平成１８年度　　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[I]

図のように、糸の長さ l、鉛直に対する傾き θ、質点の質量 m の単振り子が、水平 y 軸上を静止原点 O から $S=S(t)$ に従って動く支点 O' に取り付けられているときの運動について考える。糸の質量と伸び、たわみ、および空気による影響は無視できるものとする。また、重力加速度を g とする。

(1) 単振り子の先端の質点の座標を、静止 O 系ではデカルト座標 (x, y) で、動く O' 系では極座標 (r, θ) で記述するとき、(x, y) と $(r=l, \theta)$ の間の関係式を求めよ。

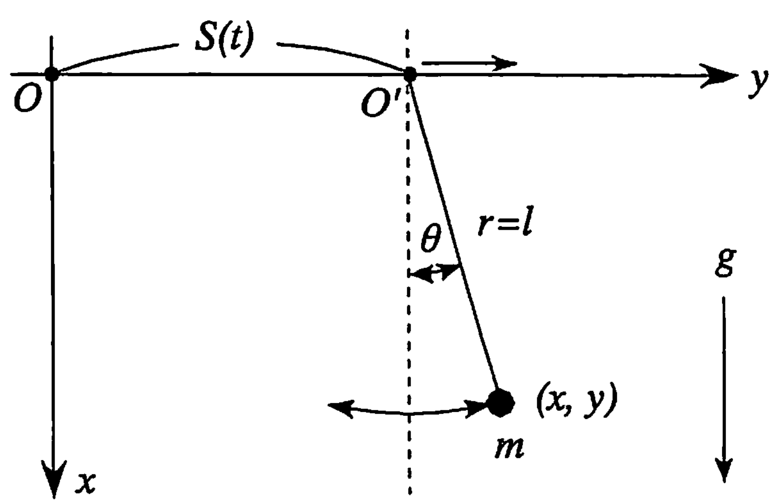
(2) 質点に対する運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を求め、ラグランジュアン L を θ の関数として示せ。

(3) 質点に対する角度方向 θ に関する運動方程式をラグランジュ方程式により求めよ。

振れの角度 θ が小さいとき、$\sin\theta=\theta$、$\cos\theta=1$ として以下の設問に答えよ。

(4) $S(t)=S_0 t$ （S_0 は定数）のときの運動方程式を解き、θ を t の関数として求めよ。

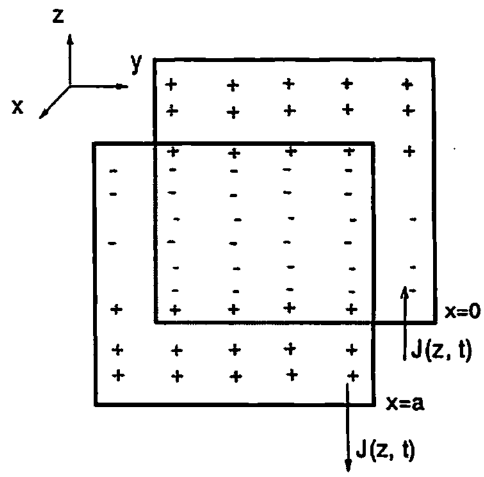
(5) $S(t)=S_0\cos\omega_0 t$ （S_0 は定数、$S_0\neq 0$）のときの運動方程式を解き、θ を t の関数として求めよ。また、ω_0 が $\omega\,(=\sqrt{g/l})$ に近くなったときの運動について考察せよ。



平成１８年度　　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[II]



図のように x=0, x=a で表される導体平面に、z 軸に平行に振動数ω の交流電流が流れている。（電流の向きは時間 t とともに z 方向と-z 方向の間で周期的に変化している。）y 方向単位長さあたりの電流 $J(z, t)$は、x=0、x=a のそれぞれの平面で

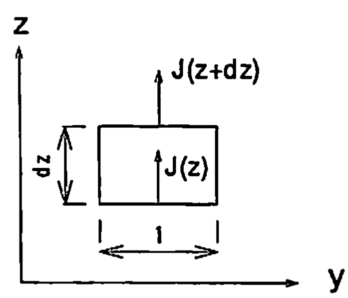
$J(z,\ t)=J_0\cos(\omega t - kz)$　　(x=0)、

$J(z,\ t)= - J_0\cos(\omega t - kz)$　　(x=a)

と表せるとする。このとき、平面には電荷が分布するが、その電荷面密度をσ (z, t) とする。

導体平面は無限に広く厚みは無視する。また導体平面の電気抵抗は十分小さいとする。

(1) 一般に電荷密度ρ と電流密度 i の間には電荷の保存則（連続の式）が成立する。その関係式をかけ。また、この問題では電荷密度はσ (z, t)、電流密度は $J(z, t)$であり、場所 z と時間 t の関数である。σ (z, t) と $J(z, t)$ の間にある電荷保存則の関係式はどう書けるか。



(2) x=0 での平面内に右図のような長方形を考える。この長方形から単位時間に流れ出す電荷量 dQ を、$J(z+dz)$、$J(z)$ を用いて表せ。

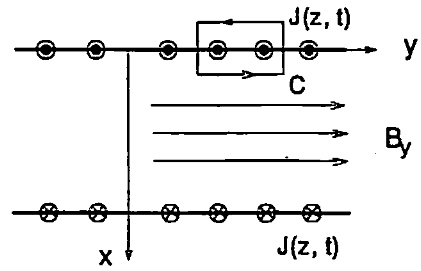
(3) (2) で考えた dQ は、$-\dfrac{\partial\sigma(z,t)dz}{\partial t}$ に等しいことから、$\dfrac{\partial\sigma(z,t)}{\partial t}$

と $\dfrac{\partial J(z,t)}{\partial z}$ の関係式を示せ。

(4) x=0 での表面電荷密度σ (z, t) は $\cos(\omega t - kz)$ に比例することがわかっている。σ (z, t) を求めよ。

(5) 電場 E は２枚の平面の間にのみ生じ、x 成分 (E_x) のみと仮定する。E_x をσ (z, t) を用いて表せ。

(6) 磁場 $\boldsymbol{B}$ は 2 枚の平面の間にのみ生じ、y 成分（B_y）のみと仮定する。右の図を参考にし、経路 C についてのアンペールの法則から B_y を、$J(z,\ t)$ を用いた形で表せ。



(7) E_x、B_y に、σ（$z,\ t$）、$J(z,\ t)$ それぞれの具体的な式を代入し、マクスウェル方程式から得られる $\nabla\times\boldsymbol{E}$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ の関係式から、k と ω の間にある関係式を求めよ。このとき、x=0 での $J(z,\ t)$ は光速 c を用いてどのように表せるか。

平成１８年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題 (第２次)

（試験科目　物理学）

[III]

(1) １粒子状態を表わす波動関数 $\psi(\vec{x},t)$ が従う時間変化の方程式をハミルトニアン H を使って書きなさい。また、ハミルトニアン演算子を運動エネルギーとポテンシャルエネルギー $V(\vec{x})$ を使って書きなさい。

(2) ハミルトニアンの固有値はエネルギー E である。エネルギー固有状態の波動関数 $\psi_E(\vec{x},t)$ はどのように時間変化するかを書きなさい。

(3) 運動量固有値を $\vec{p}$ として、運動量固有状態の従う方程式を書き、その波動関数 $\psi_{\vec{p}}(\vec{x})$ を求めなさい。状態の規格化を行う必要はない。

(4) ポテンシャルに束縛された１粒子のエネルギー固有状態は運動量固有状態になれない。どうしてか理由を述べなさい。しかし、特定運動量状態がどの程度含まれるかを計算できる。$\psi_E(\vec{x},t)$ と $\psi_{\vec{p}}(\vec{x})$ を使って特定運動量状態が含まれる確率を表す公式を書きなさい。

(5) 水素原子の基底状態の束縛エネルギーの数値を電子ボルト単位で書きなさい。また、この値を電子の質量 m、電子の電荷 e などを使って書きなさい。

平成１８年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題 (第２次)

（試験科目　物理学）

[IV]

自由電子気体について，以下の問いに答えよ．ただし，絶対温度を T とし，ボルツマン定数を $k_{\rm B}$，プランク定数を h ($\hbar = h/2\pi$), ボーア磁子を $\mu_{\rm B}$ とし，電子の質量を m, 電子の g 因子を 2, 平均電子密度を n とする．必要であれば，フェルミ分布関数を $f(\varepsilon) = [e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1]^{-1}$ (ただし，μ は化学ポテンシャル，$\beta = 1/k_{\rm B}T$) と書くとき，十分に低温では，一般に滑らかな関数 $g(\varepsilon)$ に対して，

$$\int_{\varepsilon_0}^{\infty} g(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = \int_{\varepsilon_0}^{\mu} g(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_{\rm B}T)^2 g'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(k_{\rm B}T)^4 g'''(\mu) + \cdots$$

の展開公式が成り立つことを利用しても良い．

(1) 自由電子の運動エネルギー ε と波数ベクトルの絶対値 k の間には

$$\frac{dk}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2\varepsilon}}$$

の関係があることを示せ．これを利用して，単位体積あたり，スピンあたりの状態密度 $D(\varepsilon)$ は

$$D(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m^3\varepsilon}}{2\pi^2\hbar^3}$$

で与えられることを示せ．

(2) 温度 $T=0$ における化学ポテンシャル μ_0 を n の関数として求めよ．

(3) 一般の温度 T における自由電子気体の単位体積あたりのスピン常磁性帯磁率 χ は

$$\chi = -2\mu_{\rm B}{}^2 \int_0^{\infty} D(\varepsilon)\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}d\varepsilon$$

で与えられることを示せ．

(4) 前問で導いた χ は十分に低温においては T に依存しない定数となり，十分に高温においては T に逆比例することを示せ．

(5) 自由電子気体の単位体積あたりの比熱 C が十分に低温において T に比例することを示せ．