dies erinnert an die Lösung der Poissongleichung mit $\Psi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})$ und $\gamma(\vec{x}) = \rho(\vec{x})/\epsilon_0$:

$$\Delta\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x}); \quad \Psi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x}-\vec{x}')\gamma(\vec{x}'), \quad G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

oder anders ausgedrückt, die Greensche Funktion löst die Gleichung

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

sodass man die Lösung von $\Delta\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x})$ durch Überlagerung angeben kann. Nach Gl. (11.10) ist $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$ also als Greensche Funktion der Wellengleichung $\square\Psi(\vec{x}, t) = -\gamma(\vec{x}, t)$ zu interpretieren. Um die Analogie zu vervollständigen, berechnen wir $\square G$:

$$\begin{aligned}\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{\square e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))} \\ &= -\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')\end{aligned}\quad (11.11)$$

11.2 Berechnung der Greenschen Funktion

Die \vec{k} - und ω -Integrationen in Gl. (11.10) laufen jeweils von $-\infty$ bis $+\infty$:

$$\int d^3k \int d\omega \dots = \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \dots$$

Es gibt jedoch im Nenner des Integranden Nullstellen bei $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$ bzw. $\omega = c|\vec{k}|$, sodass die Integrationen über Singularitäten laufen; es handelt sich um uneigentliche Integrale. Diese Divergenzen kann man vermeiden, indem man den Integranden auf die komplexe Frequenzebene erweitert

und den Integrationsweg an den Divergenzen vorbeiführt. Die Integrale werden dann mit dem Residuensatz ausgewertet. Wir werden sehen, dass die Interpretation von Gl. (11.10) als

$$G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \epsilon > 0 \quad (11.12)$$

zu physikalischen, d.h. kausalen Ergebnissen führt. Der Integrationsweg soll also in der Halbebene $\text{Im } \omega > 0$ im Abstand ϵ zur reellen Achse verlaufen (siehe Fig. 11.1).

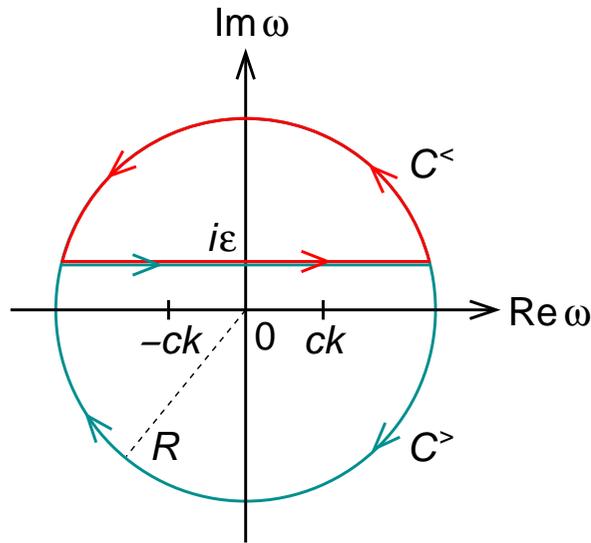


Abbildung 11.1: Integrationswege zur Berechnung von $G(\vec{x}-\vec{x}', t-t')$ in der komplexen Frequenzebene.

Wir berechnen zunächst das Frequenzintegral

$$g(k, \tau) := \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (11.13)$$

mithilfe des Residuensatzes. Dazu schließen wir den Integrationsweg in der komplexen Frequenzebene durch einen Halbkreis mit Radius R , den wir später gegen ∞ gehen lassen, entweder in der oberen komplexen ω -Ebene $\text{Im } \omega > 0$ oder in der unteren komplexen ω -Ebene $\text{Im } \omega < 0$. Zwischen den beiden Möglichkeiten müssen wir so auswählen, dass der Beitrag der

Halbkreise im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ nach Jordans Lemma verschwindet. Dazu müssen wir das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (11.13) untersuchen:

$$-i\omega\tau = -i(\text{Re } \omega + i \text{Im } \omega)\tau = -i\tau \text{Re } \omega + \tau \text{Im } \omega$$

Damit also der Realteil $\tau \text{Im } \omega$ zu einer für $R = |\omega| \rightarrow \infty$ verschwindenden Exponentialfunktion im Integranden führt, muss $\tau \text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ für $R \rightarrow \infty$ gelten:

$$\begin{aligned} \tau > 0 &\Rightarrow \text{Im } \omega < 0, & \text{Kontour } C^> \text{ in unterer Halbebene} \\ \tau < 0 &\Rightarrow \text{Im } \omega > 0, & \text{Kontour } C^< \text{ in oberer Halbebene} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Der Residuensatz lautet

$$\oint_{\partial G} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z_i \in G} \text{Res}\{f(z_i)\} \quad (11.15)$$

Hier ist G ein Gebiet in der komplexen Ebene, begrenzt von ∂G . Die Integration auf der linken Seite muss im mathematisch positiven Sinne, d.h. gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. Auf der rechten Seite wird die Summe über alle Pole z_i von $f(z)$ in G ausgeführt. $\text{Res}\{f(z_i)\}$ ist das Residuum von $f(z)$ bei z_i ; wenn die Laurentreihe von $f(z)$ bei z_i die Form

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_i} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n$$

hat, dann ist $a_{-1} = \text{Res}\{f(z_i)\}$. Für einen einfachen Pol bei z_0 berechnet man das Residuum als

$$\text{Res}\{f(z_0)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Alternativ, wenn $f(z) = p(z)/q(z)$ ist und $q(z)$ bei $z = z_0$ eine einfache Nullstelle hat:

$$\text{Res}\{f(z_0)\} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Für einen Pol mit Ordnung $m > 1$ gilt

$$\text{Res}\{f(z_0)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\}$$

Insbesondere für $m = 2$ bedeutet das

$$\text{Res}\{f(z_0)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] \right\}$$

Wir beginnen jetzt die Berechnung des Integrals (11.13) mit dem

Fall 1: $\tau < 0$

Der Integrationsweg muss nach der Fallunterscheidung (11.14) in der Halbebene $\text{Im } \omega > 0$ geschlossen werden, was zur Kontour $C^<$ in Abb. 11.1 führt. Der Weg $\partial G = C^<$ umschließt keinen Pol des Integranden. Nach dem Residuensatz verschwindet also das Integral:

$$g(\mathbf{k}, \tau) = 0 \quad \text{für } \tau < 0$$

Also ist die Greensche Funktion

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0 \quad \text{für } t - t' < 0$$

Damit folgt für die Lösung der Wellengleichung

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \gamma(\vec{x}', t') \quad (11.16)$$

Das Integral über t' , das von $-\infty$ bis $+\infty$ ging, reduziert sich auf den Bereich von $t' = -\infty$ bis $t' = t$. Das macht physikalisch Sinn, wenn wir $\Psi(\vec{x}, t)$ als Wirkung der Ursache $\gamma(\vec{x}, t)$ interpretieren. $\Psi(\vec{x}, t)$ steht für Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{x}, t)$ bzw. für $\Phi(\vec{x}, t)$; $\gamma(\vec{x}, t)$ steht für Komponenten der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$ oder für die Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$. Die Wellengleichung beschreibt also, wie sich die Potentiale und mit ihnen die Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ als Wirkung, d.h. durch elektromagnetische Ausstrahlung, aus der gegebenen Strom- und Ladungsdichte als Ursache ergeben. Die Reduktion der Integration auf $t' < t$ ist Ausdruck der *Kausalität*: Die Wirkung kann der Ursache zeitlich nur folgen, kann ihr nicht vorauslaufen.

Allerdings hätten wir durch Wahl von $\epsilon < 0$ beim Umgehen der Singularitäten bei $\omega = \pm c|\vec{k}|$ die *anti-kausale* Lösung erhalten, die der Ursache vorausläuft und auch eine formal korrekte Lösung der Wellengleichung darstellt. Die formale Gleichberechtigung der beiden Lösungen hat ihre Ursache in der Invarianz der Maxwellgleichungen bei Zeitumkehr.

Fall 2: $\tau > 0$

Wir schließen den Integrationsweg bei der Berechnung von $g(\mathbf{k}, \tau)$ diesmal in der unteren Halbebene $\text{Im } \omega < 0$, was zur Kontour $C^>$ in Abb. 11.1 führt. Die beiden Pole bei $\omega = \pm ck$ liegen im Inneren des geschlossenen

Weges $C^>$, der aber im mathematisch negativen Sinne orientiert ist, also ein negatives Vorzeichen beiträgt. Wegen

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}(\omega - ck)(\omega + ck)$$

ergibt der Residuensatz

$$\begin{aligned} g(\mathbf{k}, \tau) &= -c^2 \oint_{C^>} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= (-2\pi i)(-c^2) \sum_{\omega=\pm ck} \text{Res} \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= 2\pi i c^2 \left[\lim_{\omega \rightarrow +ck} \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + ck} \right) + \lim_{\omega \rightarrow -ck} \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - ck} \right) \right] \\ &= 2\pi i c^2 \left[\frac{e^{-ick\tau}}{2ck} + \frac{e^{ick\tau}}{-2ck} \right] = 2\pi c \frac{\sin(ck\tau)}{k} \end{aligned} \quad (11.17)$$

Damit folgt für die Greensche Funktion (11.12)

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}} \frac{\sin(ck\tau)}{k} \quad \vec{s} = \vec{x} - \vec{x}', \quad \tau = t - t' > 0 \quad (11.18)$$

Das \vec{k} -Integral berechnen wir in Kugelkoordinaten und messen den Winkel ϑ bezüglich der \vec{s} -Richtung. Dann ist

$$d^3k = k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \vec{k} \cdot \vec{s} = ks \cos \vartheta, \quad s = |\vec{s}|.$$

Die φ -Integration liefert einen Faktor 2π ; damit folgt

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(ck\tau) \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{iks \cos \vartheta} \quad (11.19)$$

Mit der Substitution $\xi = \cos \vartheta$, $d\xi = -\sin \vartheta d\vartheta$ wird das ϑ -Integral zu

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{iks \cos \vartheta} = \int_{-1}^1 d\xi e^{iks\xi} = \frac{e^{iks} - e^{-iks}}{iks} = \frac{2 \sin(ks)}{ks}$$

und damit

$$\begin{aligned} G(\vec{s}, \tau) &= \frac{c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \sin(ck\tau) \sin(ks) \\ &= \frac{2c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \left\{ \cos \left[ck \left(\tau - \frac{s}{c} \right) \right] - \cos \left[ck \left(\tau + \frac{s}{c} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

wegen $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$. Mit der Substitution $\kappa = ck$ und $\zeta = \tau \mp s/c$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \cos(ck\zeta) &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\kappa \cos(\kappa\zeta) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \cos(\kappa\zeta) \\ &= \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa (e^{i\kappa\zeta} + e^{-i\kappa\zeta}) = \frac{\pi}{c} \delta(\zeta). \end{aligned}$$

Einsetzen in G ergibt

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{1}{4\pi s} \left[\delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right] \quad (11.20)$$

Da für $\tau = t - t' > 0$ immer $\tau + s/c > 0$ gilt, trägt die zweite δ -Funktion nichts bei. Das Endergebnis lautet daher:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \quad (11.21)$$

Diskussion

Aus Gründen der räumlichen Isotropie hängt G nur von $|\vec{x} - \vec{x}'|$ ab. Die Greensche Funktion erfüllt nicht nur die Forderung der Kausalität, $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0$ für $t < t'$, sondern es ist darüber hinaus

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0 \quad \text{für } t < t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \quad (11.22)$$

Diese Eigenschaft drückt die Retardierung aus. Die Wirkung ist gegenüber der Ursache um die Zeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ verzögert. Dies ist gerade die Laufzeit des Signals, das mit der Geschwindigkeit c vom Ort \vec{x}' der Ursache zum Ort \vec{x} der Wirkung läuft.

Die Greensche Funktion hat jedoch darüber hinaus die Eigenschaft

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \neq 0 \quad \text{nur für } t = t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \quad (11.23)$$

d.h. die Wirkung tritt scharf zur retardierten Zeit $t = t' + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ ein, nicht nur nicht vorher, sondern auch nicht nachher. Dies ist eine Besonderheit des dreidimensionalen Raums; in zwei Dimensionen hätte die Ursache einen unendlich langen Nachhall.

Interpretation als Kugelwelle

Die Inhomogenität in Gl. (11.11) $\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')$ stellt eine punktförmige Quelle dar, die zur Zeit t' am Ort \vec{x}' für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c aus. Es muss also gelten:

- i) Die Kugelwelle G muss für $t < t'$ nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden.
- ii) Sie muss am Ort \vec{x} zur Zeit $t = t' + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ausbreiten.
- iii) Da die Energie der Welle auf einer Kugeloberfläche verteilt ist, sollte G asymptotisch wie $R^{-1} = |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ verschwinden.

Die *retardierte* Greensche Funktion (11.21) erfüllt genau diese Forderungen. Gleichung (11.10) zeigt, wie man die Potentiale \vec{A}, Φ zu gegebener Quellenverteilung ρ, \vec{j} aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

11.3 Retardierte Potentiale

Durch Einsetzen der Greenschen Funktionen in die Lösung der Wellengleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \int dt' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \gamma(\vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \frac{\gamma(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\gamma\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Dieses Ergebnis lässt sich so deuten, dass der Ort \vec{x}' den ganzen Raum abstastet und die Wirkung von γ jeweils zur retardierten Zeit $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ eintritt. Die Wirkung fällt mit $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ mit der Entfernung von der Ursache ab. Je nach Problemstellung werden wir $\Psi(\vec{x}, t)$ in der Form der zweiten oder der dritten Zeile von Gl. (11.24) verwenden. Wenn wir jetzt Ψ durch Φ

bzw. \vec{A} und γ durch ρ/ϵ_0 bzw. $\mu_0\vec{j}$ ersetzen, erhalten wir die *retardierten Potentiale*:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\rho(\vec{x}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.25)$$

und

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (11.26)$$

Sie sind ebenso wie die *avancierten Potentiale* mit den Maxwellgleichungen vereinbar, da diese keine Zeitrichtung auszeichnen. Der Unterschied zu den statischen Potentialen besteht darin, dass sich eine Änderung von ρ und \vec{j} bei x' erst nach der Zeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ auf das Feld an der Stelle \vec{x} auswirkt. Gl. (11.24) ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung, die man noch zur allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung addieren muss, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu erhalten; für die Potentiale erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3k \left(\vec{A}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \vec{A}_1^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right) \\ \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3k \left(\tilde{\Phi}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\Phi}_1^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right) \end{aligned} \quad (11.27)$$

Die Lösungen (11.25) und (11.26) sind über die Lorenz-Eichung Gl. (11.3) bzw. die Ladungserhaltung Gl. (6.3) miteinander verknüpft. Die Ausführung der Integrationen in Gl. (11.25) und (11.26) wollen wir anhand von zwei praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der δ -Distribution enthaltene Retardierung achten.

Quasistationäre Felder

Vernachlässigt man die Retardierung in (11.25) und (11.26),

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \rightarrow \delta(t - t'), \quad (11.28)$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.29)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.30)$$

die in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auftreten. Die Näherung (11.28) ist gerechtfertigt, wenn ρ und \vec{j} sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz $|\vec{x} - \vec{x}'|$ zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

Beispiel 1: Zeitlich periodische Quellen-Verteilungen

$$\rho = \rho(\vec{x}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x}) \exp(-i\omega t). \quad (11.31)$$

Dann folgt aus Gl. (11.25):

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}') e^{-i\omega t'} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)} \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned}$$

und analog für Gl. (11.26); damit ist

$$\Phi = \Phi(\vec{x}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \quad (11.32)$$

mit $(k = \omega/c)$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.33)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (11.34)$$

Die zugehörigen Differentialgleichungen ergeben sich aus Gl. (11.1), (11.2), (11.31) und (11.32) zu:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{x}, t) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) e^{-i\omega t} \\ \leadsto e^{-i\omega t} \Delta\Phi(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} \\ \leadsto (\Delta + k^2)\Phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

und damit gilt für die Potentiale

$$(\Delta + k^2)\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x}), \quad (11.35)$$

wo Ψ für Φ , \mathbf{A}_i und γ für ρ/ϵ_0 , $\mu_0 \mathbf{j}_i$ steht. Die Lösungen (11.33) und (11.34) können wir dann mit der zu (11.35) gehörenden Greenschen Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; k) = \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (11.36)$$

als

$$\Psi(\vec{x}) = \int d^3x' \gamma(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}'; k) \quad (11.37)$$

schreiben. Die Diskussion der Integrale (11.33), (11.34) werden wir in Kapitel 12 wieder aufgreifen.

Beispiel 2: Felder bewegter Punktladungen

Für eine sich auf der Bahn $\vec{x}(t)$ bewegende Punktladung q können wir

$$\rho = q \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)); \quad \vec{j} = q \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad (11.38)$$

schreiben. Dann kann in (11.25) die \vec{x}' -Integration ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{x}(t')) \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11.39) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}, \end{aligned}$$

analog

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\vec{v}(t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}. \quad (11.40)$$

Um die t' -Integration auszuführen, substituieren wir

$$\xi = t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c} = t' - t + \frac{\mathbf{R}(t')}{c}$$

mit $\vec{\mathbf{R}}(t') = \vec{x} - \vec{x}(t')$, d.h. $\mathbf{R}(t') = |\vec{\mathbf{R}}(t')| = |\vec{x} - \vec{x}(t')|$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt'} \mathbf{R}(t') = \frac{d}{dt'} |\vec{x} - \vec{x}(t')| = -\vec{v}(t') \cdot \nabla_{\mathbf{R}} |\vec{x} - \vec{x}(t')| = -\vec{v}(t') \cdot \frac{\vec{\mathbf{R}}(t')}{\mathbf{R}(t')} = -\vec{v}(t') \cdot \vec{\mathbf{n}}(t')$$

wobei wir mit $\vec{\mathbf{n}}(t')$ den Einheitsvektor in $\vec{\mathbf{R}}(t')$ -Richtung abkürzen. Außerdem gilt

$$\frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \frac{\vec{\mathbf{R}}(t')}{\mathbf{R}(t')} = 1 - \frac{\vec{v}(t')}{c} \cdot \vec{\mathbf{n}}(t')$$

und damit

$$\frac{dt'}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|} = \frac{dt'}{\mathbf{R}(t')} = \frac{d\xi}{\mathbf{R}(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{\mathbf{R}}(t')}$$

Einsetzen in Gl. (11.39) ergibt

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(\xi)}{\mathbf{R}(t')} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\delta(\xi)}{\mathbf{R}(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{\mathbf{R}}(t')}$$

und damit

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\mathbf{R}(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{\mathbf{R}}(t')} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \quad (11.41)$$

wobei der Index "ret" bedeutet, dass der Ausdruck in Klammern für $\xi = 0$, d.h. für die Lösung der Gleichung

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{\mathbf{R}(t_{\text{ret}})}{c} \quad (11.42)$$

auszuwerten ist. Das analoge Ergebnis für das Vektorpotential lautet

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q \vec{v}(t')}{\mathbf{R}(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{\mathbf{R}}(t')} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \quad (11.43)$$

Diese beiden Beziehungen (11.41) und (11.43) heißen *Liénard-Wiechert-Potentiale*. Sie sind für komplizierte Teilchenbahnen wegen Gl. (11.42) nicht einfach auszuwerten. Die Zeit t_{ret} trägt der endlichen Laufzeit der elektromagnetischen Welle vom momentanen Aufenthaltspunkt $\vec{x}(t)$ zum Beobachtungspunkt \vec{x} Rechnung (siehe Abb. 11.2).

Der Grenzfall $v \rightarrow 0$ ergibt das Coulomb-Potential:

$$\vec{A} \rightarrow 0; \quad \Phi(\vec{x}, t) \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \mathbf{R}}. \quad (11.44)$$

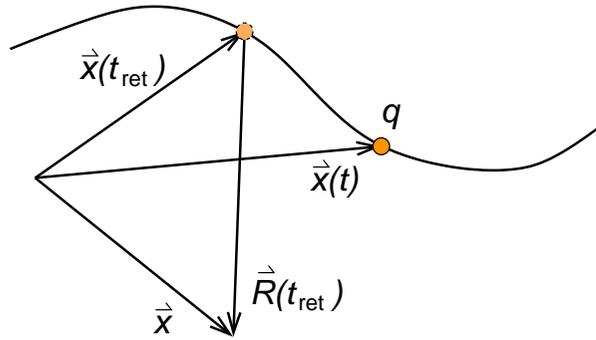


Abbildung 11.2:
Geometrie für die retardierte Wirkung einer bewegten Punktladung.

11.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

Von Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluss durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int d\vec{f} \cdot \vec{S} \neq 0. \quad (11.45)$$

Das bedeutet, dass die Felder \vec{E}, \vec{B} nicht stärker als R^{-1} abfallen dürfen, da die Oberfläche wie R^2 anwächst. Solche Felder nennt man *Strahlungsfelder*, im Gegensatz zu den *statischen* Feldern, die mit R^{-2} abfallen.

Wir wollen nun zeigen, dass beschleunigte Punktladungen *strahlen*; dazu müssen wir die zu (11.41) und (11.43) gehörenden Felder über

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11.46)$$

berechnen, wobei wir für Φ, \vec{A} die Form (11.39), (11.40) benutzen wollen. Mit den Abkürzungen

$$\nabla f(R) = \vec{n} \frac{\partial f}{\partial R}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad \vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}(t') \quad (11.47)$$

erhält man:

$$-\nabla\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) - \frac{\vec{n}(t')}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \quad (11.48)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right), \quad (11.49)$$

so dass ($\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \frac{\vec{v}(t')}{cR(t')} - \vec{n}(t') \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\}. \quad (11.50)$$

Dabei bedeutet $\delta'(t' - t + R(t')/c)$ die Ableitung der δ -Distribution nach ihrem Argument $\xi = t' - t + R(t')/c$:

$$\int dx f(x) \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \int dx f^{(n)}(x) \delta(x); \quad (11.51)$$

d.h. die δ -Distribution ist (beliebig oft) differenzierbar, vorausgesetzt, dass f (beliebig oft) differenzierbar ist. Die Ableitung wird von der Deltafunktion also abgewälzt auf die Funktion $f(x)$, mit der die Deltafunktion unter dem Integral steht.

Analog:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' (\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')) \left\{ \frac{1}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \frac{1}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\}. \quad (11.52)$$

Zur Ausführung der t' -Integration benutzen wir ($\xi = t' - t + R(t')/c$):

$$\frac{d}{dt'} \delta(\xi) = \delta'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t'} \quad \curvearrowright \quad \delta'(\xi) = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \quad (11.53)$$

mit

$$\kappa(t') = \frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{\vec{v}(t')}{c} \cdot \vec{n}(t'),$$

und die allgemeine Beziehung

$$\int dt' g(t') \delta(f(t')) = \sum_i \frac{g(t'_i)}{|f'(t'_i)|}, \quad (11.54)$$

wobei die t'_i die (einfachen) Nullstellen von $f(t')$ sind. Mit Gl. (11.51) sowie (11.41) und (11.43) wird dann:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \frac{d}{dt'} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \frac{d}{dt'} \left(\frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')} - \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}}. \quad (11.55)\end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')} + \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}}.$$

Um die Differentiation nach t' auszuführen bilden wir

$$\frac{d\vec{n}}{dt'} = \frac{d}{dt'} \frac{\vec{x} - \vec{x}'(t')}{|\vec{x} - \vec{x}'(t')|} = \frac{\vec{R}}{R^2} (\vec{n} \cdot \vec{v}) - \frac{\vec{v}}{R} = \frac{1}{R} ((\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}) \quad (11.56)$$

und

$$\frac{d}{dt'} (\kappa R) = \frac{d}{dt'} \left(R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right) = \frac{v^2}{c} - \vec{n} \cdot \vec{v} - \frac{R}{c} (\vec{n} \cdot \vec{b}) \quad (11.57)$$

mit der Beschleunigung der Punktladung $\vec{b} = d\vec{v}/dt'$. Hierbei haben wir $\vec{R} = (-1/R)\vec{R} \cdot \vec{v} = -\vec{n} \cdot \vec{v}$ verwendet.

Entwicklung nach grossen Entfernungen

Setzen wir Gl. (11.56) und (11.57) in (11.55) ein und ordnen nach Potenzen

von R^{-1} , so erhalten wir (unter Weglassung des Argumentes t'):

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n}}{\kappa R^2} - \frac{\kappa R \frac{\vec{b}}{c} - \kappa((\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}) + \left(\frac{\vec{v}}{c} - \vec{n}\right)(\vec{v} \cdot \vec{n} - \frac{v^2}{c} + \frac{R}{c}(\vec{n} \cdot \vec{b}))}{(\kappa c)(\kappa^2 R^2)} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n}}{\kappa R^2} - \frac{1}{c\kappa^3 R^2} \left(\frac{\kappa R \vec{b}}{c} + \kappa \vec{v} - \kappa(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \vec{v} - \frac{v^2}{c^2} \vec{v} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R}{c^2} (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{v} - (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \frac{v^2}{c} \vec{n} - \frac{R}{c} (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{n} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left(-\kappa \vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b}) \frac{\vec{v}}{c} + (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{n} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}),\end{aligned}$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left((\vec{n} \cdot \vec{b}) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \kappa \vec{b} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}). \quad (11.58)$$

Die Terme mit R^{-2} und noch höheren Potenzen von $1/R$ sind im Hinblick auf die Ausstrahlungsbedingung (11.45) uninteressant. Entsprechend gilt für \vec{B} :

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left((\vec{n} \cdot \vec{b}) (\vec{v} \times \vec{n}) - \kappa c (\vec{n} \times \vec{b}) \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}). \quad (11.59)$$

Zur Berechnung der Energiestromdichte benutzen wir die Identität

$$\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{b} \right) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \vec{b} \left(\vec{n}^2 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \right) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \kappa \vec{b}, \quad (11.60)$$

wobei wir $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$ benutzt haben. Ferner gilt die Relation

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{E}), \quad (11.61)$$

die für den asymptotischen Bereich direkt aus Gl. (11.58), (11.59) folgt, sich jedoch auch für die R^{-2} -Terme beweisen lässt, die uns im folgenden nicht interessieren. Wir finden dann für den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\vec{n} E^2 - \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \right) = \frac{\vec{n}}{\mu_0 c} E^2, \quad (11.62)$$

da $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ im Fernfeld. Mit Gl. (11.58) und (11.60) erhalten wir:

$$\vec{S} = \frac{q^2 \vec{n}}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \kappa^6 R^2} \left(\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{b} \right] \right)^2. \quad (11.63)$$

Da $|\vec{S}| \sim R^{-2}$, ist die Ausstrahlungsbedingung (11.45) erfüllbar und wir haben das Ergebnis, dass beschleunigte Punktladungen, $\vec{b} \neq 0$, strahlen. Dass geradlinig und gleichförmig bewegte Punktladungen ($\vec{b} = 0$) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruhe-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so dass $\vec{S} = 0$ wird.

Beispiele:

1.) *Bremsstrahlung:*

Wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target), dann entsteht Bremsstrahlung. Daraus resultiert das kontinuierliche *Röntgenspektrum*.

2.) *Synchrotron-Strahlung:*

Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung *verloren*. Allerdings wird das Synchrotron auch als Strahlungsquelle verwendet.

3.) *Strahlungsdämpfung:*

Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.