



## Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

### 10. Übung

(Abgabe Donnerstag, 17.01.2008 in der Vorlesung)

#### Aufgabe 35 (10 Punkte)

##### Lagrangefunktion im beschleunigten Bezugssystem

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L_0(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_0^2 - U(\vec{r}_0)$$

eines Teilchens in einem äußeren Feld  $U(\vec{r}_0)$  in dem ruhenden Koordinatensystem  $\Sigma_0$ .

- a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion  $L_1(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1)$ , die sich durch Transformation auf ein bewegtes, nicht rotierendes Koordinatensystem  $\Sigma_1$  ergibt, welches aus  $\Sigma_0$  durch die Transformation  $\vec{r}_0 = \vec{r}_s(t) + \vec{r}_1$  hervorgeht.

*Hinweis:* Formen Sie die Terme, in denen  $\dot{\vec{r}}_1(t)$  auftritt, zu totalen zeitlichen Differentialen um. Welchen Einfluss haben diese Ausdrücke auf die Variation des Wirkungsintegrals?

- b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ , die aus  $L_1(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1)$  durch Transformation von  $\Sigma_1$  auf ein mit der zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega(t)$  rotierendes Koordinatensystem  $\Sigma$  hervorgeht, das den selben Ursprung wie  $\Sigma_1$  besitzt.
- c) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für das Teilchen in dem Koordinatensystem  $\Sigma$  aus  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$  ab.

*Hinweis:* Das Prinzip der kleinsten Wirkung gilt immer, unabhängig vom Bewegungszustand des Bezugssystems.

Um  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$  und  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$  zu berechnen, bestimmen Sie zunächst das totale Differential

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot d\dot{\vec{r}} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}$$

#### Aufgabe 36 (10 Punkte)

##### Eulerwinkel

Eine Drehung um die Eulerschen Winkel  $\psi, \vartheta, \varphi$  lässt sich definieren durch die Operation

$$R(\psi, \vartheta, \varphi) = R_3(\psi) R_1(\vartheta) R_3(\varphi)$$

Dabei bedeute etwa  $R_3(\varphi)$  eine Drehung um die 3. Achse um den Winkel  $\varphi$  im mathematisch positiven Sinn. Leiten Sie unter Benutzung des Zusammenhangs

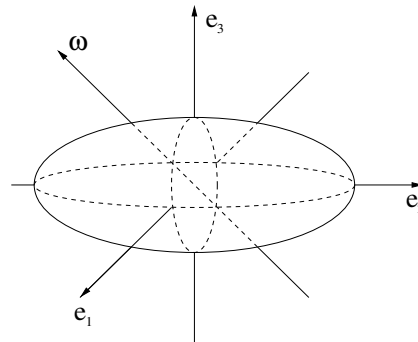
$$\dot{R}R^T \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

für beliebige  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  her, wie sich die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit durch die Eulerschen Winkel und ihre zeitlichen Ableitungen ausdrücken lassen.

**Aufgabe 37** (10 Punkte)  
**Rotierendes Ellipsoid**

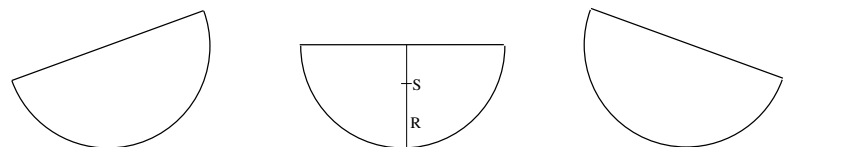
Gegeben sei ein homogenes 3-achsiges Ellipsoid der Masse  $m$  mit den Hauptachsen  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  und den zugehörigen Halbachsen  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

- Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes) und geben Sie den Trägheitstensor  $\Theta$  im Hauptachsensystem an.
- Das Ellipsoid rotiere nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  um eine feste Achse, die um  $45^\circ$  gegen  $\vec{e}_3$  geneigt ist und in der  $\vec{e}_2$ - $\vec{e}_3$ -Ebene liegt. Berechnen Sie mit den Euler-Gleichungen das dabei auf das Ellipsoid wirkende Drehmoment  $\vec{M}$ .



**Aufgabe 38** (15 Punkte)  
**Schwingung einer Halbkugel**

Eine homogene, massive Halbkugel vom Radius  $R$  liege auf einer waagerechten Unterlage. Es soll die Frequenz der Schaukelbewegung, die sie unter dem Einfluss der Schwerkraft ausführt, berechnet werden.



- Berechnen Sie dazu zunächst die Lage des Schwerpunktes der Halbkugel.
- Wie groß ist das Trägheitsmoment der Halbkugel für die zu untersuchende Schwingung? (*Hinweis:* Satz von Steiner.)
- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auf.
- Wie groß ist also die gesuchte Schwingungsfrequenz?