平成１７年度岡山大学大学院自然科学研究科
数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題

（平成１６年度１０月入学　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題）

〈一次募集〉

（試験科目　物理学）

注　　　意

1　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚（表紙を除く），下書用紙は２枚です。

2　解答用紙の表紙及び全ての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

3　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入しなさい。

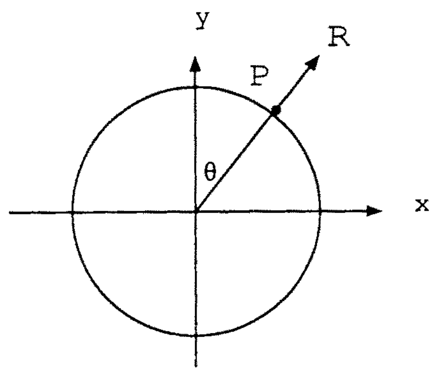
4　解答用紙は，バラバラにしないで，冊子のまま提出しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書用紙は必ず持ち帰りなさい。

（試験科目　物理学）

[I]

滑らかな半径 r の球面の頂上におかれてあった質量 m の質点が鉛直面内の大円に沿って滑り出すときに, どの角度で球からはなれて落ちるかを考える. 重力加速度は g とする.



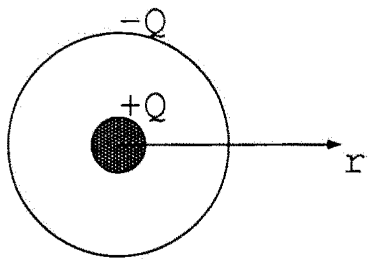
1) 質点が球面上の点Pにいるとき, その点への半径が鉛直となす角を θ とすれば, そのときの速度 v を θ を用いて表せ.
2) 球面からの抗力 R はいくらになるか記せ.
3) 質点が球面からはなれるときの角度 θ を求めよ.

この問題をラグランジアンを使って考えよう.
4) 質点が滑る大円の中心を原点として, 水平, 鉛直方向をそれぞれ, x 軸, y 軸（鉛直上方を正）とするとき, ラグランジアン L を書け.
5) 質点が大円上にある拘束条件を書け.
6) 拘束条件を $f(x,y)=0$ とし, ラグランジアンを $L' = L\text{-}\lambda f$ と置き直して運動方程式を解いてもよい. このときの運動方程式を導け.
7) 拘束条件と 6) で導いた運動方程式を用いて λ を座標の関数として求めよ.
8) 7) の結果を利用して, 質点が球面から離れるときの位置 x, y を求めよ.

(試験科目　物理学)

[II]

半径 a の円柱導体を中心を同じくする半径 b $(b > a)$ の薄い導体が囲んでいる場合を考える．２つの導体の間には, 絶縁体（誘電率 ϵ, 透磁率 μ）がある．z を導体の長さに沿った方向（紙面に垂直な方向）とし, 導体は無限に長いとする．これは一般に使われている同軸ケーブルのモデルである．



1) 内部導体, 外部導体表面にそれぞれ単位長さ当たり+Q,-Q の電荷を与える．
   a) 半径 r の位置での電場の大きさとその方向を求めよ．
   b) ２つの導体間の電位差を計算せよ．また, z 方向の単位長さ当たりの電気容量を求めよ．
2) 導体に挟まれた誘電体中を伝わる電磁波を考える．
   a) 誘電体中での Maxwell 方程式を電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を使って書け．
   b) 問題 1) の静的な場合の電場を E_x^0, E_y^0 とする．$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$, $E_j = E_j^0 \cdot e^{i(kz-\omega t)}$ $(j = x, y)$ と書き, 磁束密度も $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$, $B_j = B_j^0 \cdot e^{i(kz-\omega t)}$ $(j = x, y)$ の形に書く．この時, これらが Maxwell 方程式の解になることを示すことができる．つまり, z 成分が 0(ゼロ) で, かつ z 方向に伝わる電磁波が存在する．E_x, E_y, B_x, B_y を座標 (x, y, z, t) の関数として書け。
   c) k と ω の関係を求めよ．誘電体としてポリエチレンを使った場合, 誘電率 $\epsilon = 2.3\epsilon_0$, 透磁率 $\mu = \mu_0$ とする．ϵ_0, μ_0 はそれぞれ, 真空の誘電率と透磁率である．この場合, z 方向の電磁波の速度は光の速度との比でいくらか．有効数字２桁で計算せよ．

平成１７年度　　　数理物理科学専攻　　　物理学系入学試験問題
(平成１６年度１０月入学　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題)

(試験科目　物理学)

[III]

量子力学において，運動量演算子は座標表示で $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ と与えられる．運動量演算子に関連した以下の問いに答えよ．

1. 座標演算子の x 成分 x と運動量演算子の x 成分 p_x との交換関係 $[x, p_x] = i\hbar$ を示せ．

2. 自由粒子に対する Schrödinger Equation を書け．

3. 次の波動関数 ψ が上記 Schrödinger Equation を満たすことを示し，その時のエネルギー分散関係を求めよ:

$$\psi(\vec{x}) = A\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) + B\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}). \tag{1}$$

4. 次の演算子

$$T(a) = \exp(-iap_x/\hbar), \tag{2}$$

は次式を満たすことを示せ：

$$T(a)\psi(x, y, z) = \psi(x - a, y, z). \tag{3}$$

5. 角運動量は $\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{p}$ で与えられる．角運動量の x 成分 ℓ_x と y 成分 ℓ_y との交換関係 $[\ell_x, \ell_y]$ を，その定義式を用いて計算せよ．

6. 角運動量の z 成分 ℓ_z は極座標で次のように表される：

$$\ell_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{4}$$

今，次式を満たす演算子 $R(\beta)$ を推測せよ：

$$R(\beta)\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi - \beta). \tag{5}$$

平成１７年度　　　数理物理科学専攻　　　物理学系入学試験問題
（平成１６年度１０月入学　数理物理科学専攻　物理学系入学試験問題）

（試験科目　物理学）

［IV］

フェルミ・ディラック統計に従う理想量子気体について、以下の設問に答えよ。

(1). フェルミ・ディラック分布の分布関数は $f(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}$ で与えられる。k はボルツマン定数、T は温度、μ は化学ポテンシャル (フェルミ準位、フェルミポテンシャル) である。

(1-1). 温度 0K での分布関数 $f(\varepsilon)$ の振舞いを ε の関数として図示せよ。縦軸と横軸の目盛についても記すこと。また、このグラフの振舞いの様子をもとに、フェルミ・ディラック分布の特徴を簡単に文章で説明せよ。

(1-2). 十分低温 $T(>0)$ での分布関数 $f(\varepsilon)$ の振舞いのだいたいの様子を ε の関数として図示せよ。また、このグラフの振舞いの様子をもとに、温度が入った効果がどのようにあらわれるかを簡単に文章で説明せよ。

(2). 金属中の伝導電子の集団を理想フェルミ気体として扱い、十分低温での振るまいを考える。なお、 単位体積あたりの (スピン自由度も含む) 状態密度を $D(\varepsilon)$ とし、温度 0K での化学ポテンシャルを μ_0 とする。必要により、十分低温で成り立つ展開式

$$\int_0^\infty A(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\mu A(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2A'(\mu) + O\left((kT)^4\right),\ \text{ただし}\ A'(\mu) = \left.\frac{dA}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu}$$

を用いてよいことにする。

(2-1). 全粒子数 N が、$N = \int_0^\infty D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon$ で与えられることを用いて、十分低温 T での化学ポテンシャル μ の値が μ_0 からどれだけ変化するか求めよ。$|\mu-\mu_0| \ll \mu_0$ であるとし、T^2 のオーダーの項まで求めよ。

(2-2). 内部エネルギー E を計算し、十分低温 T での比熱 C_V を求めよ。比熱は T の一次のオーダーの項まで求めよ。

(2-3). 磁場 $\vec{H}$ の中におかれた電子は、そのスピン磁気モーメントが $\vec{H}$ に平行に向くか、逆方向に向くかによって $\varepsilon \mp \mu_B H$ のエネルギーを持つ。ここで μ_B はボーア磁子で、1 個の電子が持つ磁気モーメントである。理想フェルミ気体と見なせる電子系について、温度 0K での スピン常磁性 (パウリ常磁性) 磁化率 $\chi_s = \lim_{H\to 0}\dfrac{M}{H}$ を求めよ。ここで、磁化の強さ M はスピン磁気モーメントが平行な電子数と逆方向な電子数の差から計算すればよい。