平成２１年１０月入学，平成２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
＜一般選抜＞　入学試験問題

【試験科目　専門科目　物理学】

［I］

質量のない２本の棒 a, b が互いにその一端で結び付けられている．棒 a の長さは r で，他端は滑らかな水平面上の原点に固定され，この棒はその周りに一定の角速度 ω で強制的に回転させられている．棒 b の長さは ℓ で，他端には質量 m のおもりが固定され，この棒は水平面上を自由に回転できるものとする． 図のように座標軸をとり，棒 a が x 軸となす角を ωt, 棒 a の延長と棒 b の間の角を θ とする．ただし　t は 時刻 を表わす。

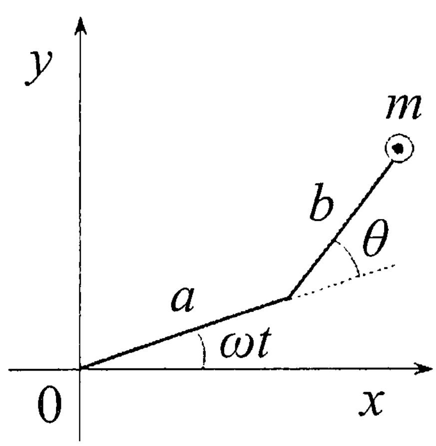
(1)　おもり m の座標 (x, y) を θ の関数としてあらわせ．

(2)　θ を使っておもり m の運動エネルギー T を求めよ．

(3)　θ を一般化座標としてラグランジュ関数 L を求めよ．

(4)　ラグランジュの運動方程式より θ に関する運動方程式を求めよ．

(5)　θ が微小で $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できる場合，θ に関する運動方程式の一般解を求めよ．



平成２１年１０月入学，平成２２年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
＜一般選抜＞　入学試験問題

【試験科目　専門科目　物理学】

[II]

真空中に置かれた，半径 a の２枚の円板を電極とする平行板コンデンサーを考える．図１のように，円板の軸を z 軸とし，電極間の中点が原点Oである xyz 座標を定める．z 軸に沿った電線から電極に電流 $I(t)$ が出入りし，電極に電気量 $Q(t)$ が蓄えられている．ここで t は時刻である．真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0 として，以下の問いに答えよ．ただし，電極の半径 a は電極の間隔に比べて十分に大きく，電極の端の効果は無視できるものとする．

(1) 電極に流れ込む電流 $I(t)$ と電極に蓄えられた電気量 $Q(t)$ の関係式を記せ．

(2) 電極に蓄えられた電気量を Q として，$z=0$ の面における電場の大きさ E を，原点Oからの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の関数として求めよ．さらに，電場 $\vec{E}$ の方向を図を用いて示せ．（$r<a$ だけでなく，$r>a$ の範囲についても解答すること．）

(3) z 軸を中心とする円C上の磁場 $\vec{H}$ を，図２のように，接線成分 $\vec{H}_t$ と法線成分 $\vec{H}_n$ に分けて考えると，法線成分 $\vec{H}_n$ は零である．この理由を説明せよ．

(4) 電極に流れ込む電流を I として，$z=0$ の面における磁場の大きさ H を，原点Oからの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の関数として求めよ．さらに，磁場 $\vec{H}$ の方向を図を用いて示せ．（$r<a$ だけでなく，$r>a$ の範囲についても解答すること．）

(5) 電流の時間変化が $I(t)=I_0\cos(\omega t)$ で与えられるときの，電極間の点 $\mathrm{P}(a/2,0,0)$ における電場の大きさ $E(t)$ と磁場の大きさ $H(t)$ を求め，それぞれを，時間の関数として，グラフで示せ．

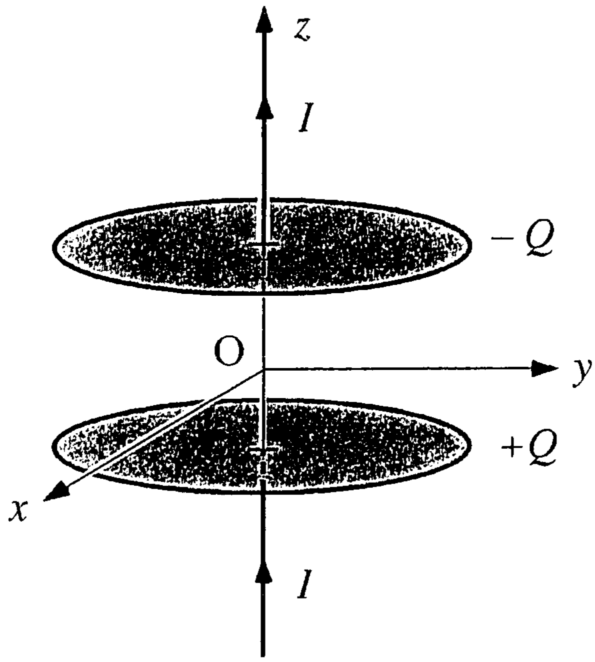


図 1

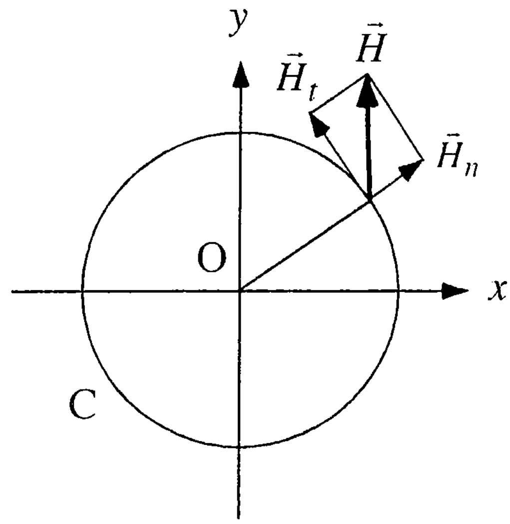


図 2

平成２１年１０月入学，平成２２年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

＜一般選抜＞　入学試験問題

【試験科目　専門科目　物理学】

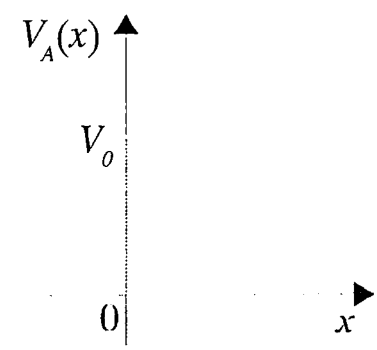
[III]

(1) 図１のようなポテンシャル $V_A(x)$ が存在する１次元空間を質量 m の粒子が運動している．

$$V_A(x)=\begin{cases} V_0 & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

このとき，粒子の波動関数 $\phi(x)$ に対する $x=0$ での境界条件を述べよ．また，そのような境界条件を課す理由を説明せよ．

図1



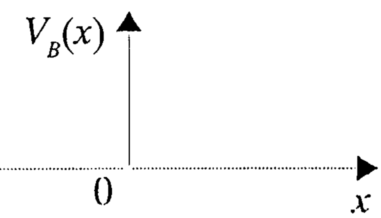
(2) このポテンシャル $V_A(x)$ のもとで $x=-\infty$ から粒子が入射する場合を考える．シュレディンガー方程式を問(1)の境界条件のもとで解き，$x\geq 0$，$x<0$ のそれぞれの領域における波動関数を求めよ．ただし，入射粒子の波動関数を $Ae^{ipx/\hbar}$ とする．$p<\sqrt{2mV_0}$ であり，A は規格化定数，$h=2\pi\hbar$ はプランク定数である．

(3) 次に，図2のようなポテンシャル

$$V_B(x)=-V_0\delta(x)$$

が存在する１次元空間での質量 m の粒子の運動を考える．ただし，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数であり，$V_0>0$ である．この場合，ポテンシャルの関数形が特異であるため，問(1)で行った境界条件の考察をそのまま当てはめることはできない．そこで，シュレディンガー方程式の両辺を $x=0$ を含む非常に狭い領域 $(-\epsilon,\epsilon)$ で積分することにより，粒子の波動関数 $\phi(x)$ の１次微係数が満たすべき境界条件を導け．ただし，ϵ は正の無限小の数である．

図２



(4) このポテンシャル $V_B(x)$ による粒子の束縛状態の固有エネルギー E を求めよ．

平成２１年１０月入学，平成２２年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

＜一般選抜＞　入学試験問題

【試験科目　専門科目　物理学】

[IV]

粒子数Nが一定である気体について考えよう．気体の絶対温度をT，圧力をP，体積をV，エントロピーをSの記号で示すことにする．

(1) 熱力学の第一法則から，気体の内部エネルギーEの変化量は$dE = TdS - PdV$で与えられる．このdEの式において右辺の各項の物理的意味をそれぞれ説明せよ．

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー$F = E - TS$の変化量dFを計算し，$\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$と$\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$の関係が成り立つことを示せ．

(3) マクスウェルの関係式として$\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$の関係が成り立つことを導出せよ．

つぎに，N個の質量mの質点からなる理想気体が体積Vの箱の中に閉じ込められている系を考えよう．$N >> 1$であるとして，この系を古典統計物理学の立場からカノニカル分布で扱う．なお，N個の質点の３次元空間の位置座標は$q_1, q_2, \ldots, q_{3N}$，運動量は$p_1, p_2, \ldots, p_{3N}$とする．

(4) この系のハミルトニアンは$H = \displaystyle\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$であることを考慮して，分配関数

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \cdots \int e^{-\frac{H}{kT}} dq_1 \cdots dq_{3N}\, dp_1 \cdots dp_{3N}$$

を計算せよ．ここでkはボルツマン定数，hはプランク定数であり，積分公式$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$を用いて良い．

(5) 分配関数よりヘルムホルツの自由エネルギーFを求めよ．答は，スターリングの公式の近似 $\log N! \sim N \log N - N$を用いた形で答えよ．

(6) $\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T$を計算することにより，気体の状態方程式を導出せよ．

(7) FからエントロピーS，および，内部エネルギーEを求めよ．