平成１９年度　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題（第二次）

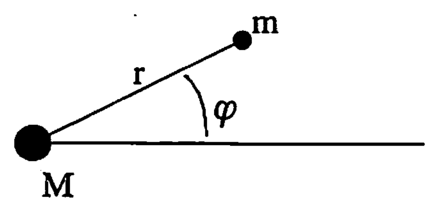
[I]

星に対する人工衛星の運動を考える。星の質量をM、人工衛星の質量をｍとする。ここで M>>m なので運動の原点を星の中心にとる。星と人工衛星の中心間の距離をｒとし万有引力定数をＧとする。

(1) 人工衛星に対する星からの重力ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。ただし $U(\infty)=0$ とする。

(2) 人工衛星はある平面上を運動するがその理由を述べよ。ただし人工衛星の運動はｒ方向ではない。

この運動を調べるために平面曲座標を用いる。
$R = (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
の関係がある。



(3) 角運動量ベクトルの z成分 Lz について、r, φ を用いて示せ。

(4) (3)の式は運動のどのような特徴を表すか述べよ。

(5) 人工衛星の運動エネルギーを r, φ を用いて示せ。

(6) 全エネルギーE（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）についてLz を含む形で示せ。

(7) ある条件が満たされる時、人工衛星は星の重力ポテンシャルに捕らわれ星から飛び去らなくなる。この条件について(6)の式を基にして、図を描きながら述べよ。

[II]

以下の問いで電場と磁場の対応について双極子モーメントを通じて考察しよう。

(1) 点電荷 q と $-q$ が、それぞれ $(0,0,\frac{d}{2})$ と $(0,0,-\frac{d}{2})$ に存在すると、電気双極子モーメントは $\bar{m}=(0,0,qd)$ で表せる。この電気双極子モーメントが位置 $\bar{r}=(x,y,z)$ に作る静電ポテンシャル ϕ を求めよ。ただし、真空の誘電率は ε_0 であるとし、$|\bar{r}|>>d$ の近似を用いよ。

(2) 上記の電気双極子が作る電場 $\bar{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を求めよ。

(3) 電流 I が半径 R の円周上を流れている。この円環は xy 平面上にあり、その中心は原点である。電流 I が位置 $\bar{r}=(x,y,z)$ に作るベクトル・ポテンシャル $\bar{A}$ を計算せよ。真空の透磁率は μ_0 であるとし、ベクトル・ポテンシャルは $\bar{A}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{c(\text{電流経路})}\frac{Id\bar{s}}{|\bar{r}-\bar{s}|}$ で表される。また、$|\bar{r}|>>R$ の近似を用いよ。

(4) (3)の円電流が作る磁場 $\bar{B}=(B_x,B_y,B_z)$ を求めよ。

(5) (1)~(4)の結果を踏まえて、円電流に対する磁気双極子モーメントを求めよ。

[III]

粒子の質量m，角振動数ωの一次元調和振動子を考える。系は，量子力学に従うものとする。$\hat{x}$を座標演算子，$\hat{p}$を運動量演算子とすると，ハミルトニアン$\hat{H}$は，

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる。ここで $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ および $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}$ を導入して，消滅演算子 $\hat{a} = \left(\hat{X} + i\hat{P}\right)/\sqrt{2}$ および生成演算子 $\hat{a}^\dagger = \left(\hat{X} - i\hat{P}\right)/\sqrt{2}$ を定義する。

(1)　正準交換関係を用いて，交換関係$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$を求めよ。

(2)　粒子数演算子を$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$とするとき，ハミルトニアンは$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$と表せることを示せ。

(3)　粒子数演算子$\hat{N}$のn番目$(n = 0,1,2,\ldots)$の規格化された固有状態を$|n\rangle$とする。$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$を満たすエネルギー固有値$E_n$を求めよ。

(4)　調和振動子の基底状態$|0\rangle$は，$\hat{a}|0\rangle = 0$を満たす。座標表示における基底状態の波動関数$\varphi_0(X) = \langle X|0\rangle$について微分方程式を解いて，規格化された解を求めよ。必要ならば，次のガウス積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\alpha x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{ただし}\alpha > 0)$$

(5)　交換関係$\left[\hat{N},\hat{a}\right] = -\hat{a}$を用いて，$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$を証明せよ。同様に，$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$を示すことができる。これらの結果をまとめて，演算子$\hat{N}$，$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$の物理的な意味について記述せよ。

[IV]

磁場 H の方向に値 $g\mu_B m$ (磁気量子数 $m = J, J-1, J-2, \cdots, -J+1, -J$) だけをもち得る磁気モーメントがある．ここで g は Lande 因子，μ_B は Bohr 磁子，J は全角運動量の大きさである．単位体積中にこのような磁気モーメント N 個を含む物質を考える．ただし，磁気モーメント間には相互作用はないものとする．ゼーマン効果による，系のエネルギーは $-g\mu_B mH$ から求めることができる．カノニカル集団の方法を用いて，以下の問いの答えよ．

(1) この系の状態和を計算し，

$$[\sinh \beta g\mu_B H(\frac{2J+1}{2})/\sinh \frac{1}{2}\beta g\mu_B H]^N$$

となることを示せ．

(2) $J = 1/2$ として，２準位系を考えよう．この系の平均エネルギー，比熱，自由エネルギー，エントロピー，磁化を求めよ．比熱の温度変化を図示し，その振舞いを物理的に説明せよ．