Tensoren

Tensoren erscheinen in der Physik als Verallgemeinerung der Reihe Skalar, Vektor, Matrix; oft ist ein bestimmtes Transformationsverhalten bei Basiswechsel wichtig.

Tensor 0-ter Stufe: Skalar.

Tensor 1-ter Stufe: Vektor aus $\mathbb{R}^n$, n Einträge, ein Index $i = 1, \ldots, n$.

Tensor 2-ter Stufe: quadratische Matrix aus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, n^2 Einträge, zwei Indizes $i_1, i_2 = 1, \ldots, n$.

Tensor 3-ter Stufe: kubische Anordnung von n^3 Einträgen, drei Indizes. Beispiel: Levi-Civitá-Symbol ε_{ijk}.

Tensor m-ter Stufe: n^m Einträge, m Indizes.

Daher erscheinen Tensoren oft als Objekte mit vielen Indizes:

$$T = \left(T_{i_1,i_2,i_3,\ldots,i_m}\right)_{i_k=1,\ldots,d_k;k=1,\ldots,m},$$

weil häufig ihre Repräsentation in einer bestimmten Basis $T_{i_1,i_2,i_3,\ldots,i_m}$ als Tensor eingeführt wird.

Etwas formaler sind Tensoren Produkte von Vektorräumen, und man kann zeigen, dass sie selbst wieder Vektorraumeigenschaften besitzen.

Das Tensorprodukt $\otimes$ ist eine Verknüpfung zwischen zwei Vektoren v und w aus zwei Vektorräumen V und W über denselben Körper K: $T = v \otimes w$, wobei $\otimes$ eine bilineare Abbildung ist mit Distributivität bezüglich der Addition im Vektorraum.

Da der Raum der Tensorprodukte wieder ein Vektorraum ist, kann mit einem weiteren Vektorraum wieder ein Tensorprodukt gebildet werden, und man kann zeigen: $u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$

Jeder Tensor kann als Linearkombination der Tensorprodukte der Basisvektoren der zugrundeliegenden Vektorräume dargestellt werden:

$$T = \sum_{j_1 \in d_1,\ldots,j_m \in d_m} T_{j_1,\ldots,j_m} \vec{e}_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_m}^{(m)}$$

wobei $\left\{\vec{e}_1^{(k)}, \vec{e}_2^{(k)}, \ldots, \vec{e}_{d_k}^{(k)}\right\}$ eine Basis des Vektorraums $V^{(k)}$ ist.

Tensoren können außerdem als multilineare Abbildungen in einen Vektorraum aufgefasst werden.