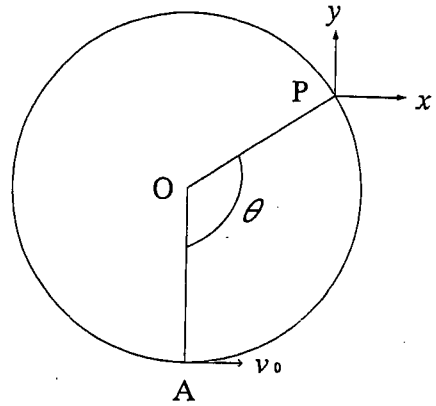


(試験問題 物理学)

[I]

滑らかな内面をもつ半径 r の鉛直な円筒の最低点 A から、その内側に沿って質点を放射する。質点が円を離れた後、ちょうど円の中心 O を通過して落下するようになりたい。与えべき放射の初速度 v_0 を求めよ。ただし、図のように、質点が円から離れる時の点を P とし、 OP が鉛直下方 OA となす角を θ 、その時の速度を v とし、次の手順に従って求めよ。

1. 点 P での質点の接線方向と法線方向の運動方程式を記述せよ。
2. 接線方向の運動方程式の両辺に $2v = 2r \frac{d\theta}{dt}$ をかけて積分し、 v と θ の関係式を求めよ。
さらに、 v_0 と θ の関係式を求めよ。
3. 質点が点 P で円筒から離れ、中心点 O を通る条件の式を求めよ。
4. 初速度 v_0 を求めよ。



[II]

1. 以下のベクトル解析の公式を証明せよ。

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

2. 電磁場に関する以下の問いに答えよ。誘電率を ε , 透磁率を μ とする。

(a) マクスウェル方程式を書け。

(b) マクスウェル方程式から, 電荷保存則 $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ を導け。

(c) マクスウェル方程式を, ベクトルポテンシャル \mathbf{A} , スカラーポテンシャル ϕ を用いて書き直せ。

(試験問題 物理学)

[III]

物理学ではエルミート演算子, エルミート行列は重要な役割を演じる。以下, それらの性質について考えよう。

1. 次の行列に対し, エルミート共役な行列を書け。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 2i & 0 & 1 \\ i & 2-3i & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. 次の2つのエルミート行列について以下の問いに答えよ：

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- (a) 上記エルミート行列の交換関係、 $[\sigma^x, \sigma^y]$ を求めよ。
(b) 各行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。
(c) 各固有ベクトルが互いに直交することを示せ。
3. エルミート演算子の固有値は実数であることを証明せよ。
4. エルミート演算子の固有関数は互いに直交することを証明せよ。
5. H をエルミート演算子とする時, 次の演算子 $U = \exp(iH)$ がユニタリ演算子となることを示せ。

(試験問題 物理学)

[IV]

おのおのの粒子は $-\varepsilon_0, \varepsilon_0$ の二つのエネルギー準位しか取り得ない N 個の独立な粒子から成る系を考える。

この系をミクロカノニカル分布での等重率の原理により考える場合について、以下の問いに答えよ。

1. 全エネルギーが $E = M\varepsilon_0$ であるとき ($M = -N, \dots, N$), $-\varepsilon_0$ の準位を占有する粒子数 N_- と ε_0 の準位を占有する粒子数 N_+ を N と M を用いて表し、これから、 $E = M\varepsilon_0$ である状態の状態数 (熱力学的重率) W_M を求めよ。
2. W_M より系のエントロピー S を求めよ。ボルツマン定数を k_B とし、スターリングの公式 $\ln x! \sim x \ln x - x$ を用いた結果を答えること。 N, N_+, N_- は十分に大きな値であるとする。
3. $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ として統計力学的温度 T を定義するとき、全エネルギー E を求めよ。答えは T, N, ε_0, k_B を用いて表せ。ここでは、 $E < 0$ の範囲で考えるものとする。

次いで、この系が温度 T に保たれているとしてカノニカル分布で考える場合について以下の問いに答えよ。

4. 1つの粒子に関する分配関数 Z_1 および全系の分配関数 Z_N を求めよ。
5. Z_N より、ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
6. F または Z_N より内部エネルギー $\langle E \rangle$ を求め、3. で得た E に一致することを示せ。
7. 比熱 C を求めよ。答えは T, N, ε_0, k_B を用いて表せ。