

# ベイズの定理

岡山大学 異分野基礎科学研究所

大槻純也



# 前回の復習：ベイズの定理

Bayesian theorem

$$\underline{p(X|Y)} = \frac{p(Y|X)\underline{p(X)}}{p(Y)}$$

事後確率  
posterior probability

事前確率  
prior probability

規格化定数

sum rule + product rule

$$p(Y) = \sum_X p(Y|X)p(X)$$

X: 知りたいこと (青い箱から選んだか)

Y: 観測結果 (選ばれたのはオレンジorりんご)

# 例題

日本人の罹患率が0.1%の病気（例えばガン）を考えます。  
ある検査で陽性が出る確率が、罹患に対しては95%、罹患していない人に対しては2%（誤診）とします。この検査で陽性と診断されたとき、実際に罹患している確率はどのくらいでしょうか？

ヒント：95%ではない

# 計算手順

## 1. 確率変数を定義

確率変数 $X$

- $X = a$ : 罹患している
- $X = \bar{a}$ : 罹患していない

確率変数 $Y$

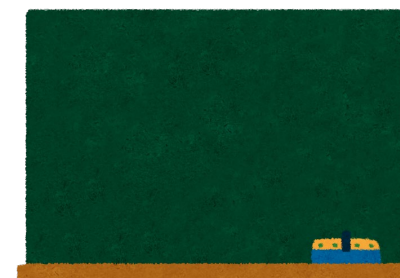
- $Y = b$ : 検査で陽性
- $Y = \bar{b}$ : 検査で陰性

## 2. 既知の情報をまとめる

$$p(Y|X) \quad p(X)$$

## 3. ベイズの定理を使って逆確率を計算

$$p(X|Y)$$



# 罹患している確率4.5%をどう見るか

- ◆ 「95%だと思ってたら実は4.5%！安心！」

$$p(Y = b|X = a) \qquad p(X = a|Y = b)$$

見るべきものが違っただけ  
 ベイズ統計を知らない人はこう考える

- ◆ ベイズ的な見方

検査前  $p(X = a) = 0.1\%$

事前確率 (prior probability)



検査  $Y = a$

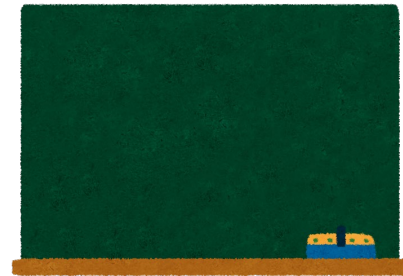
検査後  $p(X = a|Y = a) = 4.5\%$

事後確率 (posterior probability)

検査(観測)で確率が更新された

# なぜ直感とは異なる結果が得られたか

ベイズの定理を図で理解する



# 再考：ベイズの定理

## ベイズの定理

$$p(X|Y) = \frac{p(Y|X)p(X)}{p(Y)}$$

XとYに意味を持たせる

X: モデルパラメータ:  $w$  と表す

Y: 観測データ:  $\mathcal{D}$  と表す

$$p(w|\mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D}|w)p(w)}{p(\mathcal{D})}$$

原因 結果

$w$  を知りたい  
 そのために測定をして  $\mathcal{D}$  を得る

事前確率

prior probability

$p(w)$



事後確率

posterior probability

$p(w|\mathcal{D})$

測定により確率が更新される

# $p(D|w)$ の意味

$p(D|w)$

本来の意味はprobability of  $D$  given  $w$

つまり、モデル $w$ が与えられた下で、測定結果 $D$ が得られる確率

これを $w$ の関数とみる ( $D$ は固定)

このとき $p(D|w)$ を「尤度関数 (likelihood function)」と呼ぶ

測定で得られた $D$ に対して、  
 $w$ の値がどの程度尤もらしいか

注意：確率ではない  
実際、規格化されていない



# 最尤推定 (Maximum likelihood)

Likelihood関数を最大化

$$\mathbf{w}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{w}} p(\mathcal{D}|\mathbf{w})$$

最小二乗法に対応 (次回以降に確認)

$$p(\mathbf{w}|\mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D}|\mathbf{w})p(\mathbf{w})}{p(\mathcal{D})}$$

本来はこれを見るべき

問題点

1. prior probabilityを無視  
ex. 「罹患率」の例題で致命的
2.  $\mathbf{w}$  の分布を無視  
実際は $\mathbf{w}$  は確率として与えられている

# 練習問題：時間があれば

ある夫婦の一人目の子供が女の子だったとします。では二人目も女の子が生まれる確率はどのくらいでしょうか？

ヒント：答えは50%ではない

