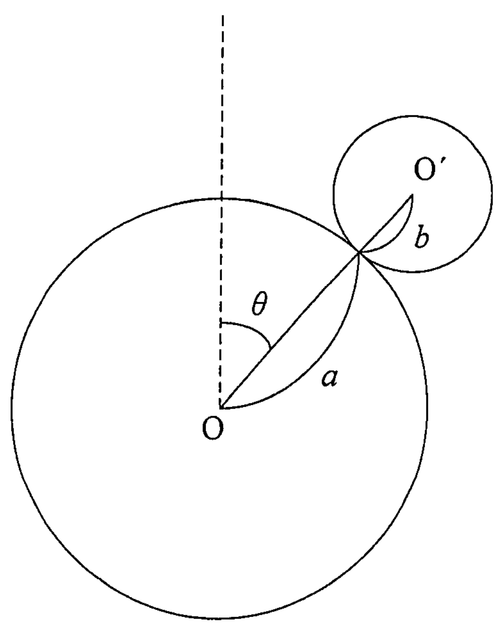
平成２０年度　数理物理学専攻　物理系入学試験問題
(平成１９年１０月入学　数理物理学専攻　物理系入学試験問題)
(試験問題 物理学)

[Ｉ]

固定されている半径 a の大きな球の上を滑らずに転がる半径 b，質量 M の一様な小さな球がある。大きな球と小さな球の中心をそれぞれ，O，O′とし，O，O′が鉛直方向となす角 θ とする。大きな球の頂上に小さな球をのせ静かに手を離して転がすと，両球はどこで離れるか。離れるときの角度を次の手順で求めよ。なお，小さい球に働く摩擦力を F，抗力を N，重力の加速度を g とせよ。

1. 小さな球の重心の運動方程式を接線成分，法線成分について記述せよ。
2. 点 O′ を通る水平軸の周りの小さな球の角速度を ω，慣性モーメントを I_G として，小さな球の重心のまわりの回転の運動方程式を記せ。
3. 小さい球が大きい球の面に沿って回転し，滑らずに転がるという条件を求めよ。
4. 得られた式を整理して，小さな球が受ける抗力を角度 θ で表せ。但し,慣性モーメント I_G を半径 b, 質量 M の式に置き換えること。式の導出過程は要らない。
5. 小さな球が離れる時の $\cos\theta$ の値を求めよ。



平成２０年度　　数理物理学専攻　物理系入学試験問題
（平成１９年１０月入学　数理物理学専攻　物理系入学試験問題）
（試験問題　物理学）

[II]

1. 静電場に関する以下の問いに答えよ。真空の誘電率をε_0とする。

(a) 半径aの導体球Aと内半径b，外半径cの導体球殻Bが同心に固定されている。導体球Aに正電荷Qを与えた時，各領域での電位を求めよ。ただし，空間は真空であり，無限遠を電位の基準とせよ。

(b) 半径がaとb ($a<b$)で，長さhの２つの円筒が中心軸を一致させて置かれている。この円筒の間に電気伝導度σの電解質溶液を満たし，内外の側面を正負の電極として電流を流したとき，２つの円筒の間の電気抵抗Rを求めよ。

2. 静磁場に関する以下の問いに答えよ。真空の透磁率をμ_0とする。

(a) ベクトルポテンシャル$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\displaystyle\int_C \frac{d\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$を導入する。($C$: 電流$I$が流れる経路，$\vec{r'}$: 経路上の位置ベクトル。) この時，$\vec{A}(\vec{r})$を利用して磁束密度$\vec{B}(\vec{r})$を導け。（ビオ・サバールの法則）

(b) $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\cdot\nabla\times\vec{A}(\vec{r}) = 0$が成り立つことを示せ。

(c) ここで，無限に長い直線状導線に電流を流す。電流Iが導線から距離R離れた地点に作る磁束密度をビオ・サバールの法則を用いて求めよ。

次に，直線導線の長さが有限 (長さ$2a$) の場合を考える。

(d) 導線はz軸と平行とし，導線の中点を原点Oとした時，電流Iによる導線からの位置$\vec{r}=(x,y,z)$でのベクトルポテンシャルを求めよ。

(e) $\vec{B}(\vec{r})$をベクトルポテンシャルから求め，$a\to\infty$の時，設問(c)の結果と等しくなることを示せ。

平成20年度　数理物理科学専攻　物理系入学試験問題
（平成19年10月入学　数理物理科学専攻　物理系入学試験問題）

（試験問題　物理学）

[III]

量子力学では，状態と物理量を区別して考える。状態を表現する波動関数 $\psi(x,t)$ は次の time-dependent Schrödinger equation に従って時間変化する。

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\psi(x,t)\rangle = \mathcal{H}|\psi(x,t)\rangle \tag{1}$$

ただし，$\mathcal{H}$ は系のハミルトニアンである。

1. 式（1）にエルミート共役な式を書け。

2. 次式で与えられる波動関数のノルムの2乗は時間によらないことを示せ。

$$\|\psi(x,t)\|^2 = \langle\psi(x,t)|\psi(x,t)\rangle \tag{2}$$

3. 今，系を次式のハミルトニアンで記述される1次元調和振動子とする。

$$\mathcal{H} = \{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}fx^2\} \tag{3}$$

その time-independent Schrödinger equation が次のように解かれているものとする。

$$\mathcal{H}|\phi_n(x)\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|\phi_n(x)\rangle, (n=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

波動関数の初期状態 $\psi(x,t=0)$ が，上記ハミルトニアンの最低固有値 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ とその次の固有値 $\frac{3}{2}\hbar\omega$ に属する規格化された波動関数 $\phi_0(x),\phi_1(x)$ を用いて次のように書かれている。

$$|\psi(x,t=0)\rangle = C_0|\phi_0(x)\rangle + C_1|\phi_1(x)\rangle \tag{5}$$

以下の問いに答えよ。

(a) 時刻 t における波動関数 $|\psi(x,t)\rangle$ が次式で書かれることを示せ。

$$|\psi(x,t)\rangle = C_0e^{-i\omega t/2}|\phi_0(x)\rangle + C_1e^{-3i\omega t/2}|\phi_1(x)\rangle \tag{6}$$

(b) その状態を用いてエネルギー およびその2乗の期待値 $< E >, < E^2 >$ を計算せよ。

(c) また同様に，位置座標 およびその2乗の期待値 $< x >, < x^2 >$ を計算せよ。ただし，$\phi_0(x),\phi_1(x)$ は次式を満たす。

$$x|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}|\phi_1(x)\rangle, \tag{7}$$
$$x|\phi_1(x)\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}(|\phi_0(x)\rangle + |\phi_2(x)\rangle) \tag{8}$$

3 /

平成２０年度　　数理物理学専攻　物理系入学試験問題
（平成１９年１０月入学　数理物理学専攻　物理系入学試験問題）
（試験問題　物理学）

[IV]

磁性体を，現象論的に，ギンツブルグ・ランダウの自由エネルギー

$$G(m)=\frac{1}{2}a_0(T-T_c)\,m^2+\frac{1}{4}b\,m^4-Hm-cT$$

のモデルで考える。a_0, b, c, T_cは正の定数である。温度 T と磁場 H が指定されたときに $G(m)$ の最小値を与える m がこの系の磁化 $M(T,H)$ となり，この $G(m)$ の最小値がギブスの自由エネルギー $G(T,H)$ である。

まず，$H=0$ の場合を考える。

１．磁化 $M_0(T)\equiv M(T,H=0)$ を温度 T の関数として求めよ。そして，$M_0(T)$ のふるまいを T の関数としてグラフに描け。

２．ギブスの自由エネルギー $G(T,H=0)$，および，エントロピー $S(T)$ を温度 T の関数として求めよ。

３．比熱 $C(T)$ を温度 T の関数として求めよ。そして，$C(T)$ のふるまいを T の関数としてグラフに描け。$T=T_c$ での比熱のとびの大きさも答えよ。

次いで，微小な磁場 H がかけられている場合を考える。

４．$M(T,H)=M_0(T)+\chi H$ とおいて，帯磁率 $\chi(T)$ を求めよ。そして，$\chi(T)\propto|T_c-T|^{-\gamma}$ の臨界指数 γ の値を答えよ。$T>T_c$ と $T<T_c$ のそれぞれの場合について答えること。

５．$T=T_c$ の時の磁化 $M(T_c,H)$ を求めよ。そして，この時の磁化曲線の立ち上がり $M(T_c,H)\propto H^{1/\delta}$ の臨界指数 δ の値を答えよ。