平成１７年度　岡山大学大学院自然科学研究科
数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題（２次）

（試験科目　物理学）

注　　意

1　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚（表紙を除く），下書用紙は２枚です。

2　解答用紙の表紙及び全ての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

3　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入しなさい。

4　解答用紙は，バラバラにしないで，冊子のまま提出しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書用紙は必ず持ち帰りなさい。

平成１７年度　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[I]

1) 次の行列 A の逆行列を求めよ. また $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となることを証明せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) ロケットは燃料の燃焼生成物の噴射によって推進される. ここで, 重力が無視できる宇宙空間を考える. 全質量 m_1 のロケットが速度 v_1 で進んでいるものとする. いま, ロケットが燃焼生成物をある時間の間一定速度 v_r で噴射して, 全質量が m_2 に減少し, 速度が v_2 に増加した. その時, 次の関係式が成立することを示せ.

$$v_2 - v_1 = v_r \ln \frac{m_1}{m_2}.$$

全質量 m_1 が 2.8×10^6kg のロケットが, 燃焼継続時間 1.5×10^2s の間に 2.1×10^6kg の燃料を消費したものとする. この燃焼の間, ロケットに 3.4×10^7N の一定の力が加えられていたものとしたとき, v_r を計算せよ. m_1 が 2.8×10^6kg としたとき, この燃焼の結果による速度の増加を計算せよ.

平成１７年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[II]

1) 導体板の面積 S(m^2), 間隔が d(m) の平行板コンデンサーを考える。空間は真空とする。次の問題に答えよ。単位も書くこと。

a) 導体板に+Q (C),-Q (C) の電荷をそれぞれ上下の導体板に与えたとすると、導体間の電場の大きさと方向を求めよ。
b) 導体間の電位差はいくらか。
c) 電気容量はいくらか。
d) このコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーはいくらか。
e) この導体板は引き合うが、この引力を求めよ。

2) 光が物質中を z 方向に伝わっている。その振動数が $\nu = 4 \times 10^{14}$(Hz), 波長が $\lambda = 5 \times 10^{-7}$(m) であるとする。次の問題に答えよ。真空中の光の速さは, $c = 3 \times 10^8$(m/s) とする。単位も書くこと。

a) 電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ が物質中で伝播する方程式を誘電率 ϵ と透磁率 $\mu = \mu_0$ を使って書け。屈折率 n は, 誘電率と透磁率とどう関係するか。真空中の誘電率を ϵ_0 とする。
b) この光の速さはいくらか。
c) この光が伝わっている物質の屈折率はいくらか。
d) この光の真空中の波長はいくらか。

平成１７年度　　数理物理科学専攻　　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[III]

エネルギー E は 波動関数 $\psi(\vec{x})$ の汎関数として次のように与えられる：

$$E[\psi(\vec{x})] = \int \psi(\vec{x})^* \mathcal{H} \psi(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}, \tag{1}$$

ただし $\mathcal{H}$ はハミルトニアン，$\psi(\vec{x})$ は次の規格化条件を満たすものとする:

$$\int \psi(\vec{x})^* \psi(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} = 1. \tag{2}$$

1. $E[\psi(\vec{x})]$ は次の変分原理を満たすことをしめせ：

$$E[\psi(\vec{x})] \geq E_0, \tag{3}$$

ここで E_0 は真の基底状態エネルギーであり，等号は ψ が真の基底状態波動関数の時のみ成立する．

2. 上記変分原理を用いて１次元調和振動子の基底状態エネルギー ε_0，と基底状態波動関数 φ_0 を求めよ。ただし、１次元調和振動子のハミルトニアンは次式で与えられ：

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{4}$$

試行関数としては次式を用い，変分パラメータ α と規格化定数 N_0 を決定せよ．

$$\varphi_0 = N_0 \exp(-\alpha x^2/2), \tag{5}$$

また、必要なら次の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\alpha x^2) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}. \tag{7}$$

3. 求まった波動関数を用いて座標，運動量の２乗平均 $(< x^2 >, < p^2 >)$ を計算することにより，不確定性原理を議論せよ．

平成１７年度　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題（第２次）

（試験科目　物理学）

[IV]

質量 m, 固有角振動数 ω を持つ 1 個の 1 次元振動子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{1}$$

で与えられる。まずは、この系を古典的に考える。

1. この系 1 個の古典的な分配関数

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{kT}\right)\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{h} \tag{2}$$

を計算せよ。ここで k はボルツマン定数, h はプランク定数である。

2. この古典的な振動子 N 個からなる系の内部エネルギー U および熱容量 $C = \dfrac{\partial U}{\partial T}$ を温度 T の関数として求めよ。

ついで、この 1 次元調和振動子の系を量子論的に考える。

3. 調和振動子 1 個を量子論的に扱うと、エネルギー準位は

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

で与えられる。ただし、$\hbar = h/2\pi$ である。この系 1 個の分配関数 Z を量子論的に計算せよ。

4. この量子論的な振動子 N 個からなる系の内部エネルギー U および熱容量 C を温度 T の関数として求めよ。また、ここで得た U のふるまいを T の関数としてグラフに描け ($T = 0$ での値と T が大きいときの漸近形に注意して概形を示せ)。

5. 量子論的に得た分配関数 Z, 内部エネルギー U, 熱容量 C のそれぞれの結果において、$\dfrac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$ の極限での形を求め、これらが古典的な結果に一致するかどうか示せ。

[参考事項] ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$