Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 24.04.2008

Übungen zur Theoretischen Physik II, SS 2008

2.Übung

(Abgabe Freitag, 02.05.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 5 (10 Punkte)
(Koordinatentransformationen allgemein)
Der Ortsvektor $\vec{r}$ werde in den orthogonalen krummlinigen Koordinaten y_1, y_2, y_3 ausgedrückt. Die Einheitsvektoren lauten dann: $\vec{e}_i = b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$ mit $b_{y_i} = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}|$.

a) Sei $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld. Zeigen Sie, dass der Gradient in diesen Koordinaten lautet (Summenkonvention!):

$$\nabla \phi = \vec{e}_j b_{y_j}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \phi$$

b) Sei $\vec{a} = a_j \vec{e}_j$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass seine Divergenz in den neuen Koordinaten lautet:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} b_{y_1} a_2) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_3) \right]$$

c) Benutzen Sie die obigen Ergebnisse, um die Operatoren Gradient und Divergenz in Kugelkoordinaten zu berechnen.

d) Wie lautet der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten?

Aufgabe 6 (10 Punkte)
(Dipolpotential)
Gegeben seien zwei Ladungen $+q$ am Ort $\vec{r}_1$ und $-q$ am Ort $\vec{r}_2$. Berechnen Sie das Gesamtpotential am Ort $\vec{r}$ für große Entfernungen von der Ladungsanordnung.
(D.h. $|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}| \gg |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$)
Hinweis: Machen Sie für das Gesamtpotential eine Taylorentwicklung bis zur führenden Ordnung.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
(Felder)

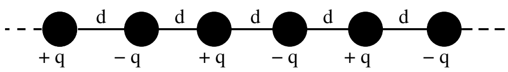
a) Geben Sie jeweils ein Beispiel (Skizze und Formel) für ein nicht-triviales und nicht homogenes dreidimensionales Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mit den folgenden Eigenschaften an:

i) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ und $\nabla \times \vec{A} \neq 0$

ii) $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ und $\nabla \times \vec{A} = 0$

b) Gegeben seien zwei entgegengesetzt gleich große Ladungen q und $-q$ im Abstand d. Zeigen Sie, dass die Symmetrie-Ebene zwischen den beiden Ladungen, die senkrecht zu ihrer Verbindungslinie liegt, eine Äquipotentialfläche ist. Warum und wie kann man dieses Ergebnis dazu benutzen, das Feld einer Punktladung vor einer leitenden Ebene zu bestimmen?

Aufgabe 8 (10 Punkte)
(Madelungkonstante in einer Dimension)



Die Coulombenergie pro Ionenpaar eines Ionenkristalls mit Ionenladung $\pm q$ und Abstand zwischen nächsten Nachbarn d lässt sich in der Form

$$U_c = \frac{-q^2\alpha}{4\pi\epsilon_0 d}$$

schreiben. Dabei ist die Konstante α nur von der Kristallstruktur abhängig.
Bestimmen Sie die *Madelung-Konstante* α für eine unendliche lineare Kette von Ionen.