Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 17.04.2008

Übungen zur Theoretischen Physik II, SS 2008

1.Übung

(Abgabe Donnerstag, 24.04.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Fragen

a) Was ist der wesentliche Unterschied zwischen dem Gebiet der Elektrostatik und dem der Elektrodynamik?

b) Interpretieren Sie anschaulich die einzelnen Terme, die in der Kontinuitätsgleichung für Strom- und Ladungsdichte auftreten.

c) Warum gilt das Coulomb-Gesetz nur für ruhende oder sich langsam bewegende Ladungen?

d) Was ist eine Lorentz-Transformation?

e) Betrachten Sie die Erde als homogen geladene Kugel. Welche Ladung müsste sie tragen, damit ihre elektrostatische Energie so groß wie ihre Gravitationsenergie wäre? Interpretation?

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Etwas Vektoranalysis
ϕ sei eine skalare Funktion, $\vec{A}$ und $\vec{B}$ seien Vektorfelder und

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{e}_i \partial_i$$

der Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten, wobei in der letzten Gleichung die Summenkonvention verwendet wurde. $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ seien die kartesischen Einheitsvektoren. Berechnen Sie:

a) $\nabla \times \nabla f$
b) $\nabla \cdot \nabla f$
c) $\nabla \cdot (f\vec{A})$
d) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
e) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$
f) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$
g) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben seien zwei Punktladungen q und λq an den Punkten $A(a, 0)$ und $B(\mu a, 0)$ in der xy-Ebene. $(q, a > 0)$

a) Die Gesamtladung sei fest. Wie muss man λ wählen, damit die Kraft zwischen den Ladungen maximal wird?

b) Berechnen Sie das von den beiden Ladungen erzeugte elektrische Feld im ganzen Raum.

c) Zeigen Sie, dass die elektrischen Feldlinien in der xy-Ebene der Gleichung

$$\frac{\lambda(x-\mu a)}{\sqrt{(x-\mu a)^2+y^2}} + \frac{\lambda(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = C$$

mit einer Konstanten C genügen müssen.

d) Zeigen Sie, dass die Gleichung für die Feldlinien sich auch in der Form

$$\cos(\Theta_1) + \lambda\cos(\Theta_2) = C$$

schreiben lässt und interpretieren Sie die Winkel Θ_1, Θ_2 geometrisch.

Aufgabe 4 (15 Punkte)
Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten
In kartesischen Koordinaten sind die Differentialoperatoren grad, div, rot durch

$$\mathrm{grad}(\phi) = \nabla\phi = (\tfrac{\partial\phi}{\partial x}, \tfrac{\partial\phi}{\partial y}, \tfrac{\partial\phi}{\partial z})^T \quad \mathrm{div}(\vec{v}) = \nabla\cdot\vec{v} = \tfrac{\partial v_x}{\partial x} + \tfrac{\partial v_y}{\partial y} + \tfrac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla\times\vec{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x)^T$$

für skalares ϕ und Vektorfelder $\vec{v}$ gegeben. Für verschiedene Anwendungen ist es nützlich, die Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten darstellen zu können.

a) Geben Sie die Basisvektoren für kartesische (x, y, z) und Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J für die Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten und J^{-1} für die inverse Transformation.

c) Schreiben Sie nun durch Anwendung der Kettenregel die oben angegebenen Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\psi) = \nabla\psi &= \tfrac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \tfrac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{div}(\vec{v}) = \nabla\cdot\vec{v} &= \tfrac{1}{r}(\tfrac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \tfrac{\partial v_\varphi}{\partial\phi}) + \tfrac{\partial v_z}{\partial z} \\
\mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla\times\vec{v} &= (\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \tfrac{\partial v_\varphi}{\partial z})\vec{e}_r + (\tfrac{\partial v_r}{\partial z} - \tfrac{\partial v_z}{\partial r})\vec{e}_\varphi + (\tfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \tfrac{1}{r}v_\varphi)\vec{e}_z \\
&= \tfrac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie den Laplace-Operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ in Zylinderkoordinaten.