平成２０年１０月入学，平成２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

入学試験問題

【一般選抜】

【試験科目：物理学】

[I]

図のように支点から重心までの距離がどちらも ℓ である，質量 M の鉛直平面内を運動する単振子と物理振子を考える．ただし，単振子の糸と，物理振子の支点と剛体を結ぶ棒は質量が無視でき，鉛直下方から測った振れ角 θ は 3° 未満程度で $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できる．また，物理振子の剛体は半径 a の一様な球で，その重心を通る軸の周りの慣性モーメントは $\frac{2}{5}Ma^2$ であり，棒との接合部は図のように固定されて，常に棒の延長上に剛体の重心があるように振動する．糸の伸び，空気による影響は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　単振子の運動方程式を導き出し，その周期を求めよ．

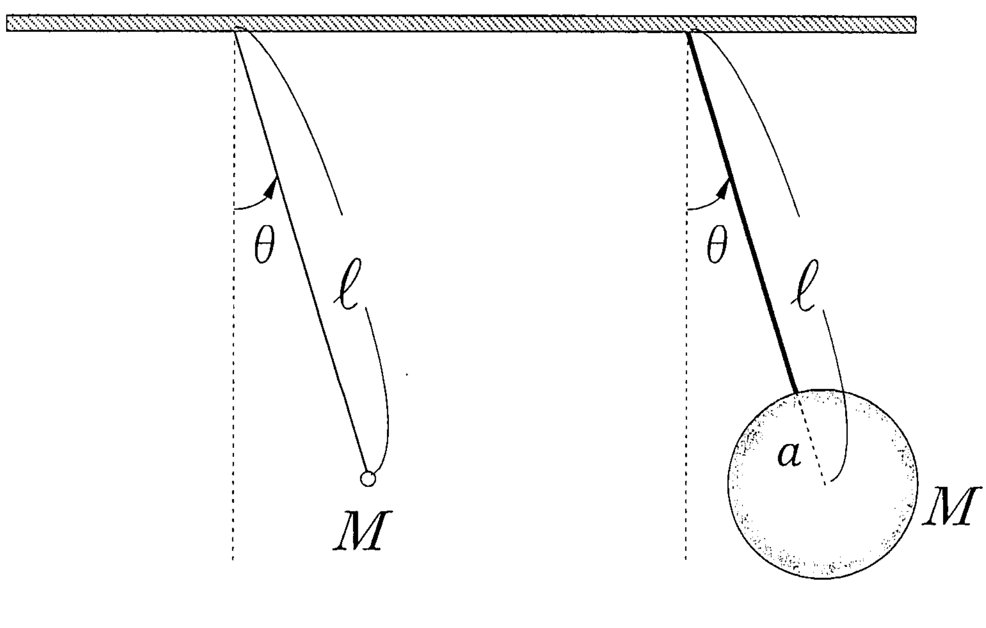
(2)　支点を通り紙面に垂直な軸の周りの物理振子の慣性モーメント I を求めよ．

(3)　物理振子の運動方程式を導き出し，その周期を求めよ．

(4)　(1), (3) よりどちらの周期が長くなるか？また，その原因をできるだけ具体的に説明せよ．

(5)　単振子について，質点に対する運動エネルギー T と位置エネルギー U を求め，θ を一般化座標としてラグランジュ関数 L を求めよ．

(6)　単振子について，質点の θ に関する運動方程式をラグランジュの運動方程式より求めよ．



平成２０年１０月入学，平成２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
入学試験問題

【一般選抜】
【試験科目：物理学】

[II]

（１）半径Rの球形原子核が全電荷Qをもち，電荷は核内に一様分布しているものとする．
(i) 半径$r(<R)$の球内にある電荷Q_1を求めよ．
(ii) 半径rと$r+dr$の球殻にある電荷Q_2を求めよ．
(iii) 厚さdrを半径rの球に付加することによるポテンシャルエネルギーの増加dEを求め，これを半径$r=0$から$r=R$まで積分することにより原子核のポテンシャルエネルギーをRとQで表せ．

（２）図１のように立方体の一つの面の稜（縁）ABCDA に沿って流れる電流Iが，立方体の中心に大きさB_0の磁場をつくった．同じ立方体に図２に示すような径路で電流Iを流すと，立方体の中心にはどの方向にどのような大きさの磁場が生じるか説明せよ．

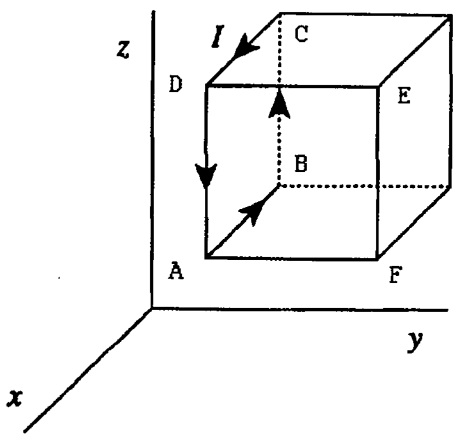


図１

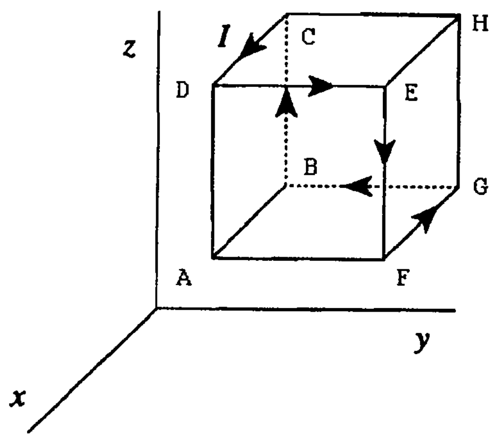


図２

平成２０年１０月入学，平成２１年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）

入学試験問題

【一般選抜】

【試験科目：物理学】

[III]

ベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})=(-\frac{B}{2}y,\frac{B}{2}x,0)$ の中を運動する荷電粒子(質量 m，電荷 q，位置座標 $\vec{r}$)のラグランジュ関数は $L=\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2+q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$ で与えられる．ただし，B は定数であり，$\vec{r}=(r_x,r_y,r_z)=(x,y,z)$ および $\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ である． $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ であり， h はプランク定数である．

(1) $\vec{A}(\vec{r})$ による磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ を求めよ．

(2) 一般化座標として $\vec{r}$ を選ぶとき，一般化運動量 $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)$ を求めよ．
また，L をルジャンドル変換することにより，この荷電粒子のハミルトニアン H が
$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-q\vec{A})^2$ となることを示せ．

(3) 以後は，交換関係 $[p_j,r_k]=-i\hbar\delta_{jk}$ ，$[p_j,p_k]=0$ ，$[r_j,r_k]=0$ 　$(j,k=x,y,z)$ を導入して量子力学的に取り扱うこととする．
演算子 $\vec{\pi}=\vec{p}-q\vec{A}$ を導入するとき，$\vec{\pi}$ の各成分間にはどのような交換関係が成り立つか調べよ．

(4) $\pi^{\pm}=\pi_x\pm i\pi_y$ (複合同順)を導入するとき，交換関係 $[\pi^-,\pi^+]$ を求めよ．
また， π^+,π^-,π_z を用いてハミルトニアン H を書き換えよ．
このハミルトニアンより，粒子の xy 面内における運動，及び z 方向の運動の特徴について説明せよ．

(5) ハミルトニアン H の固有エネルギーを求めよ．

平成２０年１０月入学，平成２１年４月入学
大学院自然科学研究科 博士前期課程　数理物理科学専攻（物理学系）
入学試験問題

【一般選抜】
【試験科目：物理学】

[IV]

２次元平面にとじこめられた中性原子 ^{3}He のモデルとして，スピン$\frac{1}{2}$の相互作用をしないフェルミ粒子系を考えよう．低温における定積比熱を次の手順で求めよ．ただし，^{3}He の質量をm，平面の面積をS，粒子数をNとする．また $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ で，hはプランク定数である．

（1）　この系のフェルミ波数k_FとフェルミエネルギーE_Fを求めよ．

（2）　状態密度$D(E)$はエネルギーEに依存せず$D(E) = \dfrac{mS}{\pi\hbar^2}$　($E \geq 0$)で与えられることを示せ．

（3）　絶対零度での系のエネルギーは$\frac{1}{2}N E_F$であることを示せ．

（4）　低温における系のエネルギーを求めるためにフェルミ分布関数$f(E)$を次のように近似する．

$$f(E) = \begin{cases} 1 & (E-\mu \leq -2k_BT) \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{E-\mu}{4k_BT} & (-2k_BT \leq E-\mu \leq 2k_BT) \\ 0 & (2k_BT \leq E-\mu) \end{cases}$$

このとき化学ポテンシャルμは温度Tに依存せずE_Fに等しいことを示せ．なお，k_Bはボルツマン定数である．

（5）　以上より，温度Tでの系のエネルギー および 定積比熱を求め，定積比熱が粒子数Nに依らないことを示せ．