Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 20.06.2008

Übungen zur Theoretischen Physik II, SS 2008

10.Übung

(Abgabe Freitag, 27.06.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 36 (10 Punkte)
(**Residuensatz)**

a) Berechnen Sie die Singularitäten und die Residuen der folgenden Funktionen der komplexen Variable z:

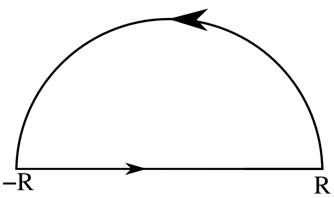
$$\text{i)}\ \frac{z+2}{z^2+9}, \qquad \text{ii)}\ \frac{\exp(2z)-1}{z^2}, \qquad \text{iii)}\ \frac{\exp(2z)}{(z-i\pi)^3}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Residuenmethode die folgenden reellen Integrale:

$$\text{i)}\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\sin\vartheta}\, d\vartheta, \qquad \text{ii)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx, \qquad \text{iii)}\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\vartheta)}{5+4\cos(\vartheta)}\, d\vartheta$$

Für die Integrale trigonometrischer Funktionen in b) empfiehlt sich die Substitution $z = e^{i\vartheta}$. Damit kann das reelle Integral in ein komplexes Wegintegral umgeschrieben werden, das sich mit dem Residuensatz leicht berechnen lässt. Das Integral über die reelle rationale Funktion lässt sich in ein komplexes Wegintegral umwandeln, indem man den folgenden Integrationsweg betrachtet:

Auf der reellen Achse von $-R$ nach R und dann entlang des um den Ursprung zentrierten Halbkreises mit Radius R zurück nach $-R$. Begründen Sie, warum für $R \to \infty$ nur der Beitrag entlang der reellen Achse zum Integral übrig bleibt.



Aufgabe 37 (10 Punkte)
(**Fourieranalyse einer Schwebung)**
Gegeben sei die periodische Funktion

$$f(t) = \sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$$

mit Konstanten ω_1, ω_2. Entwickeln Sie die Funktion (in obiger Produktdarstellung) in eine Fourier-Reihe und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 38 (10 Punkte)
(Entwicklung nach ebenen Wellen)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die Energie des elektromagnetischen Feldes als Integral über die Beiträge von ebenen Wellen schreiben lässt:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \left(\omega^2 \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) \right)$$

Führen Sie die analoge Rechnung für den Impuls des elektromagnetischen Feldes durch und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 39 (10 Punkte)
(Inhomogene Wellengleichung in zwei Dimensionen-Greensfunktion)
Führen Sie analog zur Vorlesung die Berechnung der Greenschen Funktion für die zweidimensionale inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t)$$

durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem dreidimensionalen Fall. Benutzen Sie die Integraldarstellung der *Besselfunktion 0-ter Ordnung:*

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin(\alpha)}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos(\varphi)}\, d\varphi$$

Ferner gilt:

$$\int_0^\infty J_0(ax) \sin(bx) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}, & |a| < |b| \\ 0, & |a| > |b| \end{cases}$$