Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 16.05.2008

Übungen zur Theoretischen Physik II, SS 2008

5.Übung

(Abgabe Freitag, 23.05.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 17 (15 Punkte)
(Greensfunktionen und Fouriertransformation)
Die Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$ lässt sich auch durch eine Fourier-Transformation

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\tilde{\phi}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\tilde{\rho}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\,\phi(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \tilde{\rho}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\,\rho(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

lösen. Dabei gelte $\phi(\vec{r}) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$.

a) Verwenden Sie die Fourier-Transformation, um zu zeigen, dass die Lösung $\phi(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung bei gegebenem $\rho(\vec{r})$ in der Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int d^3r'\,G(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,') \tag{1}$$

mit $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{1}{k^2}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$ geschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie explizit die *Greensfunktion* $G(\vec{r}-\vec{r}\,')$ aus Aufgabenteil a) und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen in Gleichung (1).

c) Gegeben sei das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \mu = \text{const.}$$

als Lösung der Poisson-Gleichung. Berechnen Sie daraus $\tilde{\phi}(\vec{k})$, $\tilde{\rho}(\vec{k})$ und $\rho(\vec{r})$.

Hinweis: $\int_0^\infty \sin(kr)e^{-\mu r}dr = \frac{k}{k^2+\mu^2}$ und $\int_0^\infty \frac{t\sin(t)}{b^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-b}$

Aufgabe 18 (10 Punkte)
(Lange Spule)
Eine vom Gleichstrom I durchflossene Spule (Radius R, Höhe h) mit vernachlässigbarem Leiterquerschnitt werde beschrieben durch die Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, a\varphi)^T, \quad R, a = \text{const.}, \quad \frac{-h}{2a} \leqslant \varphi \leqslant \frac{h}{2a}$$

a) Berechnen Sie die z-Komponente des Magnetfeldes auf der Spulenachse und diskutieren Sie das Ergebnis.

b) Stellen Sie den Verlauf des Magnetfeldes auf der z-Achse als Funktion von z graphisch dar.

c) Was ergibt sich speziell für den Innenbereich der Spule ($z \ll h$), falls $h \gg R$?

Aufgabe 19 (10 Punkte)
(Dipole)

a) Gegeben sei eine kreisförmige, unendlich dünne, geschlossene Leiterschleife, die von einem Stom I durchflossen und von einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$, das nicht senkrecht auf der von der Schleife eingeschlossenen Fläche steht, durchsetzt wird.

   i) Zeigen Sie, dass die resultierende Kraft auf die Schleife verschwindet.

   ii) Zeigen Sie, dass auf die Schleife ein endliches Drehmoment wirkt und berechnen Sie dieses.

   iii) Berechnen Sie die potentielle Energie der Schleife im Feld.

b) Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie zweier *elektrischer* Dipole mit Dipolmomenten $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ an den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.