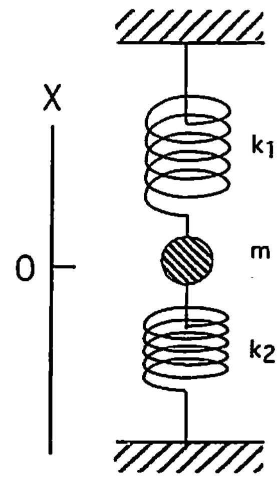
平成１９年度　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題

（平成１８年１０月入学　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験問題　物理学）

[1] 二つのバネに挟まれて鉛直に吊るされている質点を考える。二つのバネの端は固定されている。質点の質量は m であり二つのバネの定数をそれぞれ k_1, k_2 とする。質点は鉛直方向にしか動かず，x 座標軸を図のように鉛直方向にとり平衡の位置を座標原点とする。バネの質量は無視し摩擦は無い。



(1) 平衡の位置付近での運動を考える。

(A)この質点が置かれているポテンシャルを図で表せ。

(B)この質点の振動時の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを示せ。

(C)ラグランジュアンを求めよ。

(D)質点の運動方程式を導け。

(E)運動の固有振動数ω_0を示せ。

(2) つぎにこの質点に鉛直方向の外力 $f\sin(\omega t)$ を働かせる。

(A)質点の運動方程式を示せ。

(B)外力の周波数ωを充分高い値から下げた場合のω_0付近での運動の振る舞いを考える。$\omega > \omega_0$の範囲では、運動の振幅と、外力と質点の運動の位相関係はどの様な関係に変化するか述べよ。

[II] 図１のように、xy 平面上（$z=0$）に金属板がある。電流が金属板の中を一様に流れており、金属板の周辺に電磁波が誘導される。以下の問いでは、$z>0$ の領域で z 軸の正方向に伝播する電磁波について考察する。ただし、金属板は無限に広がっており、金属板の端の効果は無視できるものとする。また金属板以外の空間は真空であり、真空の誘電率、透磁率はそれぞれε_0、μ_0とする。

(A)　図２のように、交流電流（電流の線密度 $i=i_0\cdot\cos(\omega t)$）が x 軸方向に沿って流れている時、金属板のすぐ傍に発生する磁束密度 B_y を求めよ。ただし、幅が Δy である金属板の部分（破線内の金属板）を通る電流の値は、$I=i\cdot\Delta y$（i は電流の線密度）で与えられるとする。また金属板の厚さは十分薄く、無視できるものとする。

(B) 任意のベクトル $\vec{A}$ について、$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A})-\Delta\vec{A}$ が成り立する事を利用して、真空中における Maxwell 方程式（$\mathrm{div}\vec{D}=0$, $\mathrm{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\mathrm{div}\vec{B}=0$, $\mathrm{rot}\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$）から、波動方程式を導きなさい。ただし、$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}, \vec{B}=\mu_0\vec{H}$ とし、光速は c とする。

(C) 電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の角振動数がωであり、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ が x および y に依存しない時、波動方程式から $\vec{E}$ および $\vec{B}$ がどのような関数になるかを述べよ。

(D)　(A)～(C)の結果から、z 軸方向に伝播する電磁波の磁束密度 $\vec{B}$ と電場 $\vec{E}$ を求めよ。

(E) ポインティング・ベクトル（$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$）と、単位体積当たりの電磁場のエネルギー（$(\vec{E}\cdot\vec{D})/2+(\vec{B}\cdot\vec{H})/2$）の時間平均を計算せよ。また、ポインティング・ベクトルの意味を説明せよ。

図1

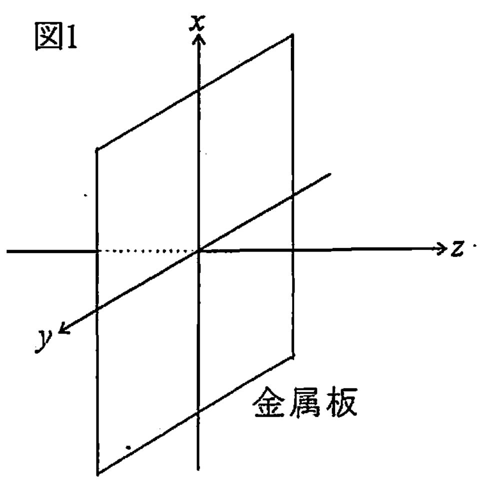
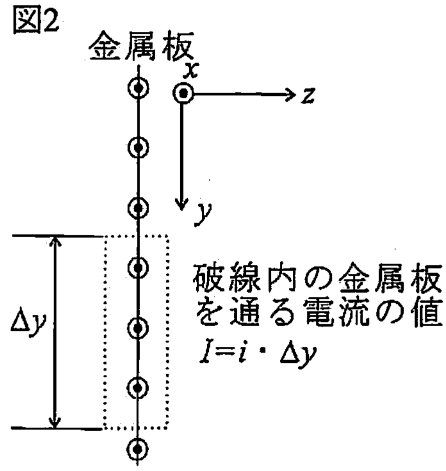


図2



平成１９年度　　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題

（平成１８年１０月入学　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験問題　物理学）

[III]

O.Stern と W.Gerlach は、1922 年にドイツのフランクフルトで有名な実験を行った。図１に示すように銀原子を炉の中で熱して、スリットを通して勾配を持つ不均一な磁場中を通過させた。銀原子の磁気モーメントは、その他の電子のスピンは相殺するので、最外殻の電子一個に等しい。粒子の磁気モーメントと磁場の相互作用により、ビームはスクリーン上で連続とならず、２つに分かれた。これは、スピン角運動量の量子化を示す重要な結果である。

（１）パウリ行列$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$を導入する。電子のスピン角運動量演算子$\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$は、$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$と表すことが出来る。

(A) 交換関係$[S_x, S_y]$を求めなさい。S_xとS_yは両立できる観測量かどうか述べなさい。

(B) 演算子S_xとS_zがそれぞれ固有値$\pm\hbar/2$を持つとして、各々の規格化された固有ベクトルを求めなさい。

(C) 演算子$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle$を考える。$(\Delta A)^2$の期待値すなわち分散は、$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$で与えられる。系が$S_z$の固有状態にあり、その固有値が$+\hbar/2$の時、$S_x$と$S_z$それぞれの分散を計算しなさい。

（２）勾配を持つ不均一磁場$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 + zB')$中を運動する質量$m$、運動量$\boldsymbol{P}$の粒子を考える。磁場$\boldsymbol{B}$と磁気モーメント$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e c}\boldsymbol{S}$の相互作用エネルギー$V$は、$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$である。ここで$m_e$は電子の質量とする。

(A) 粒子のハミルトニアンHを書き下しなさい。また、状態$|\psi(t)\rangle$に対して時間に依存するシュレディンガー方程式を書きなさい。

(B) 粒子が磁場から受けるz方向の力F_zをS_zの固有値を用いて表し、Stern-Gerlach 実験の原理について述べなさい。

（３）Stern-Gerlach 実験で、$x(z)$軸方向に磁場をかけてビームを２つに分ける装置を S-G(x)装置(S-G(z)装置)と呼ぶことにする。図２に示すように、最初の S-G(x)装置でS_xの固有状態が$-\hbar/2$の成分を選び、次に S-G(z)装置を用いてS_zの固有状態が$+\hbar/2$成分を取りだし、最後に再び S-G(x)装置を通したとする。

(A) 最後の装置の後、S_xの固有状態が$-\hbar/2$である確率を求めなさい。

(B) 求めた結果が示唆する物理的な意味について記述しなさい。

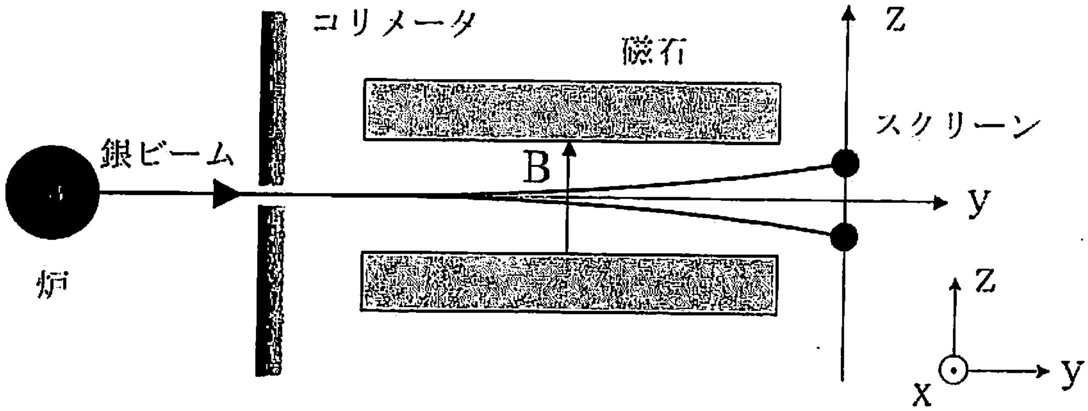


図１. Stern-Gerlach 実験装置

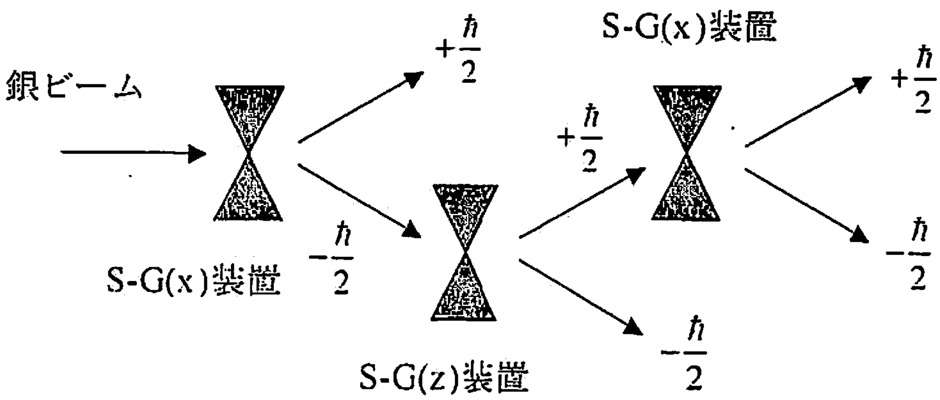


図２. 一続きの Stern-Gerlach 実験

平成１９年度　　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題

（平成１８年１０月入学　数理物理学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験問題　物理学）

[IV]

3 次元調和振動子ポテンシャル $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$ に閉じこめられている N 個の自由ボーズ粒子を考える．ここで粒子の質量を m、角振動数を ω とする．以下の設問に答えよ．

(1) この系の密度分布を古典統計に基づいて求めよ．

(2) 次に量子統計に基づいて以下に答えよ．この系の一粒子固有値は $\epsilon(n_x,n_y,n_z) = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega$ で与えられる．　n_x, n_y, n_z はゼロまたは正の整数である．この系のボーズ・アインシュタイン凝縮温度 T_c を次の手順に従って求めよ．

(A) この系のあるエネルギー E までに存在する状態数が $\dfrac{E^3}{6(\hbar\omega)^3}$ であり，状態密度が $\dfrac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}$ であることを示せ．

(B) 全粒子数 N を求める式をボーズ分布関数を用いて表せ．

(C) N を大きいとして固有値の和を積分におきかえて（B）の表式を簡単化せよ．

(D) 凝縮温度 T_c を求めよ．

ただし、途中で出てくる積分 $\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t-1}dt = \zeta(n)\Gamma(n)$ を証明しつつ用いること．ここで $\Gamma(n) = \int_0^\infty dy y^{n-1}e^{-y}$ はガンマ関数，$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n} = \frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$ はツェータ関数である．ガウス積分が $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ であることを用いてもよい．