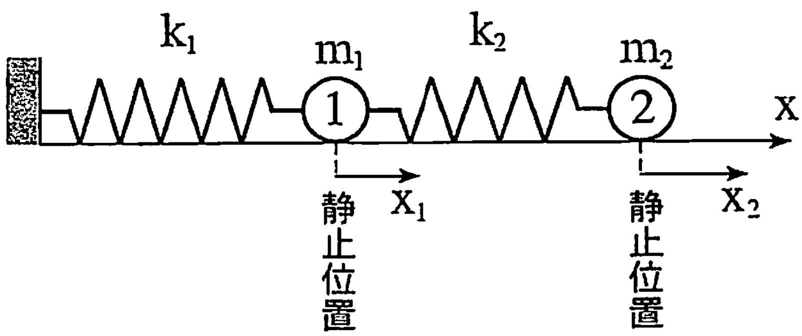
平成１８年度　　　　　　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題
（平成１７年　１０月入学　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題）
（試験科目　物理学　　）

[I]

なめらかな直線上の溝の上に、バネ定数 k_1、k_2 のバネと質量 m_1、m_2 の小球 1、2 を図のように固定し静止させる。バネの質量および振動時の空気による抵抗および小球の大きさは考えなくても良い。振動は x 軸方向のみとし、自然のつり合いの位置からの変位を x_1、x_2 とする。

(1) この系の振動時における運動エネルギーT およびポテンシャルエネルギーU を求めよ。
(2) ラグランジュアン L を導け。
(3) ラグランジュ方程式から、各小球の運動方程式を導け。
以下の設問では、$m_1=2m$、$m_2=m$、$k_1=2k$、$k_2=k$ の場合を考える。
(4) この系の基準振動 ω_1、ω_2 を求めよ。
(5) 小球 2 を自然のつり合いの位置から微少量 δ だけ x 軸方向へ引っ張ったとき、
  (5-1) 小球 1 の自然のつり合いの位置からの変位 d を求めよ。
  (5-2) 次いで小球 2 を時刻 $t=0$ で静かに放す。x_1、x_2 を t の関数として求めよ。



平成１８年度　　　　　　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題
（平成１７年　１０月入学　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題）
（試験科目　物理学　　）

[II]

(1) 無限に広く、厚みが十分にある平らな導体に点電荷 q を近づけ、表面から距離 d の位置で静止させた。板は真空中にあり、真空の誘電率はε_0とする。

(1-1) 鏡像電荷の考え方を用いて、点電荷 q に及ぶ力を求めよ。点電荷は静止してから十分時間がたっているものとする。
(1-2) 板の表面に誘導される電荷の面密度はいくらか。

(2) 無限に広く、厚みが十分にある平らな超伝導体に細長い棒磁石を超伝導体の表面に対して垂直にして近づけ、棒磁石の端が板から距離 d の位置で静止させて十分な時間待った。ここで、棒磁石は十分長く、磁気量 q_m 単体を距離 d まで超伝導体に近づけたと近似して考えられるとする。板は真空中にあり、真空の透磁率はμ_0とする。

(2-1) 超伝導体では電気抵抗が 0 であるため、磁気量 q_m を静止させて十分時間がたっても超伝導体の表面には定常電流が流れており、超伝導体の内部に磁場が入らないように q_m のつくる磁場を遮へいしている。この電流が超伝導体の外につくる磁場はどのようになるか。磁場は静磁場であるとして、表面付近の様子を力線で簡単に表せ。ただし、q_m は正とする。
（注：原点にある磁気量 Q_{m1} が $\vec{r}$ につくる磁場は、$\vec{B}(\vec{r})=\dfrac{\mu_0 Q_{m1}}{4\pi}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ で表せる。）

(2-2) 表面電流が超伝導体の外につくる磁場と等価な磁場を、超伝導体の内部に考えた鏡像磁気量により超伝導体の外につくるとする。どの場所にどんな磁気量を考えれば良いか。
(2-3) 磁気量 q_m に及ぶ力を求めよ。（注：磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ が $\vec{r}$ にある磁気量 Q_{m2} に及ぼす力は、$\vec{F}=Q_{m2}\vec{B}(\vec{r})$ で表せる。）
(2-4) 超伝導体の表面に流れている電流の大きさをアンペールの法則を用いて求めよ。

平成１８年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題
（平成１７年１０月入学　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験科目　物理学）

[III]

(1) 量子力学では、状態と物理量の２つの概念をきっちりと区別して考える必要がある。１粒子状態を表現する一つの方法は、波動関数 $\psi(\vec{x},t)$ を用いることである。波動関数が従う時間変化の方程式がシュレーディンガー方程式である。ハミルトニアン H を使ってシュレーディンガー方程式を書きなさい。

(2) 任意の状態に対して、物理量であるエネルギーを観測した結果は、色々なエネルギー値が得られ、量子力学は特定エネルギーを得る確率を決定する。ところが、固有状態と呼ばれる状態に対しては、常に一定のエネルギー値が得られる。ハミルトニアンの固有値がエネルギー E である。エネルギー固有状態の波動関数 $\psi_E(\vec{x},t)$ はどのように時間変化するかを求めなさい。

(3) 水素原子核のクーロン力で束縛された電子のハミルトニアンを書きなさい。また、エネルギー E の固有状態が従う、波動関数の微分方程式を書きなさい。

(4) 水素原子の基底状態の束縛エネルギーの数値を電子ボルト単位で書きなさい。また、この値を電子の質量、電子の電荷などの基礎定数を使って書きなさい。

(5) 運動量固有値を $\vec{p}$ として、運動量固有状態の従う方程式を書き、その波動関数 $\psi_{\vec{p}}(\vec{x})$ を求めなさい。状態の規格化を行う必要はない。

(6) 運動量固有状態でない任意の状態 $\psi(\vec{x})$ に対して、運動量の観測を行ったとき運動量値 $\vec{p}$ を得る確率を書きなさい。

また、

$$\psi(\vec{x}) = \frac{\exp[-\vec{x}^2/(2\Delta^2) + i\vec{p}_0\cdot\vec{x}]}{(\sqrt{\pi}\Delta)^{3/2}} \tag{1}$$

のとき、この確率を計算しなさい。必要なら、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-x^2] = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

を用いなさい。

得られた計算結果をもとに、どのような運動量が最も観測されやすいか、またこの値にどれくらいの不確定性があるか、を説明しなさい。

平成１８年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題
（平成１７年１０月入学　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験科目　物理学）

[IV]

N 個の独立な粒子から構成される系がある。各粒子は $-\varepsilon, \varepsilon$ の二つのエネルギーの状態だけをとることができる。ただし、k_{B} はボルツマン定数とする。

(1) カノニカル集団の立場でこの系の統計力学的な性質を議論したい。

(2-1) この系の分配関数 Z を求めよ。

(2-2) 比熱 C を温度 T の関数として求めよ。また、C の T 依存性を大まかに図示し、C がそのような形状がなることの物理的意味を簡潔に述べよ。

(2) ミクロ・カノニカル集団の立場でこの系の統計力学的な性質を議論したい。

(2-1) 系の全エネルギー $E = M\varepsilon$ $(M = -N, \cdots, N)$ の状態の重率 W_M を求め、エントロピー S を求めよ。

(2-2) $\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$ により系の温度 T を定義するとき、

$$\frac{1}{T} = \frac{k_{\mathrm{B}}}{2\varepsilon} \log \frac{N-M}{N+M}$$

の関係式が成り立つことを示し、系の平均エネルギーを T の関数として求めよ。ただし、次の近似式を用いることとする。

$$x \gg 1 \text{ のとき } \log x! \approx x \log x - x$$