Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 13.06.2008

Übungen zur Theoretischen Physik II, SS 2008

9.Übung

(Abgabe Freitag, 20.06.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 32 (10 Punkte)
(**Wellengleichung in einer Dimension)**

a) In einer Dimension lautet die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass die Lösungen linearer Differentialgleichungen einen Vektorraum bilden, dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$f(z,t) = g(z - vt) + h(z + vt)$$

gegeben ist. g, h seien dabei als zweimal differenzierbar vorausgesetzt.

b) Zeigen Sie explizit, dass

$$f_1(z,t) = Ae^{-b(z-vt)^2}, \quad f_2(z,t) = A\sin(b(z - vt))$$

mit Konstanten A, b die Wellengleichung erfüllen und skizzieren Sie die Wellenformen.

c) Zeigen Sie, dass auch die *stehende Welle* $f(z,t) = A\sin(kz)\cos(kvt)$ (mit $k, v =$ const.) eine Lösung der Wellengleichung ist und sich in der allgemeinen Form aus a) schreiben lässt.

Aufgabe 33 (10 Punkte)
(**Wellen in einer Dimension: Transmissionskoeffizienten)**
Gegeben seien zwei im Punkt $z = 0$ miteinander verbundene Seile. Die Verbindung sei so geartet, dass das Seil auch an der Verbindungsstelle frei schwingen kann. Auf dem ersten Seil $-\infty < z < 0$ mögen sich Transversalwellen (Auslenkung: $f(z,t)$) mit der Geschwindigkeit v_1 ausbreiten, im zweiten Seil $0 \leqslant z < \infty$ mit der Geschwindigkeit $v_2 \neq v_1$.

a) Begründen Sie, warum sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial z}$ bei $z = 0$ stetig sein müssen.

b) Benutzen Sie die Randbedingung aus a), um die eindimensionale Wellengleichung entlang des gesamten Seiles zu lösen. Verwenden Sie einen Ansatz mit cos-Funktionen.

c) Berechnen Sie explizit die Amplituden der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen.

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse für den Grenzfall $\nu_2 \to 0$.

Aufgabe 34 (10 Punkte)
(**Wellenpakete und Unschärferelation)**
Gegeben sei ein Wellenpaket der Form

$$u(x,0) = e^{ik_0x}\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{x^2}{4L^2}}$$

mit einer Konstanten L.

a) Stellen Sie das Wellenpaket graphisch dar. Zeigen Sie, dass u normiert ist und berechnen Sie den mittleren Ort und die Ortsunschärfe:

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} x|u(x,0)|^2\, dx, \qquad (\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x- < x >)^2|u(x,0)|^2\, dx$$

b) Schreiben Sie das Wellenpaket als Überlagerung ebener Wellen und bestimmen Sie $< k >$ und Δk der Fourier-Transformierten $\tilde{u}(k,0)$ von u.

c) Bestimmen Sie das Produkt $\Delta x \Delta k$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 35 (15 Punkte)
(**Elektromagnetische Wellen)**

a) Zeigen Sie, dass die *Kugelwelle* $\psi(\vec{r},t) = \frac{f(|\vec{r}|-ct)}{|\vec{r}|}$ für jede zweimal differenzierbare Funktion f eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung $\Delta\psi - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass monochromatische ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum immer transversal sein müssen.

c) Gegeben sei eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle, die

   i) sich in negativer x-Richtung bewegt und in $z-$Richtung polarisiert ist.

   ii) sich in Richtung der Raumdiagonalen $\vec{e}_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ bewegt und parallel zur xz-Ebene polarisiert ist.

   Geben Sie für beide Wellen den Verlauf der elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ an.

d) Gegeben seien zwei monochromatische ebene Wellen gleicher Frequenz ω, die sich in $z-$Richtung ausbreiten, sich in Phase befinden und in entgegengesetzter Richtung zirkular polarisiert sind. Untersuchen Sie die möglichen Polarisationszustände der Überlagerung der beiden Wellen in Abhängigkeit von den Amplituden A, B.

Hinweis: Per Konvention bezieht sich die *Polarisationrichtung* einer elektromagnetischen Welle auf das elektrische Feld.