

---

# Theoretische Elektrodynamik

---

**SS 2008**

Harald Jeschke, Universität des Saarlandes/Universität Frankfurt  
auf Grundlage eines Skripts von Claudius Gros, Universität Frankfurt



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung in die Elektrodynamik</b>	<b>1</b>
0.1	Elektrische Ladung . . . . .	1
0.2	Elektrostatik . . . . .	1
0.3	Magnetostatik . . . . .	2
0.4	Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . . .	3
0.5	Maxwell'sche Gleichungen . . . . .	4
0.6	Materie im elektromagnetischen Feld . . . . .	4
0.7	Literatur . . . . .	6
<b>I</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Coulomb'sches Gesetz</b>	<b>8</b>
1.1	Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz . . . . .	8
1.2	Coulomb-Kraft . . . . .	9
1.3	Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen . . .	11
1.4	Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen . . . . .	12
1.5	Multipolentwicklung . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Elektrostatik</b>	<b>22</b>
2.0	Wichtige Integralsätze . . . . .	22
2.1	Fluss eines Vektor-Feldes . . . . .	23
2.2	Gaußsches Gesetz . . . . .	23
2.3	Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes . . . . .	26
2.4	Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential	29
2.5	Energie des elektrostatischen Feldes . . . . .	31
2.6	Multipole im elektrischen Feld . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Randwertprobleme der Elektrostatik</b>	<b>36</b>
3.0	Grundproblem der Elektrostatik . . . . .	36

3.1	Eindeutigkeitstheorem . . . . .	36
3.2	Spiegelladungsmethode . . . . .	38
3.3	Inversionsmethode . . . . .	40
3.4	Trennung der Variablen . . . . .	42
3.5	Allgemeine Lösung der Potentialgleichung mit Randbedingungen . . . . .	45
3.6	Übersicht Elektrostatik . . . . .	49
<b>II Magnetostatik</b>		<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Ampère'sches Kraftgesetz</b>	<b>52</b>
4.1	Elektrischer Strom und Ladungserhaltung . . . . .	52
4.2	Lorentzkraft und magnetische Induktion . . . . .	54
4.3	Das Biot-Savart-Gesetz . . . . .	57
4.4	Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld . . .	60
4.5	Kräfte zwischen Strömen . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Grundgleichungen der Magnetostatik</b>	<b>65</b>
5.1	Divergenz der magnetischen Induktion $\vec{B}$ . . . . .	65
5.2	Rotation der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ . . . . .	66
5.3	Vektor-Potential und Eichung . . . . .	68
5.4	Multipolentwicklung . . . . .	70
5.5	Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld . . . . .	72
5.6	Übersicht über die Magnetostatik . . . . .	74
<b>III Grundlagen der Elektrodynamik</b>		<b>75</b>
<b>6</b>	<b>Die Maxwell'schen Gleichungen</b>	<b>76</b>
6.1	Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . . .	76
6.2	Faradaysches Induktionsgesetz . . . . .	76
6.3	Diskussion des Induktionsgesetzes . . . . .	78
6.4	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom . . . . .	81
6.5	Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Die elektromagnetischen Potentiale</b>	<b>84</b>
7.1	Skalares Potential und Vektorpotential . . . . .	84
7.2	Lorenz-Eichung . . . . .	86

7.3	Coulomb-Eichung . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes</b>	<b>90</b>
8.1	Energie . . . . .	90
8.2	Impuls . . . . .	92
8.3	Drehimpuls . . . . .	97
8.4	Zusammenfassung . . . . .	98
<b>IV</b>	<b>Elektromagnetische Strahlung im Vakuum</b>	<b>99</b>
<b>9</b>	<b>Das elektromagnetische Feld im Vakuum</b>	<b>100</b>
9.1	Homogene Wellengleichungen . . . . .	100
9.2	Ebene Wellen . . . . .	101
9.3	Monochromatische ebene Wellen . . . . .	105
9.4	Polarisation . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Wellenpakete im Vakuum</b>	<b>112</b>
10.1	Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen .	112
10.2	Fourier-Reihen und Fourier-Integrale . . . . .	113
10.3	$\delta$ -Distribution . . . . .	116
10.4	Überlagerung monochromatischer ebenen Wellen . . . . .	117
10.5	Wellenpakete, Phasen und Gruppengeschwindigkeit . . . . .	119
<b>V</b>	<b>Quellen elektromagnetischer Strahlung</b>	<b>125</b>
<b>11</b>	<b>Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen</b>	<b>126</b>
11.1	Problemstellung . . . . .	126
11.2	Berechnung der Greenschen Funktion . . . . .	128
11.3	Retardierte Potentiale . . . . .	134
11.4	Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen . . .	139
<b>12</b>	<b>Multipolstrahlung</b>	<b>144</b>
12.1	Langwellen-Näherung . . . . .	144
12.2	Elektrische Dipol-Strahlung . . . . .	146
12.3	Magnetische Dipol-Strahlung . . . . .	149
12.4	Elektrische Quadrupol-Strahlung . . . . .	150

<b>VI</b>	<b>Das elektromagnetische Feld in Materie</b>	<b>155</b>
<b>13</b>	<b>Makroskopische Felder</b>	<b>156</b>
13.1	Makroskopische Mittelwerte . . . . .	156
13.2	Freie und gebundene Ladungsträger . . . . .	158
13.3	Mikroskopische Ströme . . . . .	159
13.4	Polarisation und Magnetisierung . . . . .	163
<b>14</b>	<b>Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Fel-</b>	
	<b>des</b>	<b>165</b>
14.1	Energie . . . . .	165
14.2	Impuls, Drehimpuls . . . . .	167
14.3	Die Kirchhoffschen Regeln . . . . .	168
<b>15</b>	<b>Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen</b>	<b>170</b>
15.1	Allgemeine Stetigkeitsbedingungen . . . . .	170
15.2	Lineare, isotrope Medien . . . . .	173
15.3	Reflexion und Brechung von Licht . . . . .	175
15.4	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitendem Material	180
<b>VII</b>	<b>Relativistische Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>183</b>
<b>16</b>	<b>Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen</b>	<b>184</b>
16.0	Die spezielle Relativitätstheorie . . . . .	184
16.1	Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum . . . . .	186
16.2	Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts	190
16.3	Gaußsches cgs-System . . . . .	193
16.4	Ströme, Dichten, Potentiale . . . . .	194
16.5	Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie . . . . .	196
16.6	Transformation der Felder . . . . .	198

# 0. Einführung in die Elektrodynamik

---

## 0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:

- 1.) Es gibt 2 Sorten von *Ladungen*: positive und negative. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.
- 2.) Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die Ladung ist ein *Skalar*.
- 3.) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant und ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand des Systems.
- 4.) Ladung kommt nur als Vielfaches einer *Elementarladung*  $e$  (eines Elektrons) vor,

$$q = ne; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Klassischer Nachweis für die *Quantisierung* der Ladung ist der *Millikan-Versuch*. Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h.  $q = \pm(1/3)e$  bzw.  $q = \pm(2/3)e$ , jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

## 0.2 Elektrostatik

Das einfachste Problem der Elektrodynamik ist der Fall ruhender Ladungen, den wir mit *Elektrostatik* bezeichnen. Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung*

$q$ , so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft  $\vec{K}$ , die im allgemeinen vom Ort  $\vec{r}$  der Probeladung abhängt:

$$\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}) .$$

Ersetzt man  $q$  durch eine andere Probeladung  $q'$ , so findet man für die auf  $q'$  wirkende Kraft  $\vec{K}'$ :

$$\vec{K}'/q' = \vec{K}/q .$$

### Elektrisches Feld

Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \vec{K}(\vec{r})$$

einzuführen. Da die Testladung das Feld selbst ändert, ist der Grenzübergang verschwindender Testladung (d.h. Testladung muss hinreichend klein sein) erforderlich. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt  $\vec{r}$  ein Tripel reeller Zahlen zu, das sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang von Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  und elektrischem Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  zu finden und daraus bei gegebener Ladungsverteilung (z.B. einer homogenen räumlichen Kugel) das Feld zu berechnen.

### 0.3 Magnetostatik

Bewegte Ladungen in Form stationärer Ströme sind der Ursprung magnetostatischer Felder, die wir in Analogie zu den elektrostatischen Feldern einführen wollen. Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung  $q$ , so kann die auf  $q$  am Ort  $\vec{r}$  wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\vec{K}(\vec{r}) = q \left( \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right) .$$

Dabei ist  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit der Probeladung und  $\vec{B}(\vec{r})$  ein (von  $\vec{v}$  unabhängiges) Vektorfeld, der *magnetischen Induktion*, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer stationären Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  und dem magnetischen Feld  $\vec{B}(\vec{r})$  zu finden und daraus bei gegebener Stromverteilung (z.B. für einen stationären Kreisstrom) das Feld zu berechnen.

## 0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, als seien das elektrische und das magnetische Feld von einander unabhängige Größen. Dass dies nicht der Fall ist, zeigen folgende einfache Überlegungen:

1.) Lorentz-Transformation. Wenn eine Punktladung  $Q$  in einem Inertialsystem  $\Sigma$  ruht, so misst (über die auf eine Probeladung  $q$  wirkende Kraft) ein Beobachter in  $\Sigma$  ein elektrisches Feld  $\vec{E} \neq 0$ , jedoch kein Magnetfeld.

Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber  $\Sigma$  bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in  $\Sigma'$  misst daher sowohl ein elektrisches Feld  $\vec{E}' \neq 0$  als auch ein magnetisches Feld  $\vec{B}' \neq 0$ . Die Wechselwirkung zwischen der betrachteten Ladung und einer Probeladung  $q$  würde also von einem Beobachter in  $\Sigma$  als *rein elektrische* Wechselwirkung (vermittelt durch das Feld  $\vec{E}$ ) beschrieben, während ein Beobachter in  $\Sigma'$  sowohl *elektrische* als auch *magnetische* Wechselwirkung feststellen würde (vermittelt durch die Felder  $\vec{E}'$  und  $\vec{B}'$ ). Diese Betrachtung zeigt, dass man elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen muss, als *elektromagnetisches* Feld.

**Anmerkung:** Für den in 0.3 diskutierten Fall eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters tritt kein elektrisches Feld auf, da bei einem stationären Strom im Leiter kein *Ladungsstau* auftritt, so dass sich die im Leiter befindlichen positiven und negativen Ladungsträger (Gitterbausteine und Leitungselektronen) nach außen hin kompensieren.

2.) Kontinuitätsgleichung. Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann die Verknüpfung von  $\rho$  und  $\vec{j}$  via der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 ,$$

da die Ladung in einem bestimmten Volumen  $V$  nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von  $V$  hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

## 0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und den Ladungen (den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes) beschreiben die *Maxwell-Gleichungen*. Folgende Aufgabe ergibt sich:

- 1.) die Maxwell-Gleichungen zu formulieren und experimentell zu begründen,
- 2.) ihre Invarianzeigenschaften zu untersuchen, woraus sich direkt der Zugang zur speziellen Relativitätstheorie ergibt. Die Untersuchung wird zeigen, dass der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine *Lorentz-Transformation* beschrieben werden muss, d.h. dass für alle Inertialbeobachter die *gleiche Physik gilt*.
- 3.) Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld werden dazu führen, dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen. Daraus werden sich dann Begriffe wie *Strahlungsdruck* und die Einführung von *Photonen* ergeben.
- 4.) Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen. Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols.

## 0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  vollständig, wenn die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  und die Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  bekannt sind. In der Praxis treten dabei folgende Probleme auf:

- 1.) Für ein System von  $N$  geladenen Massenpunkten müsste man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  *mikroskopisch* berechnen zu können. Für ein Stück Materie von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. das Dielektrikum zwischen den Platten eines

Kondensators oder dem Eisenkern einer stromdurchflossenen Spule) haben wir es mit  $10^{20} - 10^{25}$  Massenpunkten zu tun!

- 2.) Die mikroskopisch berechneten Funktionen  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen. Die Lösung von Maxwell-Gleichungen (mehrdimensionale Integrationen) wäre dann praktisch nicht durchführbar bzw. unökonomisch!

### Gemittelte Felder

Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet der folgende Kompromiss: Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen (Volumina von  $10^{-24}$  cm<sup>3</sup>, Zeiten von  $10^{-8}$  sec) und geben uns mit Mittelwerten ( $10^{-6}$  cm<sup>3</sup>,  $10^{-3}$  sec) zufrieden. Anstelle von  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  treten dann Mittelwerte der Form

$$\langle \rho(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d^3x d\tau \rho(\vec{r} + \vec{x}, t + \tau)$$

und entsprechend für  $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle$ ,  $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$  und  $\langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle$ . Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld. Die darin auftretenden Verteilungen  $\langle \rho \rangle$  und  $\langle \vec{j} \rangle$  werden dann durch den experimentellen Aufbau definiert bzw. *eingestellt*.

### Fundamentale und makroskopische Felder

Für die Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zu den Mittelwerten der *fundamentalen* Felder,

*elektrische Feldstärke*  $\vec{E}$  und

*magnetische Induktion*  $\vec{B}$ ,

noch zwei weitere Vektorfelder als Hilfsgrößen einzuführen:

*dielektrische Verschiebung*  $\vec{D}$  und

*magnetische Feldstärke*  $\vec{H}$ .

Die dann zusätzlich benötigten Bestimmungsgleichungen gewinnt man durch Annahme eines linearen Zusammenhanges von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ , charakterisiert durch

*Dielektrizitätskonstante*  $\epsilon$  und *Permeabilität*  $\mu$ .

Häufig ist die makroskopische Stromverteilung nicht von außen vorgebar, sondern noch von den zu berechnenden Feldern abhängig. Im einfachsten Fall (Ohm'sches Gesetz) setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen makroskopischem Strom und elektrischer Feldstärke an, womit (als Proportionalitätskonstante) eine weitere Materialkonstante ins Spiel kommt: die

*elektrische Leitfähigkeit*  $\sigma$ .

Die Berechnung dieser Materialkonstanten ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) aus der atomaren Struktur der Materie gehört in den Bereich der Atom- und Festkörperphysik und benutzt Methoden der statistischen Mechanik.

Damit ergeben sich folgende **Aufgabenstellungen**:

- 1.) Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen.
- 2.) Einführung von Materialkonstanten und ihre Berechnung aus der atomaren Struktur der Materie für einfache Modelle.
- 3.) Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien. Beispiel: Das Reflexions- und Brechungs-Gesetz der Optik.

## 0.7 Literatur

An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. W. Nolting, *Elektrodynamik* (Grundkurs Theoretische Physik 3), Springer, Berlin.
2. J. Schnakenberg, *Elektrodynamik*, Wiley-VCH.
3. J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter.
4. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik* (Theoretische Physik, Band 3), Harri Deutsch.
5. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* (Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 2), Akademie-Verlag.
6. M. R. Gaberdiel, *Klassische Elektrodynamik*, ETH Zürich Vorlesungsskript.

**Teil I**

**Elektrostatik**

# 1. Coulomb'sches Gesetz

---

## 1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz

In der Einführung hatten wir die grundlegenden Eigenschaften der elektrischen Ladung kurz zusammengestellt. Zur experimentellen Prüfung dieser Eigenschaften benötigt man zunächst eine Messvorschrift für *Ladung*. Eine solche Messvorschrift wird im nächsten Unterkapitel nachgeliefert. Zuvor noch einige Ergänzungen zur Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz.

### Paarerzeugung

Besonders eindrucksvolle Beweise für die Ladungserhaltung sind die Paarerzeugung und Paarvernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron ( $e^-$ ) und ein Positron ( $e^+$ ) in ein hochenergetisches *massives* Photon ( $\gamma$ -Quant), das ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-*Erzeugung* (z.B. in  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.

Die Ladungsinvarianz zeigt sich z.B. darin, dass Atome und Moleküle neutral sind, obwohl der Bewegungszustand von Photonen und Elektronen sehr unterschiedlich ist. Besonders klar ist das Beispiel des Helium-Atoms ( ${}^4\text{He}$ ) und des Deuterium-Moleküls ( $\text{D}_2$ ). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral, obwohl der Bewegungszustand der Protonen im Kern des Helium-Atoms

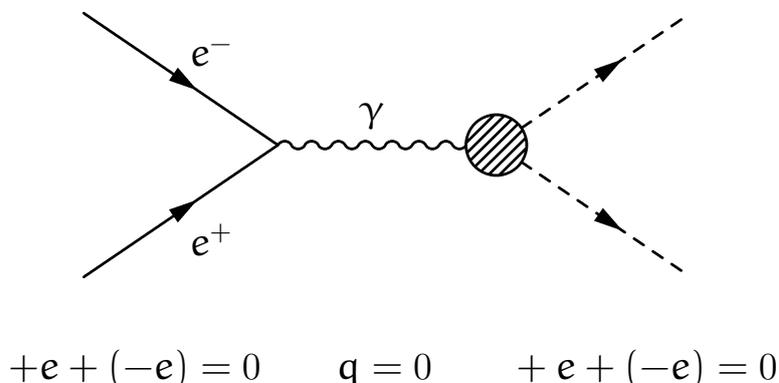


Abbildung 1.1: Paar-Vernichtung und Paar-Erzeugung.

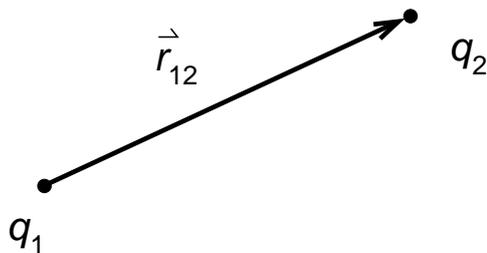
und des  $D_2$ -Moleküls sehr verschieden sind: das Verhältnis der kinetischen Energien ist etwa  $10^6$ , der mittlere Abstand der Protonen im  $D_2$ -Molekül in der Größenordnung von  $10^{-10}$  m, im He-Kern von  $10^{-15}$  m.

## 1.2 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das *Coulomb'sche* Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\vec{K}_{12} = \Gamma_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.1)$$

ist die von Ladung  $q_1$  auf Ladung  $q_2$  ausgeübte Kraft. Sie ist also umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den Ladungen. Hierbei ist  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  und  $\Gamma_e$  eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante.



**Abbildung 1.2:**

Verbindungsvektor  $\vec{r}_{12}$  zwischen zwei Ladungen.

### **Eigenschaften:**

- 1.) Anziehung (Abstoßung) für ungleichnamige (gleichnamige) Ladungen.
- 2.)  $\vec{K}_{12} = -\vec{K}_{21}$ : Actio = Reactio; also ist der Impuls der beiden Teilchen erhalten.
- 3.) Zentralkraft: da eine Punktladung (beschrieben durch die skalaren Größen  $m, q$ ) im Raum keine Richtung auszeichnet. ( $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung)

**Anmerkung:** Für (schnell) bewegte Ladungen gilt Gl. (1.1) nicht mehr. Das elektromagnetische Feld ist dann in die Impuls- und Drehimpulsbilanz einzubeziehen.

Gleichung (1.1) ist zu ergänzen durch das *Superpositionsprinzip*:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_{21} + \vec{K}_{31} \quad (1.2)$$

für die von 2 Punktladungen  $q_2$  und  $q_3$  auf  $q_1$  ausgeübte Kraft.

## Messvorschrift für Ladung

Vergleicht man 2 Ladungen  $q, q'$  am Ort  $\vec{r}_1$  anhand der von einer festen Ladung  $Q$  am Ort  $\vec{r}_2$  auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß Gl. (1.1):

$$\vec{K}_{12} = \Gamma_e \frac{qQ}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad \text{und} \quad \vec{K}'_{12} = \Gamma_e \frac{q'Q}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

und mit  $K = |\vec{K}_{12}|, K' = |\vec{K}'_{12}|$

$$\frac{q}{q'} = \frac{K}{K'} . \tag{1.3}$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer *Einheitsladung* (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

## Maßsysteme

Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten  $\Gamma_e$  gibt es 2 Möglichkeiten:

i) Gauß'sches *cgs*-System: Hier wählt man  $\Gamma_e$  als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e = 1 , \tag{1.4}$$

dann ist über Gl. (1.1) durch

$$[\text{Kraft}] = \frac{[\text{Ladung}]^2}{[\text{Länge}]^2}$$

die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] = \sqrt{[\text{Kraft}][\text{Länge}]} = \sqrt{\text{dyn}} \times \text{cm} , \tag{1.5}$$

wobei

$$1 \text{ dyn} = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} .$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Das Gauß'sche *cgs*-System ist in der theoretischen Physik noch relativ verbreitet.

ii) SI-System (Système International d'Unités). Zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) wird die Ladungseinheit *Coulomb* = Ampère-Sekunde definiert. Ampère-Definition: Ein Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorrufen würde. Schreibt man

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

so nimmt die Konstante  $\epsilon_0$  (die *Dielektrizität des Vakuums*) den Wert

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2} \quad (1.7)$$

an. Alternativ kann man

$$\Gamma_e = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \text{mit} \quad c = 2.9979250 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

verwenden, d.h.  $\epsilon_0$  lässt sich durch die fundamentalere Konstante der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausdrücken. Das *SI-System* hat sich in der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) durchgesetzt, und wir werden im Wesentlichen mit diesem System arbeiten.

### 1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen

Die von  $N$  ruhenden Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$  auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  ausgeübte Kraft ist nach (1.1) und (1.2):

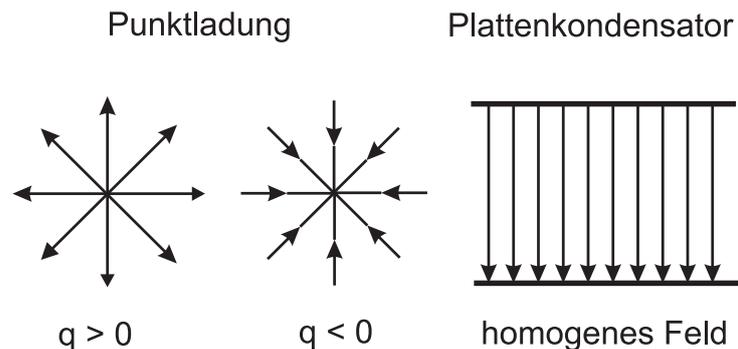
$$\vec{K} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = q \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.8)$$

wobei wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.9)$$

als (statisches) *elektrisches Feld* bezeichnen, das von den Punktladungen  $q_i$  am Ort  $\vec{r}$  erzeugt wird. Es ist gemäß (1.8) ein Vektorfeld, da  $q$  ein Skalar

**Abbildung 1.3:**  
Beispiele für von  
Ladungen erzeugte  
Felder.



ist. Bei vorgegebener Ladung  $q$  zeigt (1.8), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, dass die Probeladung so klein ist, dass man ihren Einfluss auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

### Elektrisches Potential

Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion  $\vec{E}(\vec{r})$  aus dem elektrischen Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1.10)$$

einer skalaren Funktion, durch Differentiation gewinnen:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.11)$$

Abb. 1.3 zeigt Beispiele für Gl. (1.11). Die (potentielle) Energie der ruhenden Massenpunkte mit den Ladungen  $q_i$  ist dann

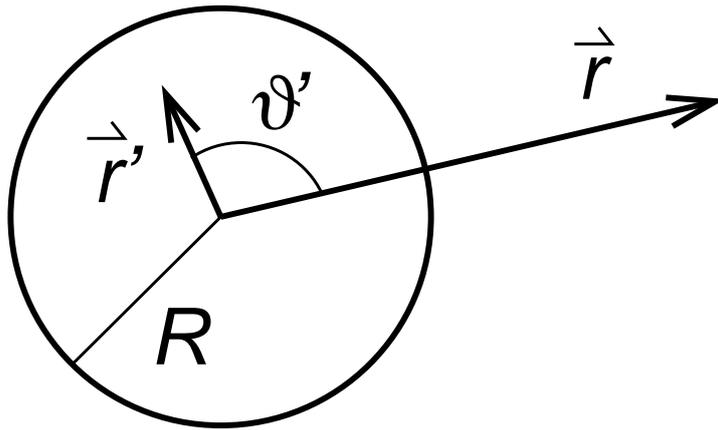
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\vec{r}_i), \quad (1.12)$$

wobei  $\Phi(\vec{r}_i)$  das Potential am Ort  $\vec{r}_i$  ist, das die Ladungen dort erzeugen. Der Faktor  $(1/2)$  auf der rechten Seite von (1.12) korrigierte die Doppelzählung der Beiträge in der Summe  $\sum_{i \neq j}$ . Bemerkung: In (1.12) muss streng genommen die *Selbstenergie* für  $i = j$  im rechten Ausdruck wieder abgezogen werden.

### 1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \dots \rightarrow \int dV \rho(\vec{r}) \dots, \quad (1.13)$$



**Abbildung 1.4:**  
 Koordinatensystem  
 für die Berechnung  
 des Potentials der  
 homogen geladenen  
 Kugel.

wobei  $\rho(\vec{r})$  die Ladungsdichte am Ort  $\vec{r}$  ist, mit der Normierung

$$Q = \sum_i q_i = \int dV \rho(\vec{r}) . \quad (1.14)$$

Damit tritt anstelle von (1.9), (1.10), (1.12):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} , \quad (1.15)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.16)$$

und

$$U = \frac{1}{2} \int dV \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) . \quad (1.17)$$

### Beispiel: homogen geladene Kugel

Wir betrachten die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (1.18)$$

und wählen ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Kugelmittelpunkt (siehe Fig. 1.4). Das Potential ist dann wegen  $(\vec{r} - \vec{r}')^2 = \vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\vec{r}' = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u = \cos \vartheta'$ ,  $du = -d\vartheta' \sin \vartheta'$  und der Tatsache, dass

$$\frac{d}{du} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} = \frac{-rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_1^{-1} (-du) \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \left[ \frac{1}{(-rr')} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r' \left( \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' \times \begin{cases} 2r'^2 & \text{für } r \geq r' \\ 2rr' & \text{für } r < r' \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Fallunterscheidung gilt für die Integrationsvariable; wir erhalten jetzt eine Lösung für eine Probeladung außerhalb der Kugel ( $r > R$ ), und eine zweite, gestückelte, für die Probeladung innerhalb der Kugel ( $r \leq R$ ):

$$\begin{aligned} r > R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r'^2 = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{R^3}{3} \\ r \leq R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \int_0^r dr' r'^2 + \int_r^R dr' rr' \right) = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{r^3}{3} + \frac{r}{2}(R^2 - r^2) \right) \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \end{aligned}$$

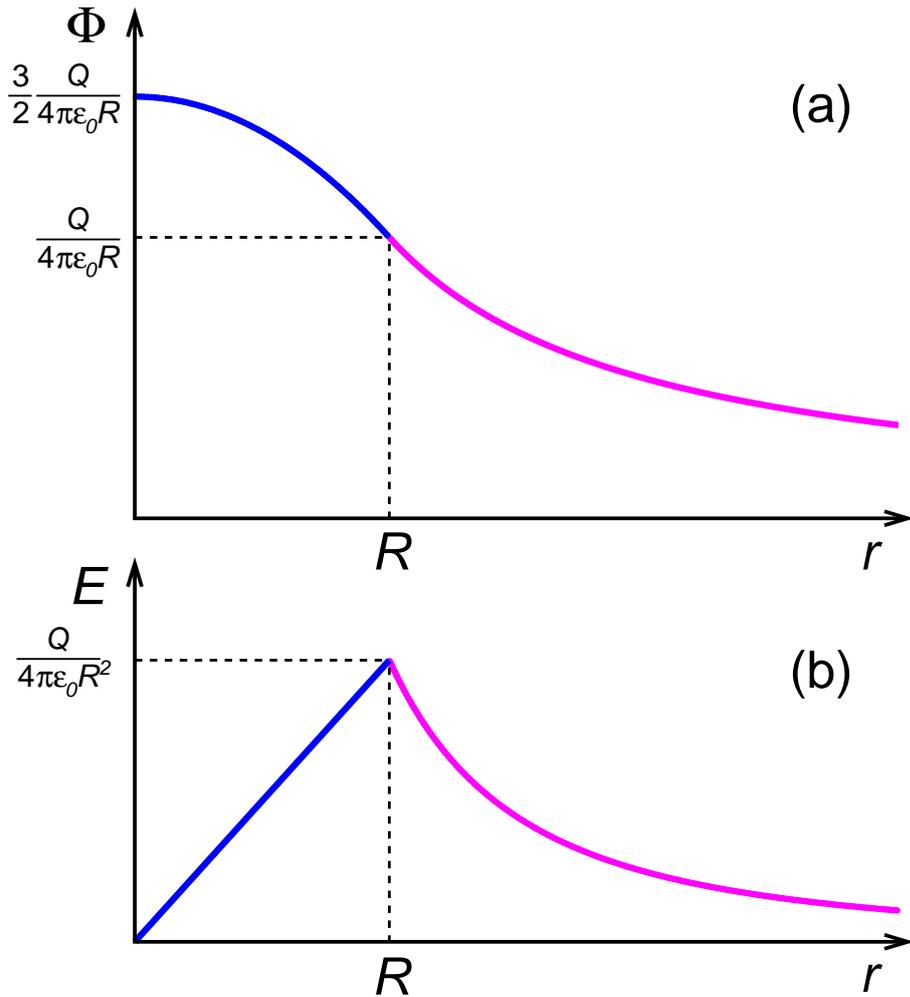
Mit der Dichte

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \curvearrowright \quad 4\pi\rho_0 = \frac{3Q}{R^3}$$

finden wir

$$\begin{aligned} r > R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r \leq R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dieses Potential ist in Fig. 1.5 (a) dargestellt.



**Abbildung 1.5:** Verlauf (a) des Potentials  $\Phi$  und (b) des Feldes  $|\vec{E}|$  der homogen geladenen Kugel für  $r \leq R$  und  $r > R$ .

Dann folgt für  $\vec{E}$  aus (1.11):

$$\begin{aligned}
 r > R: \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \\
 r \leq R: \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Der Betrag des elektrischen Feldes ist in Fig. 1.5 (b) zu sehen. Für die Energie  $U$  findet man mit (1.17) und (1.19):

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\rho_0}{2} \int dV \Phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^R dr r^2 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \\
 &= \frac{4\pi\rho_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^R dr r^2 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) = \frac{2\pi\rho_0^2}{\epsilon_0} \left[ \frac{r^3 R^2}{6} - \frac{r^5}{30} \right]_0^R \\
 &= \frac{2\pi\rho_0^2 2R^5}{\epsilon_0 15} = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \frac{2R^5}{15} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

## Anwendung: Bestimmung des klassischen Elektronenradius

Nach (1.21) wird die *Selbstenergie* eines punktförmigen Teilchens ( $R \rightarrow 0$ ) unendlich. Nun ist nach der Relativitätstheorie die Energie eines ruhenden Teilchens, z. B. eines Elektrons, mit seiner Ruhemasse  $m_0$  verknüpft durch

$$E_0 = m_0 c^2 . \quad (1.22)$$

Ein streng punktförmiges (geladenes) Teilchen hätte also nach (1.21) eine unendlich große Ruhemasse! Führen wir andererseits die gesamte (endliche) Ruhemasse eines Elektrons auf seine elektrostatische Energie zurück, so müssen wir dem Elektron einen endlichen Radius  $R_0$ , den *klassischen Elektronenradius* zuordnen,

$$R_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \approx 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm} = 10^{-5} \text{ \AA} . \quad (1.23)$$

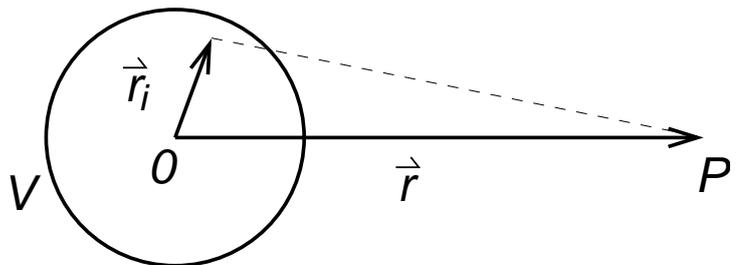
Für Dimensionen  $< 10^{-15}$  m müssen wir also für Elektronen mit Abweichungen vom Coulomb'schen Gesetz rechnen.

## 1.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine auf ein endliches Volumen  $V$  begrenzte Ladungsverteilung (diskret oder kontinuierlich) und untersuchen ihr Potential  $\Phi$  in einem Punkt  $P$  weit außerhalb von  $V$ .

### **Abbildung 1.6:**

Geometrie zur Berechnung des Potentials an einem Punkt  $P$  weit entfernt von den Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$ .



Der Koordinatenursprung  $0$  möge innerhalb von  $V$  liegen; wir können z.B.  $0$  als Ladungsschwerpunkt, definiert durch

$$\vec{r}_q = \frac{\sum_i |q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |q_i|} \quad (1.24)$$

wählen. Die Beträge sind dabei nötig, da es positive und negative Ladungen gibt. Solange  $r_i \ll r$ , können wir (1.10) durch eine Taylor-Reihe darstellen,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots , \quad (1.25)$$

wenn wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)/r^2}} \quad (1.26)$$

verwenden und in  $(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)/r^2$  entwickeln. Mit  $(1-x)^{-1/2} = 1+x/2+3x^2/8+O(x^3)$  ergibt sich:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)^2}{r^5} + \dots \quad (1.27)$$

Wenn wir nun noch die Terme geeignet nach Potenzen von  $x_i/r$  etc. zusammenfassen, finden wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (1.28)$$

Für das elektrostatische Potential  $\Phi(\vec{r})$  finden wir somit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta}{r^5} + \dots \quad (1.29)$$

Die Terme bedeuten:

### 1.) Monopol-Anteil

$$\Phi_0(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{mit} \quad \boxed{Q = \sum_i q_i} \quad (1.30)$$

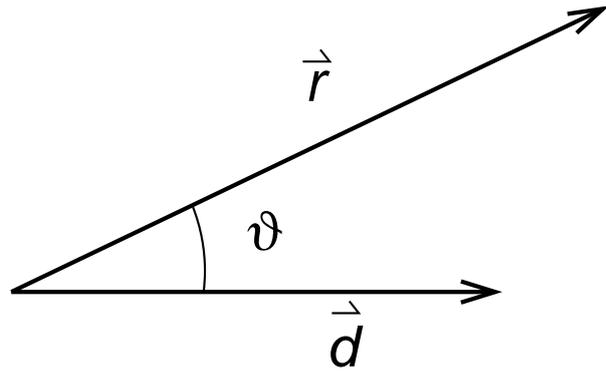
Die Gesamtladung (oder *Monopolmoment*)  $Q$  erzeugt in 0. Näherung (nullter Näherung) der Taylor-Entwicklung ein Feld, das aus genügend großer Entfernung dem einer im Ursprung lokalisierten Punktladung entspricht.

### 2.) Dipol-Anteil

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i} \quad (1.31)$$

$\vec{d}$  ist das *Dipolmoment*. Der Winkel  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{d}$ .

**Abbildung 1.7:** Winkel zwischen Beobachtungspunkt  $\vec{r}$  und Dipolmoment  $\vec{d}$ .



### Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung

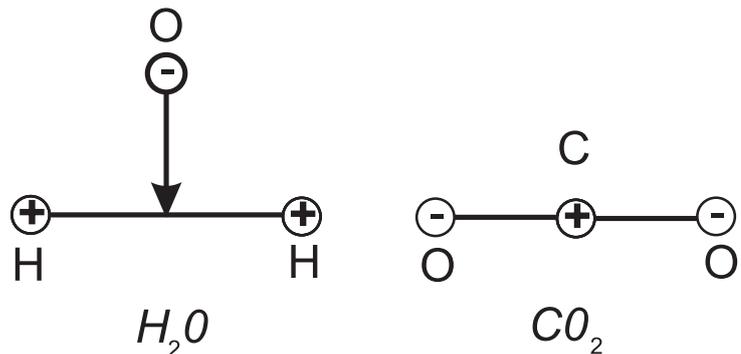
Verschiebt man den Ursprung 0 um  $\vec{a}$ , so wird

$$\vec{d}' = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{a}) = \vec{d} - Q\vec{a}. \quad (1.32)$$

Falls  $Q \neq 0$ , kann man  $\vec{a}$  so wählen, dass  $\vec{d}' = 0$  wird. Wenn dagegen  $Q = 0$  ist, so wird dagegen  $\vec{d} = \vec{d}'$  unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems.

**Konstruktionsanleitung:** Man bestimme die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladungsträger. Fallen diese zusammen, so ist  $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i = 0$ . Andernfalls gibt ihre Verbindungslinie die Richtung von  $\vec{d}$ ; ihr Abstand ist ein Maß für den Betrag von  $\vec{d}$ .

**Abbildung 1.8:** Beispiel der Bestimmung des Dipolmoments für zwei Moleküle, Wasser und Kohlendioxid.



### 3.) Quadrupol-Anteil.

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta}{r^5} \quad (1.33)$$

Aus  $r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta = \sum_i q_i \left[ 3 (\vec{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 r^2 \right]$  finden wir für die Elemente  $Q_{\alpha\beta}$  des *Quadrupoltensors*  $Q$ :

$$\boxed{Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i \left( 3r_i^\alpha r_i^\beta - \delta_{\alpha\beta} r_i^2 \right)} \quad (1.34)$$

Hierbei sind die Indizes  $\alpha, \beta = x, y, z$  (mit  $\vec{r} = (r^x, r^y, r^z)$  und  $\vec{r}_i = (r_i^x, r_i^y, r_i^z)$ ) und die Einsteinsche Summenkonvention gilt in (1.33).

**Anmerkung:** Die Hoch- und Tiefstellung der Indizes bedeutet kontravariante ( $r^\alpha$ ) und kovariante ( $r_\alpha$ ) Vektorkomponenten (Tensorcomponenten). In strenger Form verlangt die Einsteinsche Summenkonvention Summation über Indizes, die im selben Term einmal hoch-, einmal tiefgestellt vorkommen. Allerdings bedeutet die Vorschrift

$$r_\alpha = g_{\alpha\beta} r^\beta$$

der Umrechnung von kontravarianten in kovariante Vektorkomponenten, dass man diese wegen der Metrik

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  nicht unterscheiden muss. Daher wird die Summenkonvention im  $\mathbb{R}^3$  häufig so verwendet, dass einfach über wiederholte Indizes summiert werden muss.

Eigenschaften des Quadrupoltensors: 1) Der Quadrupoltensor ist spurlos, denn

$$\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = \sum_\alpha \sum_i q_i \left( 3r_i^\alpha r_i^\alpha - \delta_{\alpha\alpha} r_i^2 \right) = \sum_i q_i \left( 3r_i^2 - 3r_i^2 \right) = 0$$

2) Der Quadrupol-Tensor ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden. Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik. 3) Die Zahl der unabhängigen Einträge des Quadrupoltensors ist 5, nach Rotation ins Hauptachsensystem 2.

Im Hauptachsensystem ist der Quadrupol-Tensor diagonal,  $Q_{\alpha\beta} = Q_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ . Wir finden

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_i q_i \left( 3x_i^2 - r_i^2 \right) = \sum_i q_i \left( 2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 \right), \\ Q_y &= \sum_i q_i \left( 2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2 \right), \\ Q_z &= \sum_i q_i \left( 2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2 \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

(1.35) zeigt, dass die Eigenwerte  $Q_\alpha$  die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen werden die folgenden Terme alle gleich:

$$\sum_i q_i x_i^2 = \sum_i q_i y_i^2 = \sum_i q_i z_i^2 \rightarrow Q_\alpha = 0. \quad (1.36)$$

Ein Element  $Q_\alpha \neq 0$  des Quadrupoltensors bedeutet also eine Abweichung von der sphärischen Symmetrie der Ladungsverteilung.

### Spezialfall: Axialsymmetrie

Wir betrachten Rotationsinvarianz um die z-Achse. Dann wird

$$Q_x = Q_y = \sum_i q_i (x_i^2 - z_i^2) = -\frac{1}{2} \sum_i q_i (2z_i^2 - 2x_i^2) = -\frac{1}{2} Q_z, \quad (1.37)$$

d.h. der Quadrupol-Anteil  $\Phi_2(\vec{r})$  ist durch eine Zahl, das *Quadrupolmoment*  $Q_0 \equiv Q_z/2$ , zu kennzeichnen. Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von  $\Phi_2$  leicht anzugeben (wir verwenden  $Q_z = 2Q_0$ ,  $Q_x = Q_y = -Q_0$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_z z^2}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{2r^3}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

wobei  $\vartheta = \arccos(z/r)$  dem Winkel zwischen dem Vektor  $\vec{r}$  und der Symmetrieachse (der z-Achse) entspricht. Gleichung (1.38) zeigt die für den Quadrupol-Anteil charakteristische r-Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich verschieden von der des Dipol-Terms (1.31).

### Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Analog zu Abschnitt 1.4 erhalten wir für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung das Dipolmoment:

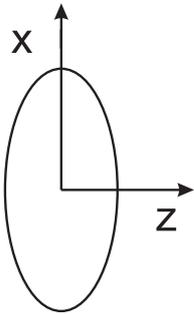
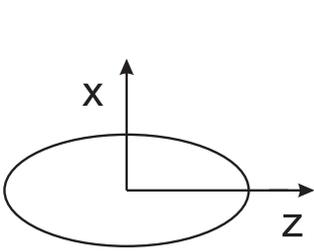
$$\vec{d} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'. \quad (1.39)$$

Analog wird Gleichung (1.34) für die Elemente des Quadrupoltensors zu:

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3r'^\alpha r'^\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2). \quad (1.40)$$

**Beispiel:** Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert.

Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*,  $Q_0 > 0$ , als auch *negativ*,  $Q_0 < 0$ , sein, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.



**Abbildung 1.9:** Beispiele für axialsymmetrisch deformierte Ladungsverteilungen.

## 2. Grundlagen der Elektrostatik

---

### 2.0 Wichtige Integralsätze

Im folgenden werden wir wiederholt die folgenden beiden Integralsätze im  $\mathbb{R}^3$  benötigen (in der Vektoranalysis werden sie in allgemeinerer Form bzw. für den  $\mathbb{R}^n$  bewiesen).

#### Stokesscher Integralsatz (Rotationssatz)

Der Rotationssatz setzt das Flächenintegral über eine Ableitung einer Funktion mit dem Linienintegral dieser Funktion über den Rand der Fläche in Beziehung.

Sei  $\vec{A}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf einer abgeschlossenen, stetig partiell differenzierbaren Fläche  $F$  im  $\mathbb{R}^3$  mit stückweise glattem Rand  $\partial F$ . Dann gilt:

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_F d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

#### Gaußscher Integralsatz (Divergenzsatz)

Der Divergenzsatz setzt das Volumenintegral über eine Ableitung einer Funktion zum Integral der Funktion über die geschlossene Fläche, die das Volumen einschließt, in Beziehung.

Sei  $\vec{A}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld im abgeschlossenen Gebiet  $V \subset \mathbb{R}^3$ , dessen Rand von einer geschlossenen, stetig partiell differenzierbaren Fläche  $\partial V$  gebildet wird. Dann gilt:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_V d^3r \text{div } \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

wobei  $d\vec{f} = \vec{n}df$  mit nach außen zeigender Flächennormale  $\vec{n}$ .

Wegen dieser Integralsätze kann man viele physikalische Gesetze sowohl in einer differentiellen als auch in einer integralen Form schreiben.

## 2.1 Fluss eines Vektor-Feldes

Wir wollen im folgenden nach äquivalenten Formulierungen des Coulomb'schen Gesetzes suchen. Dazu führen wir den Begriff des Flusses eines Vektor-Feldes ein.

Ein Vektor-Feld  $\vec{A}(\vec{r})$  sei auf einer Fläche  $F$  definiert.  $F$  sei *messbar* und *zweiseitig*, d.h.  $F$  möge einen endlichen Flächeninhalt besitzen und *Ober-* und *Unterseite* von  $F$  seien (durch die Flächennormale  $\vec{n}$ ) wohl definiert.

**Gegenbeispiel:** das Möbius'sche Band.

Den Fluss  $\phi$  des Vektor-Feldes  $\vec{A}$  durch die Fläche  $F$  definieren wir dann durch das Oberflächenintegral

$$\phi = \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F A_n df, \quad (2.3)$$

wobei  $A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$  die Komponente von  $\vec{A}$  in Richtung der Flächennormalen  $\vec{n}$  ist. Das gerichtete Flächenelement  $d\vec{f}$  ist parallel zu  $\vec{n}$ ,  $d\vec{f} = |d\vec{f}|$ .

Zur Interpretation von (2.3) betrachten wir eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r})$  und der Dichte  $\rho(\vec{r})$ . Wählen wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

so bedeutet

$$\int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \quad (2.5)$$

die pro Zeiteinheit durch  $F$  fließende Menge Flüssigkeit. (2.5) zeigt, dass nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam wird.

## 2.2 Gaußsches Gesetz

Wir wählen nun für  $\vec{A}$  das elektrostatische Feld  $\vec{E}$  und für  $F$  eine geschlossene Fläche mit den oben erwähnten Eigenschaften. Dann ist der *elektrische Fluss*

$$\phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_F E_N df \quad (2.6)$$

mit der in dem Volumen  $V$  enthaltenen Gesamtladung  $Q$  verknüpft durch das *Gaußsche Gesetz*:

$$\phi = \oint_F d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

In Worten: Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche ist proportional zur im Innern dieser Oberfläche enthaltenen Ladung.

Für eine beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  lautet das Gaußsche Gesetz: Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  ein Volumen und  $\vec{E}(\vec{x})$  ein elektrisches Feld, das auf dem Rand  $\partial V$  von  $V$  wohldefiniert ist, dann gilt:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \quad (2.8)$$

wobei  $\rho(\vec{x})$  die Ladungsdichte ist, die  $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$  erzeugt, und  $d\vec{f}(\vec{y})$  ist das gerichtete Flächenelement auf  $\partial V$ ;  $d\vec{f}(\vec{y})$  ist ein Vektor, der normal zur Tangentenebene bei  $\vec{y}$  ist und dessen Länge proportional zum Flächenelement  $df$  ist.

### Beweis des Gaußschen Gesetzes

Das Gaußsche Gesetz ist eine Konsequenz des Coulombgesetzes. Wegen des Superpositionsprinzips genügt es, das Gaußsche Gesetz für eine Punktladung  $q$  abzuleiten. O.B.d.A. legen wir diese Punktladung in den Ursprung  $\vec{0}$ . Dann ist zu zeigen:

$$\int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \quad (2.9)$$

mit  $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ .

Wir beginnen mit dem

2. Fall:  $\vec{0} \notin V$ . Dann ist  $\vec{E}(\vec{x})$  überall im Innern von  $V$  definiert, und wir können den Divergenzsatz anwenden. Dazu berechnen wir:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{1}{r} = 0, \quad (2.10)$$

denn (mit Summenkonvention)

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} &= -\partial_\alpha \left( \frac{x_\alpha}{r^3} \right) = -\frac{(\partial_\alpha x_\alpha)}{r^3} - x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3} \\
 \partial_\alpha x_\alpha &= \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3 \\
 \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{3}{r^4} \frac{x_\alpha}{r} = -\frac{3x_\alpha}{r^5} \\
 x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= -\frac{3x_\alpha x_\alpha}{r^5} = -\frac{3}{r^3} \\
 \curvearrowright \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Damit ist

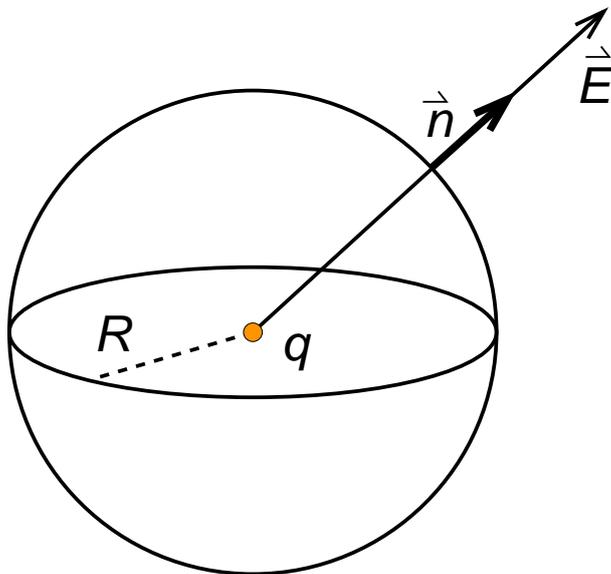
$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{0} \tag{2.12}$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz (Gl. (2.2)) folgt also

$$\int_V d^3x \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{0} \notin V, \tag{2.13}$$

was den zweiten Fall von Gl. (2.9) beweist.

1. Fall:  $\vec{0} \in V$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $V$  durch eine kleine Kugel mit Zentrum  $\vec{0}$  und Radius  $R$  ersetzen, da wir mit dem 2. Fall beliebige leere Volumina  $V$  erledigt haben. Dann ist in jedem Punkt der Kugeloberfläche  $\vec{E}$  parallel zur (äußeren) Flächennormale  $\vec{n}$  (siehe Fig. 2.1).



**Abbildung 2.1:**

Punktladung  $q$  in einer kleinen Kugel mit Radius  $R$ : Das elektrische Feld  $\vec{E}$  ist in jedem Punkt der Kugeloberfläche parallel zum Normalenvektor  $\vec{n}$ .

Für die Integration bei der Berechnung des Flusses wählen wir Kugelkoordinaten

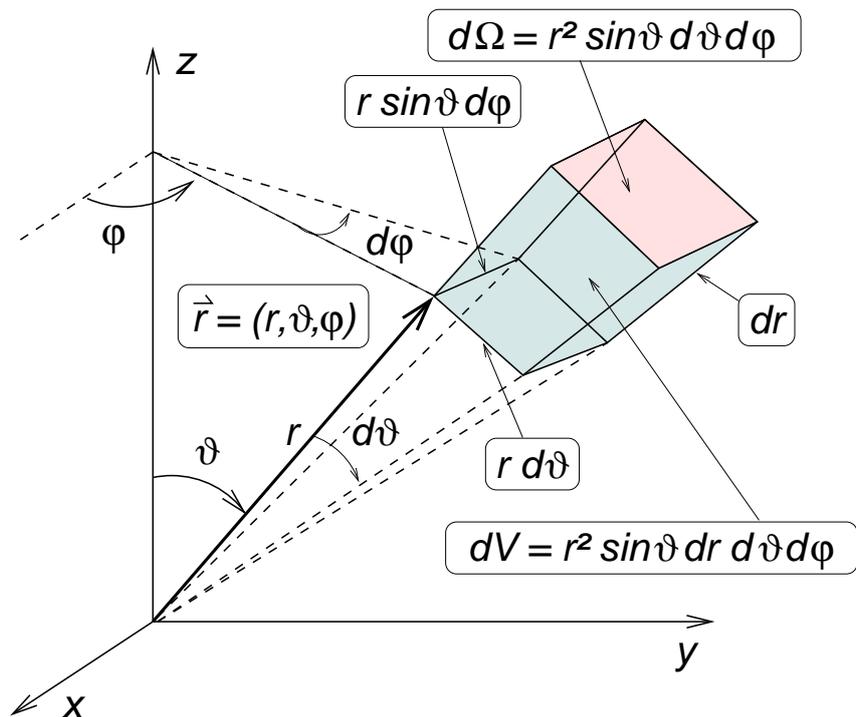
$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad x_3 = r \cos \vartheta \quad (2.14)$$

und haben deshalb das Flächenelement (siehe Fig. 2.2)

$$df = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.15)$$

und  $d\vec{f}(\vec{r}) = df \vec{e}_r$ .

**Abbildung 2.2:**  
Geometrische Bestimmung des Raumwinkelelementes  $d\Omega$  und des Volumenelementes  $dV$  in Kugelkoordinaten.



Der Fluss ist damit

$$\oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \frac{1}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

wobei wir  $\vec{E} \parallel \vec{n}$  im Skalarprodukt benutzt haben. Damit haben wir auch den 1. Fall von Gl. (2.9) mit  $\vec{0} \in V$  bewiesen.

### 2.3 Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet Gl. (2.7) die Möglichkeit, die Feldstärke  $\vec{E}$  mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten zwei Beispiele:

## 1.) Feld einer homogen-raumgeladenen Kugel

Sei

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) \quad \text{für } r \leq R, \quad \rho(\vec{r}) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (2.17)$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  radial gerichtet, so dass für den Fluss  $\Phi$  gilt

$$\Phi = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = E(r) \int_{\partial V} df = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0}, \quad (2.18)$$

wobei  $Q_r = \int_V d^3r \rho(\vec{r})$  die in einer konzentrischen Kugel  $V$  mit Radius  $r$  enthaltene Ladung ist.

Für Punkte mit  $r \geq R$  ist  $Q_r = Q$  die Gesamtladung und es folgt aus (2.18):

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r \geq R. \quad (2.19)$$

Für  $r \leq R$  hängt das Ergebnis von der speziellen Form von  $\rho(r)$  ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const}, \quad (2.20)$$

dann wird:

$$Q_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad (2.21)$$

also wie in (1.20):

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r. \quad (2.22)$$

Man vergleiche den Rechenaufwand hier mit dem, den Gleichung (1.15) erfordert!

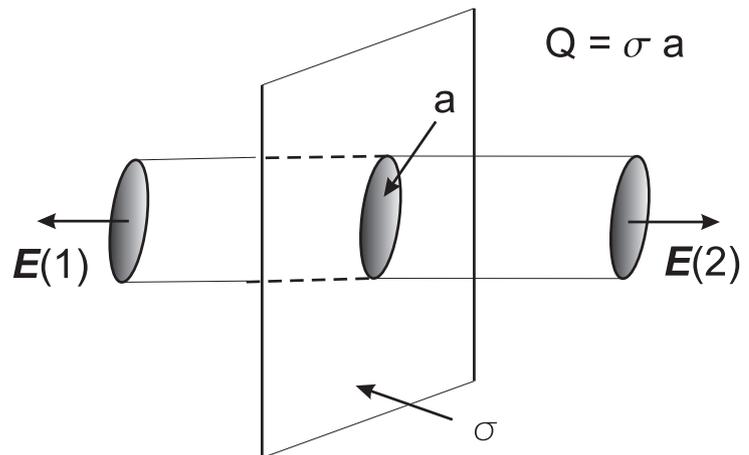
## 2.) Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene

Aus Symmetriegründen steht  $\vec{E}$  senkrecht zur Ebene, der Betrag  $E$  ist gleich für die Punkte 1 und 2, die von der Ebene den Abstand  $r$  haben mögen. Das Gauß'sche Gesetz ergibt dann:

$$\Phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = aE(1) + aE(2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}, \quad (2.23)$$

**Abbildung 2.3:**

Illustration des zur geladenen Ebene symmetrischen, zylinderförmigen Integrationsvolumens.



wenn  $\mathbf{a}$  die Zylindergrundfläche ist und  $\sigma$  die Flächenladungsdichte (siehe Abb. 2.3). Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da  $\vec{E}$  keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Wir erhalten für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.24)$$

unabhängig von  $r$ . Da das elektrische Feld auf beiden Seiten von der Flächenladung wegzeigt, bedeutet das Ergebnis, dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes (hier die einzige von Null verschiedene Komponente) an der Flächenladung um den Betrag  $\sigma/\epsilon_0$  springt. Wir erhalten also für das elektrische Feld (mit  $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_3$ )

$$\vec{E}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{\alpha\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 > 0 \\ \frac{(\alpha-1)\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

mit konstantem  $\alpha$ . Das zugehörige Potential ist

$$\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{cases} -\frac{\alpha\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{x}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 > 0 \\ \frac{(1-\alpha)\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{x}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

und damit für jede Wahl von  $\alpha$  stetig.  $\alpha$  wird durch die Randbedingungen bei  $\mathbf{x}_3 = \pm\infty$  festgelegt (die natürliche Wahl, dass das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet, ist hier nicht mit den Feldgleichungen vereinbar).

Etwas besser sieht das beim Plattenkondensator aus, den wir (idealisiert) als zwei parallele, geladene, unendlich ausgedehnte Ebenen beschreiben, eine bei  $\mathbf{x}_3 = 0$  mit Ladungsdichte  $\sigma$ , eine bei  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}$  mit Ladungsdichte  $-\sigma$ . Das Superpositionsprinzip bedeutet, dass das elektrische Feld dieser

Konfiguration gerade die Summe (mit verschiedenen Vorzeichen) der obigen Lösungen ist. Die eindeutige Lösung, bei der das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet, ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{für } x_3 > 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_3 & \text{für } 0 < x_3 < b \\ \vec{0} & \text{für } x_3 > b \end{cases} \quad (2.27)$$

und das Potential ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} C & \text{für } x_3 > 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x_3 + C & \text{für } 0 < x_3 < b \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} b + C & \text{für } x_3 > b \end{cases} \quad (2.28)$$

Die Differenz des Potentials bei  $x_3 = 0$  und  $x_3 = b$  ist gerade  $\sigma b / \epsilon_0$ . Das entspricht der Arbeit  $W = bE_3$ , die eine Einheitsladung beim Durchgang durch den Kondensator leisten muss (oder aufnimmt).

## 2.4 Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential

Wir wollen das Gauß'sche Gesetz (2.7) in differentieller Form darstellen. Dazu formen wir das Flächenintegral um in ein Volumenintegral über das von  $F$  eingeschlossene Volumen  $V$  (Gaußscher Integralsatz):

$$\oint_F \vec{d}\vec{f} \cdot \vec{E} = \int_V dV \nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (2.29)$$

Mit

$$Q = \int_V dV \rho(\vec{r}) \quad (2.30)$$

folgt dann:

$$\int_V dV \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0 . \quad (2.31)$$

Gleichung (2.31) muss für beliebige Volumina  $V$  gelten, kann also nur erfüllt sein, wenn der Integrand verschwindet:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} . \quad (2.32)$$

Dies ist eine der zwei Feldgleichungen der Elektrostatik. Gleichung (2.32) ändert sich nicht, wenn man zu  $\vec{E}$  eine beliebige divergenzfreie Vektorfunktion  $\vec{E}'$  addiert; Gleichung (2.32) reicht daher zur Bestimmung des elektrischen Feldes nicht aus.

### Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Eine weitere differenzielle Beziehung für  $\vec{E}$  erhalten wir aus (vgl. (1.11))

$$\vec{E} = -\nabla\Phi, \quad (2.33)$$

wobei  $\Phi$  hier das elektrische Potential ist. Wir verwenden jetzt die Beziehung

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0, \quad (2.34)$$

die hier für das Potential geschrieben ist, aber allgemein gilt. Für jede der drei Komponenten ist

$$(\nabla \times \vec{E})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0 \quad (2.35)$$

wegen der Antisymmetrie von  $\epsilon_{ijk}$ . Z.B. gilt

$$i = 1: \quad \epsilon_{1jk} \partial_j \partial_k = \underbrace{\epsilon_{123}}_{=+1} \partial_2 \partial_3 + \underbrace{\epsilon_{132}}_{=-1} \partial_3 \partial_2 = 0. \quad (2.36)$$

Gleichung (2.33) ist über die Vektoridentität Gl. (2.34) äquivalent zur *Wirbelfreiheit*

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \quad (2.37)$$

des elektrischen Feldes. Dies ist die zweite der Feldgleichungen der Elektrostatik. Sie besagt, dass das durch das elektrische Feld definierte Kraftfeld konservativ ist, d.h. dass

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad (2.38)$$

d.h. auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet. Das folgt aus dem Stokesschen Integralsatz

$$\oint_{\partial F} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}), \quad (2.39)$$

wobei  $F$  eine zweidimensionale Fläche mit eindimensionalem Rand  $\partial F$  ist. Aus (2.32) und (2.37) kann man bei gegebener Ladungsverteilung  $\rho$  die

Feldstärke des elektrostatischen Feldes bestimmen, was jedoch recht aufwendig ist.

### Poisson'sche Gleichung

In der Praxis geht man noch einen Schritt weiter von der Feldstärke  $\vec{E}$  zum Potential  $\Phi$ , aus dem sich durch Differentiation gemäß (2.33)  $\vec{E}$  gewinnen lässt. Setzt man (2.33) in (2.32) ein, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.40)$$

die *Poisson'sche Gleichung* mit der Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.41)$$

für den *Laplace-Operator*  $\Delta$ . Die Poisson-Gleichung kann anstelle der beiden Feldgleichungen (2.32) und (2.37) gelöst werden.

### Laplace Gleichung

Hat man eine Lösung von (2.40) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, der *Laplace-Gleichung*,

$$\Delta \Phi = 0 \quad (2.42)$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.40). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen!

## 2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Die Kraft, die eine Ladung im elektrischen Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  erfährt, ist  $\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$ . Das elektrische Feld ist seinerseits der negative Gradient des elektrischen Potentials  $\Phi(\vec{x})$ . Daher ist die elektrische Kraft, die die Probeladung  $q$  erfährt, gerade der negative Gradient von  $q\Phi(\vec{x})$ . Dies ist also die potentielle elektrische Energie, die die Probeladung im elektrischen Kraftfeld besitzt.

Insbesondere ist die Arbeit

$$W = - \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = q \int_A^B d\vec{l} \cdot \nabla \Phi(\vec{x}) = q\Phi(\vec{x}_B) - q\Phi(\vec{x}_A) \quad (2.43)$$

gerade die Differenz der potentiellen Energie an den Endpunkten. Mit dem Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \quad (2.44)$$

der Punktladung  $q_1$  am Ort  $\vec{x}_1$  ist die potentielle Energie, die man gewinnt (benötigt), um eine zweite Punktladung  $q_2$  aus dem Unendlichen (wo das Potential verschwindet) auf den Abstand  $r_{12} = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$  heranzubringen

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (2.45)$$

Jetzt betrachten wir  $N$  Punktladungen  $q_i$  bei  $\vec{x}_i$ . Wir können die elektrostatische Energie dieser Konfiguration berechnen, indem wir die Punktladungen sukzessive aus dem Unendlichen ins Potential der vorhandenen Punktladungen einführen; wegen des Superpositionsprinzips ergibt das die Energie

$$U_N = U_{N-1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i q_N}{|\vec{x}_i - \vec{x}_N|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.46)$$

Der Faktor  $1/2$  sorgt dafür, dass Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung  $i \neq j$  schließt *Selbstenergien* der Punktladungen aus.

### Punktladungen versus Feldenergie

Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man  $U$  als die *potentielle Energie* eines Systems von geladen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie  $U$  im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von *Feldenergie*. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

### Energie des elektrischen Feldes

Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, gehen wir von den Punktladungen in Gl. (2.46) zunächst zu Ladungsdichten über (vergl. Kap. 1.4):

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.47)$$

Mit dem Potential, das eine Ladungsdichte  $\rho$  am Ort  $\vec{x}$  erzeugt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.48)$$

wird das zu

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}), \quad (2.49)$$

Gleichung (2.49) können wir mit Gl. (2.40)  $\rho = -\epsilon_0 \Delta \Phi$  umschreiben zu:

$$\mathbf{U} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \Phi(\vec{x}) \Delta \Phi(\vec{x}). \quad (2.50)$$

Gleichung (2.50) beschreibt die Energie  $\mathbf{U}$  vollständig durch das Potential  $\Phi$ , d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann  $\mathbf{U}$  statt durch das Potential  $\Phi$  durch die Feldstärke  $\vec{E}$  ausdrücken, wenn man die Identität

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \Delta g \quad (2.51)$$

für  $f = g = \Phi$  benutzt und den Gauß'schen Integralsatz anwendet, wonach

$$\int_V dV \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \Phi \nabla \Phi \quad (2.52)$$

Da wir in Gl. (2.50) über den ganzen  $\mathbb{R}^3$  integriert haben, betrachten wir jetzt wachsende Volumina  $V \rightarrow \infty$  mit entsprechend wachsenden Oberflächen  $\partial V$ :

$$\mathbf{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\nabla \Phi(\vec{x}))^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \Phi \nabla \Phi, \quad (2.53)$$

Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.53) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen  $V$ , da  $\Phi \nabla \Phi$  mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie  $R^{-3}$  abfällt, während die Oberfläche nur mit  $R^2$  anwächst. Im Limes  $V \rightarrow \infty$  bleibt also:

$$\mathbf{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x (\nabla \Phi(\vec{x}))^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (2.54)$$

als die im elektrischen Feld gespeicherte Energie.

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{x})|^2}$$

ist somit die *Energiedichte* des elektrischen Feldes. Diese ist immer positiv, was etwas überrascht, da die potentielle Energie  $U_N$  aus Gl. (2.46) nicht immer positiv ist. Grund sind die bei  $U_N$  abgezogenen Selbstenergien, die in Gl. (2.54) enthalten sind und  $U$  für Punktladungen unendlich werden lassen.

## 2.6 Multipole im elektrischen Feld

Wenn eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  in ein äußeres elektrostatisches Feld, gegeben durch sein Potential  $\Phi_a$ , gebracht wird, so gilt (entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.5) für seine Energie

$$U = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi_a(\vec{x}), \quad (2.55)$$

wenn man annimmt, dass das äußere Feld durch  $\rho$  nicht (merklich) geändert wird und die das äußere Feld  $\Phi_a$  hervorrufenden Ladungen sich außerhalb des Gebietes  $V$  befinden, auf das  $\rho$  beschränkt ist. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors  $1/2$  in Gl. (2.55) verglichen mit Gl. (2.49). Weiter sei  $\Phi_a$  in  $V$  langsam veränderlich, so dass wir  $\Phi_a$  bzgl. des Ladungsschwerpunktes von  $\rho(\vec{x})$  (den wir o.B.d.A. in den Ursprung des  $\vec{x}$ -Systems legen) in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\Phi_a(\vec{x}) = \Phi_a(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \Phi_a(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_a(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \quad (2.56)$$

Da im Gebiet  $V$  für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \vec{E}_a = 0 \quad (2.57)$$

nach Annahme gilt, können wir (vergl. Abschnitt 1.5) Gleichung (2.56) wie folgt umformen:

$$\Phi_a(\vec{x}) = \Phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots, \quad (2.58)$$

denn der ergänzte Term trägt nichts bei:

$$\sum_{i,j} (-r^2) \delta_{ij} \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j} = -r^2 \sum_i \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_i} = -r^2 \nabla \cdot \vec{E}_a = 0.$$

Kombination von Gl. (2.55) und Gl. (2.58) ergibt zusammen mit  $Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{kl})$  (siehe (1.34))

$$\mathbf{U} = Q\Phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 d_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots \quad (2.59)$$

Gleichung (2.59) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung  $\rho$  mit einem äußeren Feld  $\vec{E}_a$  in Wechselwirkung treten:

- i) Wenn die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x}')$  eine Gesamtladung  $Q \neq 0$  besitzt, dann beschreibt der erste Term die potentielle Energie  $\mathbf{U} = Q\Phi_a(0)$  einer Ladung  $Q$  im äußeren Potential  $\Phi_a(0)$ . Die Gesamtladung  $Q$  wechselwirkt also mit dem Potential  $\Phi_a$ .
- ii) Wenn  $Q = 0$  ist, dann ist der führende Term  $\mathbf{U} = -\vec{d}\vec{E}_a(0)$  der Dipolterm. Das Dipolmoment  $\vec{d}$  wechselwirkt also mit der Feldstärke  $\vec{E}_a$ . Dieser Ausdruck wird oft auf einen ortsfesten Dipol  $\vec{d}$  am Ort  $\vec{x} = \vec{0}$  angewendet, der aber seine Orientierung relativ zum Feld  $\vec{E}_a(0)$  (bei  $\mathbf{d} = |\vec{d}| = \text{const}$ ) ändern kann. Dann ist  $\mathbf{U} = -dE_a(0) \cos \vartheta$  (mit Winkel  $\vartheta$  zwischen  $\vec{d}$  und  $\vec{E}_a(0)$ ). Minimale potentielle Energie stellt sich für  $\vartheta = 0$  ein (wegen des Vorzeichen des Terms). Wenn das elektrische Feld homogen ist ( $\vec{E}(\mathbf{x}) = \text{const}$ ), hat der Dipol an jeder Stelle des Feldes dieselbe potentielle Energie. Es ist also nur für ein inhomogenes äußeres Feld ein Dipolbeitrag zur Kraft auf eine Ladungsverteilung zu erwarten. (Auch im inhomogenen elektrischen Feld kann es ein Drehmoment geben.)
- iii) Wenn  $Q = 0$  und  $\vec{d} = 0$  sind, dann ist der führende Term der Quadrupolterm. Er leistet nur in inhomogenen Feldern  $\partial_j E_{ia} \neq 0$  einen Beitrag. Der Quadrupoltensor  $Q_{ij}$  wechselwirkt also mit dem Feldgradienten  $\partial E_{ia}/\partial x_j$ . Wegen der Symmetrie des Quadrupolmomentes  $Q_{ij} = Q_{ji}$  kann man den Quadrupolbeitrag zur Energie auch symmetrisiert schreiben:

$$-\frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \partial_j E_{ia}(0) = -\frac{1}{12} \sum_{ij} Q_{ij} (\partial_j E_{ia}(0) + \partial_i E_{ja}(0)) \quad (2.60)$$

### Anwendungsbeispiele

Atomare Dipole im äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolmoments mit der Elektronenhülle.

## 3. Randwertprobleme der Elektrostatik

---

### 3.0 Grundproblem der Elektrostatik

Die Aufgabe der Elektrostatik besteht in der Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

für eine gegebene Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$ . Die Poisson-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung erst eindeutig wird, wenn Randbedingungen vorgegeben werden. Besonders einfach: Das Potential  $\Phi(\vec{x})$  soll im Unendlichen verschwinden:

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \Phi(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Die beiden Gleichungen (3.1) und (3.2) zusammen heißen Randwertproblem. Für dieses Randwertproblem ist die Lösung bereits bekannt:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.3)$$

Es gibt sehr viele verschiedenen Typen von Randwertproblemen, besonders im Endlichen, und hier werden nur einige ausgewählte typischen Situationen behandelt.

### 3.1 Eindeigkeitstheorem

Wir wollen im folgenden zeigen, dass die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der folgenden Randbedingungen gilt:

(i) Dirichlet - Bedingung

$$\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } \partial V, \text{ oder} \quad (3.4)$$

(ii) von Neumann-Bedingung

$$\nabla\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } \partial V, \quad (3.5)$$

## Beweis

Wir nehmen an, dass es 2 Lösungen  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  von

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

mit den gleichen Randbedingungen, (3.4) oder (3.5), gibt. Dann gilt für die Differenz  $\mathbf{U} = \Phi_1 - \Phi_2$ :

$$\Delta\mathbf{U} = 0 \quad (3.7)$$

in dem von  $\partial\mathbf{V}$  umschlossenen Volumen  $\mathbf{V}$ . Weiter ist wegen der Randbedingungen

$$\mathbf{U} = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbf{V} \quad (3.8)$$

oder

$$\nabla\mathbf{U} = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbf{V}. \quad (3.9)$$

Wir suchen jetzt nach einer Aussage über  $\nabla\mathbf{U}$  im ganzen Gebiet  $\mathbf{V}$ . Mit der Identität

$$\underbrace{\nabla}_{\text{div}} \cdot (\mathbf{U} \underbrace{\nabla}_{\text{grad}} \mathbf{U}) = (\underbrace{\nabla}_{\text{grad}} \mathbf{U})^2 + \mathbf{U} \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}} \mathbf{U} \quad (3.10)$$

und (3.7) wird:

$$\int_{\mathbf{V}} (\nabla\mathbf{U})^2 d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \left( \nabla \cdot (\mathbf{U}\nabla\mathbf{U}) - \underbrace{\mathbf{U}\Delta\mathbf{U}}_{=0} \right) d\mathbf{V} = \oint_{\partial\mathbf{V}} d\vec{f} \cdot \underbrace{\mathbf{U}\nabla\mathbf{U}}_{=0} = 0 \quad (3.11)$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, falls eine der beiden Bedingungen (3.8) oder (3.9) gilt. Also:

$$\int_{\mathbf{V}} (\nabla\mathbf{U})^2 d\mathbf{V} = 0, \quad (3.12)$$

d.h. es ist im ganzen Gebiet  $\mathbf{V}$ :

$$\nabla\mathbf{U} = 0, \quad (3.13)$$

da  $(\nabla\mathbf{U})^2 \geq 0$ . Damit wird

$$\mathbf{U} = \text{const} \quad (3.14)$$

und  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  unterscheiden sich höchstens um eine (physikalisch unwesentliche) Konstante.

### Sonderfall $V \rightarrow \infty$

Wenn  $V$  der gesamte  $\mathbb{R}_3$  ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls  $\rho$  auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und  $\Phi(\vec{r})$  asymptotisch so schnell abfällt, dass

$$r^2 \Phi(\vec{r}) \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

wo  $\partial \Phi / \partial n \equiv \vec{n} \nabla$  die Normalen-Ableitung von  $\Phi$  bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, dass die Oberfläche bei festem Rauminhalt wie  $r^2$  wächst.

## 3.2 Spiegelladungsmethode

Diese Methode zur Lösung des Randwertproblems besteht darin, außerhalb des zu untersuchenden Bereichs sogenannte *Spiegel-Ladungen* geeigneter Größe so anzubringen, dass mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung addieren darf (vgl. Abschnitt 2.4). Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die zusammen mit der gewählten speziellen Lösung der Poisson-Gleichung die geforderten Randbedingungen erfüllt.

### Punktladung vor leitender Ebene

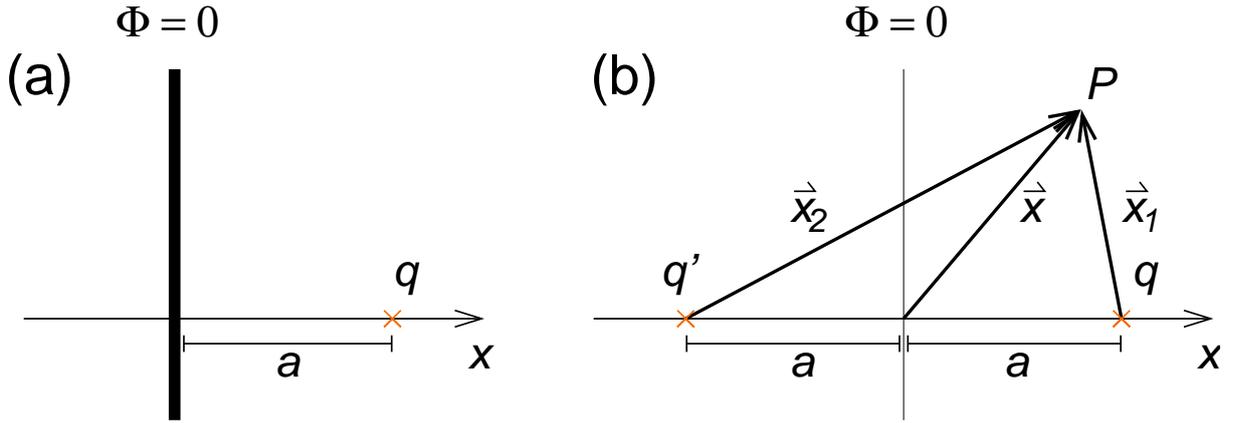
Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Punktladung  $q$  im Abstand  $a$  von einer leitenden Ebene, die geerdet sei (d.h.  $\Phi = 0$  auf der Ebene). Die Spiegelladung  $q'$  denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu  $q$  angebracht (Skizze).

Dann beträgt das Potential im Punkt  $P$ :

$$(4\pi\epsilon_0) \Phi(P) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \quad (3.16)$$

mit  $\vec{x}_1 = (a, 0, 0)$ ,  $\vec{x}_2 = (-a, 0, 0)$ , und wir erhalten wie gefordert  $\Phi = 0$  für alle Punkte der leitenden Ebene,  $x = 0$ , wenn wir wählen:

$$q' = -q. \quad (3.17)$$



**Abbildung 3.1:** (a) Physikalische Situation: Ladung  $q$  im rechten Halbraum vor geerdeter leitender Ebene bei  $x = 0$ . (b) Spiegelladung  $q'$ , symmetrisch zu  $q$  im linken Halbraum angebracht.

In dem (uns interessierenden) Bereich  $x > 0$  ist  $q/(4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_1|)$  eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung,  $q'/(4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_2|)$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, dass für  $x = 0$  die geforderte Randbedingung gilt.

### Elektrisches Feld und Flächenladungs-Dichte

Für die Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  erhält man aus (3.16) und (3.17):

$$\begin{aligned}
 E_x(P) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-a}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{x+a}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right), \\
 E_y(P) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right), \\
 E_z(P) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

also gilt für die Ebene  $x = 0$  wegen  $|\vec{x} - \vec{x}_1| = |\vec{x} - \vec{x}_2|$ , dass  $E_y(x = 0) = E_z(x = 0) = 0$  und

$$E_x(x = 0) = -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.19}$$

Wir sehen also, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Ebene  $x = 0$  steht (andernfalls würde ein Strom in der Ebenenoberfläche fließen bzw.

das Potential auf der Fläche nicht konstant sein). Gleichung (3.19) bedeutet nach dem Gauß'schen Gesetz (vgl. Kap. 2.3 , Gl. (2.25); hier ist  $\vec{E} = 0$  für  $x < 0$ ), dass in der Ebene  $x = 0$  eine Ladung mit der (ortsabhängigen) Flächendichte  $\sigma = \epsilon_0 \vec{n} \vec{E}$ , also

$$\sigma(\mathbf{y}, z) = \epsilon_0 E_x(x = 0) = -\frac{q\mathbf{a}}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{a}^2 + \mathbf{y}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.20)$$

durch die Anwesenheit der Punktladung  $q$  *influenziert* wird. Für die gesamte influenzierte Ladung findet man

$$q_{\text{inf}} = \int d\mathbf{f} \sigma(\mathbf{y}, z) = -\frac{q\mathbf{a}}{2\pi} \int_0^\infty dr' \frac{2\pi r'}{(\mathbf{a}^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = q\mathbf{a} \left[ (\mathbf{a}^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^\infty = -q,$$

wobei wir in der Ebene die Substitution  $r'^2 = \mathbf{y}^2 + z^2$ ,  $d\mathbf{f} = 2\pi r' dr'$  verwendet haben.

### 3.3 Inversionsmethode

Ein weiterer Kunstgriff, um Lösungen der Poisson-Gleichung mit den richtigen Randbedingungen zu finden, beruht darauf, dass man eine bereits bekannte Lösung der Poisson-Gleichung ausnutzt, um eine weitere mit skalierten Ladungen und Ladungspositionen zu gewinnen.

Es sei  $\Phi(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$  das Potential, das durch Punktladungen  $q_i$  am Ort  $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$  erzeugt wird:

$$\Phi(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\gamma_i}}; \quad (3.21)$$

hier bezeichnen  $(r_i, \vartheta_i, \varphi_i)$  die Orte der Punktladungen  $q_i$  und  $\gamma_i$  den Winkel zwischen  $\vec{\mathbf{r}}$  und  $\vec{\mathbf{r}}_i$ . Dann ist

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = \frac{\mathbf{a}}{r} \Phi\left(\frac{\mathbf{a}^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) \quad (3.22)$$

das Potential, das die Punktladungen

$$\bar{q}_i = \frac{\mathbf{a}q_i}{r_i} \quad (3.23)$$

bei  $\vec{\mathbf{r}}_i = (\mathbf{a}^2/r_i, \vartheta_i, \varphi_i)$  am Ort  $(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$  erzeugen (d.h. eben eine weitere Lösung der Poisson-Gleichung für eine andere Ladungskonfiguration). Es

ist zu beachten, dass drei neue Größen im Spiel sind: Neue Beträge der Ladungen  $\bar{q}_i$  an neuen Orten  $\bar{r}_i$  erzeugen ein neues Potential  $\bar{\Phi}$ .

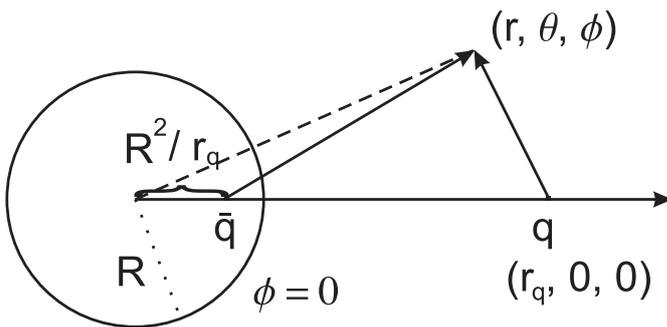
**Beweis:** Wir kombinieren Gleichungen (3.22) und (3.21) zu

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{\frac{a^4}{r^2} + r_i^2 - 2\frac{a^2}{r} r_i \cos\gamma_i}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\frac{aq_i}{r_i}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r_i^2} - 2r\frac{a^2}{r_i} \cos\gamma_i}}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

### Punktladung vor leitender, geerdeter Kugel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir eine Punktladung gegenüber einer leitenden Kugel, die sich auf dem Potential  $\Phi = 0$  befinden soll. Wir erfüllen die Randbedingung auf der Kugel durch eine Punktladung  $\bar{q}$ , deren Größe und Position so zu wählen sind, dass das resultierende Potential von  $q$  und  $\bar{q}$  auf der Kugeloberfläche gerade verschwindet. Das von der Punktladung  $q$ , lokalisiert am Ort  $(r_q, 0, 0)$ , im Punkt  $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$  erzeugte Potential werde mit  $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$  bezeichnet. Setzt man nun die Ladung  $\bar{q} = -Rq/r_q$  an den Ort  $(R^2/r_q, 0, 0)$  (vgl. Abb. 3.2) so ist das von  $\bar{q}$  am Ort  $(r, \vartheta, \varphi)$  erzeugte Potential nach (3.22):

$$\bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{R}{r} \Phi\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right).\quad (3.25)$$



**Abbildung 3.2:** Ladung vor geerdeter leitender Kugel: Positionierung der Spiegelladung nach der Inversionsmethode.

Auf der Kugeloberfläche,  $r = R$ , wird:

$$\bar{\Phi}(R, \vartheta, \varphi) = -\Phi(R, \vartheta, \varphi),\quad (3.26)$$

also wie gefordert

$$\bar{\Phi}(R, \vartheta, \varphi) + \Phi(R, \vartheta, \varphi) = 0.\quad (3.27)$$

Die gesuchte Lösung der Poisson-Gleichung außerhalb der leitenden Kugel ist dann:

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) + \Phi(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) \quad (3.28)$$

mit

$$\Phi(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_q|}. \quad (3.29)$$

### 3.4 Trennung der Variablen

Eine weitere Lösungsmethode für die Poissongleichung  $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$  besteht darin, durch einen Produktansatz  $\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})h(\mathbf{z})$  die partielle Differentialgleichung in mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen zu verwandeln, die in der Regel leichter zu lösen sind.

Als einfaches Beispiel wenden wir diese Methode auf die Suche nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.30)$$

an und nehmen dabei der Einfachheit halber an, dass wir ein in  $\mathbf{z}$  translationsinvariantes Problem haben, d.h. dass  $\Phi$  von  $\mathbf{z}$  nicht abhängt,

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.31)$$

Dann vereinfacht sich (3.30) in kartesischen Koordinaten zu:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (3.32)$$

Da (3.32) keinen *Mischterm*  $\partial^2\Phi/\partial x\partial y$  enthält, liegt es nahe, folgenden *Separationsansatz* zu machen:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) ; \quad (3.33)$$

dann geht (3.32) über in:

$$g(\mathbf{y})\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial y^2}g(\mathbf{y}) = 0. \quad (3.34)$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von  $f$  und  $g$  können wir die Gleichung durch  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  teilen, und (3.34) ist dann äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0. \quad (3.35)$$

Der erste Term in (3.35) hängt nur von  $x$ , der zweite nur von  $y$  ab; da  $x$  und  $y$  unabhängige Variablen sind, muss jeder der beiden Terme für sich konstant sein, und es folgt aus (3.35):

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{const} = -\frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \quad (3.36)$$

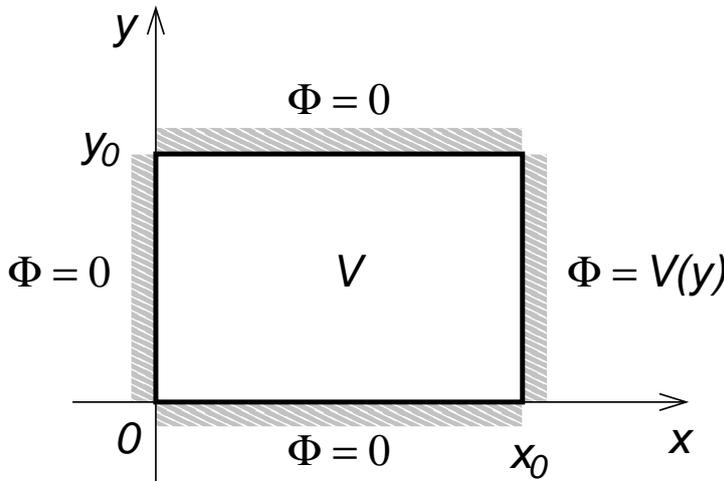
Wählen wir die Konstante in (3.36) z.B. positiv reell ( $= k^2$ ), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) = 0 \quad (3.37)$$

mit den Lösungen:

$$f(x) = a \exp(kx) + b \exp(-kx); \quad g(y) = c \sin(ky) + d \cos(ky). \quad (3.38)$$

Die Integrationskonstanten  $a, b, c, d$  und die Separationskonstante  $k$  werden durch Randbedingungen festgelegt.



**Abbildung 3.3:** Blick auf den Querschnitt des Rechteckzylinders.

### Rechteck-Zylinder

Als Beispiel betrachten wir einen in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Rechteck-Zylinder (mit den Kantenlängen  $x_0$  und  $y_0$ ) mit den Randbedingungen (siehe Abb. 3.3):

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, y_0) = 0. \quad (3.39)$$

Daraus folgt

$$d = 0; \quad (\sin(ky_0) = 0) \rightarrow \left( k = \frac{n\pi}{y_0} = k_n \right). \quad (3.40)$$

Weiterhin seien die Randbedingungen

$$\Phi(0, \mathbf{y}) = 0; \quad \Phi(x_0, \mathbf{y}) = V(\mathbf{y}), \quad (3.41)$$

gegeben, wobei  $V(\mathbf{y})$  irgendeine vorgegebene Funktion ist. Aus (3.41) folgt zunächst  $f(0) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$ , d.h.

$$\left( \mathbf{a} = -\mathbf{b} \right) \rightarrow \left( f = \mathbf{a} \{ \exp(k_n x) - \exp(-k_n x) \} \right). \quad (3.42)$$

Um die Bedingung (3.41) auch noch zu erfüllen, entwickeln wir nach Fourier:

$$\Phi(x, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n \mathbf{y}) \sinh(k_n x), \quad (3.43)$$

und bestimmen die Koeffizienten  $A_n$  aus der Forderung

$$\Phi(x_0, \mathbf{y}) = V(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n \mathbf{y}) \sinh(k_n x_0). \quad (3.44)$$

Dazu multiplizieren wir Gl. (3.44) mit  $\sin(k_m \mathbf{y})$  und integrieren von 0 bis  $y_0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{y_0} d\mathbf{y} V(\mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_n x_0) \int_0^{y_0} d\mathbf{y} \sin(k_n \mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_n x_0) \frac{y_0}{2} \delta_{mn} = \frac{y_0}{2} A_m \sinh(k_m x_0), \end{aligned} \quad (3.45)$$

wobei wir die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-y_0}^{y_0} d\mathbf{y} \frac{1}{y_0} \sin(k_n \mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) = \delta_{mn} \quad (3.46)$$

verwendet haben. Damit finden wir die Koeffizienten

$$A_m = \frac{2}{y_0 \sinh(k_m x_0)} \int_0^{y_0} d\mathbf{y} V(\mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}). \quad (3.47)$$

Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung lösen durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten; entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

### 3.5 Allgemeine Lösung der Potentialgleichung mit Randbedingungen

Mithilfe der Diracschen Deltafunktion schreiben wir die Feldgleichung für eine Punktladung als

$$\nabla \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) \quad (3.48)$$

bzw. mit  $\vec{E} = -\nabla \Phi(\vec{x})$

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) \quad (3.49)$$

Die Deltafunktion hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}) &= 0 \quad \text{in } \vec{x} \neq 0 \\ \int_V d^3x \delta(\vec{x}) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Wichtig ist die Beziehung

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta(\vec{x}) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \quad (3.51)$$

Es ist zu beachten, dass es sich bei der Diracschen Deltafunktion um eine Distribution, also eigentlich nicht um eine Funktion handelt. Man kann mit ihr aber weitgehend wie mit einer Funktion rechnen (unter Berücksichtigung der Regeln), weil sie sich als Grenzwert diverser Folgen gewöhnlicher Funktionen darstellen läßt. Allerdings ist die Diracschen Deltafunktion in der Regel nur dann sinnvoll eingesetzt, wenn über sie integriert wird.

Mit dem bekannten Potential einer Punktladung im Ursprung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (3.52)$$

finden wir

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta(\vec{x}) \quad (3.53)$$

Wir führen jetzt durch

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}_0) = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{mit} \quad G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (3.54)$$

die Greensche Funktion des Problems ein. Allerdings ist sie durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt; dazu müssen noch die Dirichlet- oder von Neumann-Randbedingungen berücksichtigt werden; das wollen wir jetzt tun.

### Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

Im freien Raum ist die allgemeine Lösung (Fundamentallösung) der Poisson-Gleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi_0(\vec{x}) \quad (3.55)$$

wobei  $\Phi_0(\vec{x})$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, d.h. eine sogenannte *harmonische Funktion* ist. (Beispiel für eine harmonische Funktion im  $\mathbb{R}^3$ :  $\Phi_0(\vec{x}) = \prod_{i=1}^3 (\alpha_i x_i + \beta_i)$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ .) Das gilt, weil  $G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$  gerade  $\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y})$  erfüllt, denn dann ist

$$\begin{aligned} \Delta_x \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) + \Delta_x \Phi_0(\vec{x}) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Da  $\Phi(\vec{x}) \rightarrow 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , ist  $\Phi_0 = 0$  die eindeutige Lösung.

### Allgemeine Lösung mit Dirichlet-Randbedingungen

Wir suchen jetzt die allgemeine Lösung für den Fall, dass Dirichlet-Randbedingungen auf dem Rand eines Gebietes  $V$  vorgegeben sind. Dazu betrachten wir zunächst das Potential  $\Phi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$  einer „Einheitsladung“ (d.h. einer Ladung  $q$ , sodass  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = 1$ ) bei  $\vec{y}$ , wenn der Rand von  $V$  ein geerdeter Leiter ist. Dieses Potential nennen wir Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen; sie ist charakterisiert durch

$$\Delta_x G_D(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{falls } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.57)$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \text{falls } \vec{x} \in \partial V \quad (3.58)$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = G_D(\vec{y}, \vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.59)$$

Die Symmetrie von  $G_D$  folgt aus den ersten beiden Eigenschaften. Um das zu zeigen, verwenden wir die zweite Green'sche Formel

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi), \quad (3.60)$$

die man erhält, wenn man den Gaußschen Integralsatz auf  $\vec{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$  anwendet. Wir setzen  $\varphi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$  und  $\psi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y}')$  und erhalten

$$\begin{aligned} & -4\pi \int_V d^3x \left[ G_D(\vec{x}, \vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}') - G_D(\vec{x}, \vec{y}') \delta(\vec{x} - \vec{y}) \right] \\ & = \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{x}) \cdot \left[ G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_x G_D(\vec{x}, \vec{y}') - G_D(\vec{x}, \vec{y}') \nabla_x G_D(\vec{x}, \vec{y}) \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wegen Gl. (3.58) verschwindet die rechte Seite, und es folgt daher

$$G_D(\vec{y}', \vec{y}) = G_D(\vec{y}, \vec{y}') \quad (3.62)$$

d.h. die dritte Bedingung, Gl. (3.59).

Sei nun die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  im Gebiet  $V$  gegeben, sowie das Potential  $\Phi(\vec{x})$  auf der Oberfläche  $\partial V$ . Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung mit der vorgegebenen Randbedingung soll  $\Phi(\vec{x})$  heißen. Dann ist

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V d^3y \Phi(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3y \Phi(\vec{y}) \Delta_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.63)$$

wobei wir Gl. (3.57) verwendet haben. Mit der zweiten Greenschen Formel (3.60) und  $\varphi(\vec{y}) = \Phi(\vec{y})$ ,  $\psi(\vec{y}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$

$$\begin{aligned} & \int_V d^3y \left[ \Phi(\vec{y}) \Delta_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y \Phi(\vec{y}) \right] \\ & = \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \left[ \Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_y \Phi(\vec{y}) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

sowie mit  $\Delta_y \Phi(\vec{y}) = -\frac{\rho(\vec{y})}{\epsilon_0}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) \\ & \quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \left[ \Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_y \Phi(\vec{y}) \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Wegen Gl. (3.58) verschwindet der letzte Term, und die Lösung der Poisson-Gleichung mit der richtigen Randbedingung ist

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y})$$

$$(3.66)$$

Die Bedeutung dieses Ergebnisses liegt darin, dass wir nur noch die Greensche Funktion für eine Punktladung mit den richtigen Randbedingungen, Gl. (3.57)-(3.59), finden müssen, um beliebige Ladungsverteilungen  $\rho(\vec{y})$  zu behandeln.

### Allgemeine Lösung mit von Neumann-Randbedingungen

Die Konstruktion im Fall der von Neumannschen Randbedingungen ist etwas komplizierter, denn der naheliegende Ersatz für die Bedingung (3.58),

$$\vec{n}\nabla_{\vec{y}}G_N(\vec{x},\vec{y}) = \partial_{n(\vec{y})}G_N(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad \text{falls } \vec{y} \in \partial V \quad (3.67)$$

mit Normalableitung  $\partial_{n(\vec{y})} = \vec{n}(\vec{y})\nabla_{\vec{y}}$ ,  $\vec{n}(\vec{y})$  Normaleneinheitsvektor auf  $\partial V$  führt zu einem Widerspruch: wegen des Divergenztheorems gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})}G_N(\vec{x},\vec{y}) &= \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \nabla_{\vec{y}}G_N(\vec{x},\vec{y}) \\ &= \int_V d^3\vec{y} \Delta_{\vec{y}}G_N(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi \int_V d^3\vec{y} \delta(\vec{x}-\vec{y}) = -4\pi \end{aligned} \quad (3.68)$$

und nicht 0. Der naheliegende Ansatz ist daher  $\partial_{n(\vec{y})}G_N(\vec{x},\vec{y}) = \frac{-4\pi}{|\partial V|}$  falls  $\vec{y} \in \partial V$  wobei  $|\partial V|$  die Gesamtfläche von  $\partial V$  ist. Die Gleichungen für die Greensfunktion mit von Neumann-Randbedingungen lauten also

$$\Delta_{\vec{x}}G_N(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \text{falls } \vec{x},\vec{y} \in V \quad (3.69)$$

$$\partial_{n(\vec{y})}G_N(\vec{x},\vec{y}) = \frac{-4\pi}{|\partial V|} \quad \text{falls } \vec{x} \in \partial V \quad (3.70)$$

$$G_N(\vec{x},\vec{y}) = G_N(\vec{y},\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x},\vec{y} \in V \quad (3.71)$$

Mit derselben Rechnung wie vorher erhalten wir die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{y} \rho(\vec{y}) G_N(\vec{x},\vec{y}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot G_N(\vec{x},\vec{y}) \nabla_{\vec{y}}\Phi(\vec{y}) \quad (3.72)$$

wobei

$$\langle \Phi \rangle_{\partial V} = \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \Phi(\vec{y}) \quad (3.73)$$

der Mittelwert des Potentials auf der Randfläche  $\partial V$  ist. Diese Konstante hat auf das elektrische Feld keinen Einfluss.

Die Möglichkeit, alle Dirichletschen und von Neumannschen Randwertprobleme auf zwei Typen von Greenschen Funktionen  $G_D$  und  $G_N$  zu reduzieren, beruht wesentlich auf der Linearität der Poisson-Gleichung.

### 3.6 Übersicht Elektrostatik

1.) Basis: *Coulomb-Gesetz*

$$\vec{K} = q\vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

2.) *Feldgleichungen:*

a) integral:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0; \quad \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

b) differentiell:

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.) *Elektrostatistisches Potential:*

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) *Feldenergie:*

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \rightarrow \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho \Phi \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x E^2$$

Potentielle Energie der Punktladungen  $\rightarrow$  elektrostatische Feldenergie



# Teil II

## Magnetostatik

## 4. Ampère'sches Kraftgesetz

---

### 4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln. Als elektrische Stromstärke definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt.

#### Stromdichte

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst Ladungsträger mit gleicher Ladung  $q$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Es sei  $\vec{a}$  der Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums, dessen Betrag  $a$  die Querschnittsfläche angibt und  $n$  die Dichte der Ladungsträger. In der Zeit  $\Delta t$  passieren dann die in dem Volumen  $\Delta V = (\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t$  befindlichen Ladungsträger den Leiterquerschnitt, nämlich  $n(\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t$  Ladungsträger. Damit folgt für die Stromstärke (berechnet als Ladungsdichte mal Volumen pro Zeit)

$$I(\mathbf{a}) = \frac{nq(\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t}{\Delta t} = nq(\vec{a} \cdot \vec{v}). \quad (4.1)$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit  $n_i$  Ladungsträger  $q_i$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$ , so wird:

$$I(\mathbf{a}) = \vec{a} \cdot \left( \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \right). \quad (4.2)$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) legen es nahe, die *Stromdichte* (oder *elektrische Flussdichte*)  $\vec{j}$  einzuführen, als

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i. \quad (4.3)$$

Die Stromdichte hat die Dimension

$$[\vec{j}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (4.4)$$

Sie lässt sich für  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}$  mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i \vec{v}_i \quad (4.5)$$

verknüpfen:

$$\vec{j} = n\mathbf{q}\langle \vec{v} \rangle = \rho\langle \vec{v} \rangle. \quad (4.6)$$

Gleichung (4.6) macht deutlich, dass hohe Absolutgeschwindigkeiten der Ladungsträger noch keinen hohen Strom bedeuten, da nur der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Ladungsträger wesentlich ist. Sind z.B. die Geschwindigkeiten der Ladungsträger gleichmäßig über alle Richtungen verteilt, so wird  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  und damit auch  $\vec{j} = 0$ . Im allgemeinen Fall ist  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle$  orts- und zeitabhängig, also

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t). \quad (4.7)$$

### Kontinuitätsgleichung

Den Erhaltungssatz der Ladung können wir mit den Begriffen der Ladungs- und Stromdichte wie folgt formulieren: Wir betrachten ein beliebiges endliches Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $F$ . Die darin enthaltene Ladungsmenge sei  $Q = Q(t)$ . Wenn  $V$  nicht von der Zeit abhängt, so ergibt sich für die Änderung der in  $V$  enthaltenen Ladungsmenge pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet werden kann, muss die Abnahme (Zunahme) der in  $V$  enthaltenen Ladung gleich der (im betrachteten Zeitraum) durch  $F$  hinaus (hinein)-strömenden Ladungsmenge sein:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} dI \quad (4.9)$$

Die  $dI$  sind die Ströme durch die Flächenelemente  $d\mathbf{f}$  der Oberfläche  $\partial V$ .  $dI > 0$  soll bedeuten, dass Strom in Normalenrichtung fließt, d.h. für positive Ladung nach außen oder für negative Ladung nach innen; entsprechend

für  $dI < 0$ . Das begründet das negative Vorzeichen: Falls Beiträge mit  $dI > 0$  überwiegen, bedeutet das einen Verlust von (positiver) Ladung. Die rechte Seite lässt sich durch das Oberflächenintegral der Stromdichte ausdrücken, das nach dem Gaußschen Integralsatz in ein Volumenintegral umgeformt werden kann:

$$\oint_{\partial V} dI = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j}. \quad (4.10)$$

Damit lautet die Ladungsbilanz:

$$-\int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j} \quad (4.11)$$

oder, da  $V$  beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.} \quad (4.12)$$

Während Gl. (4.9) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet Gl. (4.12) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

### Spezialfälle

(i) Elektrostatik: stationäre Ladungen

$$\vec{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \rho(\vec{x}) \quad (4.13)$$

(ii) Magnetostatik: stationäre Ströme

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.14)$$

Für einen stationären Strom ist nämlich  $\nabla \cdot \vec{j}$  zeitlich konstant, und diese Konstante muss überall null sein, da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet wird.

## 4.2 Lorentzkraft und magnetische Induktion

Gegeben sei eine stationäre Stromverteilung  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x})$ . Um elektrostatische Effekte zu eliminieren, wollen wir annehmen, dass die Dichte der bewegten Ladungsträger, die den Strom aufbauen, kompensiert wird durch ruhende

Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens (z.B. bewegte Leitungselektronen und ruhende Gitterionen im metallischen Leiter). Auf eine bewegte Probeladung  $q$  wirkt dann in der Umgebung des stromdurchflossenen Leiters eine Kraft, für die man experimentell findet, die sogenannte *Lorentzkraft*:

$$\vec{K} = q \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (4.15)$$

mit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \Gamma_m \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.16)$$

als der *magnetischen Induktion* (auch *magnetische Flussdichte* oder etwas ungenau *Magnetfeld* genannt).  $\vec{B}$  ist die Flächendichte des magnetischen Flusses, der durch ein Flächenelement hindurchtritt. Die Gleichungen (4.15) und (4.16) sind als Grundlagen der Magnetostatik ebenso experimentell gesichert wie

$$\vec{K} = q \vec{E} \quad (4.17)$$

mit

$$\vec{E}(\vec{x}) = \Gamma_e \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.18)$$

in der Elektrostatik! So wie wir Gl. (4.17) als Messvorschrift für das elektrostatische Feld  $\vec{E}$  auffassen können, so stellt Gl. (4.15) eine Messvorschrift für die magnetische Induktion  $\vec{B}$  dar.

### Maßsysteme

Hat man  $\Gamma_e$  festgelegt, d.h. hat man die Einheitsladung definiert, siehe Abschnitt 1.2, so sind in Gl. (4.15) und (4.16) alle auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert.  $\Gamma_m$  kann also nicht mehr frei gewählt werden:

(ii) Gaußsches cgs-System:

$$\Gamma_e = 1, \quad \Gamma_m = \frac{1}{c^2} \quad (4.19)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

(i) SI-System:

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \Gamma_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (4.20)$$

mit

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{m kg}}{\text{C}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}. \quad (4.21)$$

$\mu_0$  ist die *magnetischen Permeabilität*.

### Relativistische Invarianz

Unabhängig vom Maßsystem ist das Verhältnis  $\Gamma_m/\Gamma_e$  eine Konstante, da das Verhältnis von Ausdruck (4.15) zu (4.17) dimensionslos ist. Die Dimension des Verhältnisses

$$\left[ \frac{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \right] = [\text{Geschwindigkeit}] \quad (4.22)$$

ist Geschwindigkeit, und daher

$$\left[ \frac{\vec{v} \times \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \right] = [\text{Geschwindigkeit}^2] \quad (4.23)$$

Somit hat das Verhältnis von  $\Gamma_m/\Gamma_e = \epsilon_0 \mu_0$  die Dimension einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat.

Mit Gl. (4.20) und (4.19) erhalten wir die Beziehung

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}. \quad (4.24)$$

Dieser fundamentale Zusammenhang verweist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie. In der Tat kann man mit Hilfe einer Lorentz-Transformation Gl. (4.15) und (4.16) in Gl. (4.20) und (4.19) überführen.

Schließlich folgt für die Dimension der magnetischen Induktion

$$[\vec{B}] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung} \cdot \text{Geschwindigkeit}} = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T (Tesla)}. \quad (4.25)$$

Der Zusammenhang mit der veralteten Einheit Gauß ist  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ .

### Superpositionsprinzip

Gleichung (4.16) enthält - wie in (4.18) - das Superpositionsprinzip: Die Felder zweier Stromverteilungen  $\vec{j}_1$  und  $\vec{j}_2$  überlagern sich linear, da  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$  die resultierende Stromverteilung ist.

### 4.3 Das Biot-Savart-Gesetz

Im folgenden soll das Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden. In der Regel haben wir es mit Strömen  $I$  in drahtförmigen Leitern zu tun.

Für einen *dünnen* Leiter können wir sofort über den Leitungsquerschnitt  $f$  integrieren, wobei wir die Stromstärke

$$I = \int_f \vec{j} \cdot d\vec{f}' \quad (4.26)$$

eingeführen (siehe Abb. 4.1), und erhalten statt des Volumenintegrals (4.16) ein Linienintegral. Dieselbe Umformung des Integrals erreichen wir durch folgende Argumentation: Wir betrachten ein Volumenelement  $d^3x'$ , das ein Stück  $d\vec{x}'$  eines drahtförmigen Leiters  $L'$  enthalten soll;  $d\vec{x}'$  ist also ein Linienelement entlang des Leiters  $L'$ . Durch den Leiter soll der Strom

$$I' = \frac{dq'}{dt}$$

fließen. Die Ladungsträger sollen mit einer mittleren Geschwindigkeit  $\vec{v}'$  unterwegs sein, für die

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt}$$

gilt. Dann ist

$$\vec{j}(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')\vec{v}'.$$

Mit der Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}')$  ist

$$dq' = d^3x' \rho(\vec{x}')$$

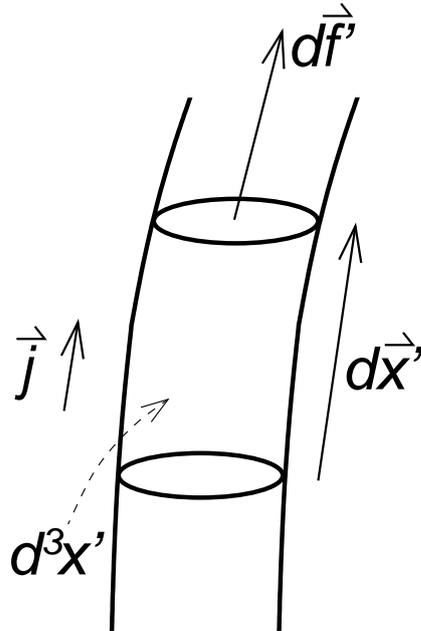
die elektrische Ladung im Volumenelement  $d^3x'$ . Dann können wir schreiben

$$d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = d^3x' \rho(\vec{x}')\vec{v}' = dq' \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{dq'}{dt} d\vec{x}' = I' d\vec{x}' \quad (4.27)$$

Einsetzen in die Definition der magnetischen Flussdichte ergibt

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.28)$$

Dieses Konzept des infinitesimal dünnen stromführenden Leiters, des *Stromfadens*, entspricht dem Konzept der Punktladung in der Elektrostatik und ist ebenso nützlich.



**Abbildung 4.1:**  
Geometrie eines Volumenelementes  $d^3x'$  eines dünnen Leiters  $L'$ .

### Unendlich langer, gerader Draht

Für einen unendlich langen, dünnen Leiter können wir die Integration in Gl. (4.28) ausführen. Dazu stellen wir fest, dass wir in dieser Anordnung Rotationssymmetrie um den Draht als Achse als auch Translationsinvarianz entlang des Drahtes ausnutzen können. Dazu wählen wir den Ursprung  $O$  des  $\vec{x}'$ -Systems auf dem Draht; der Draht soll dann parallel zu  $z'$  verlaufen. Wegen der Translationssymmetrie können wir den Vektor  $\vec{x}$  zum Beobachtungspunkt  $P$  senkrecht zum Draht wählen (siehe Abb. 4.2). Dann gilt

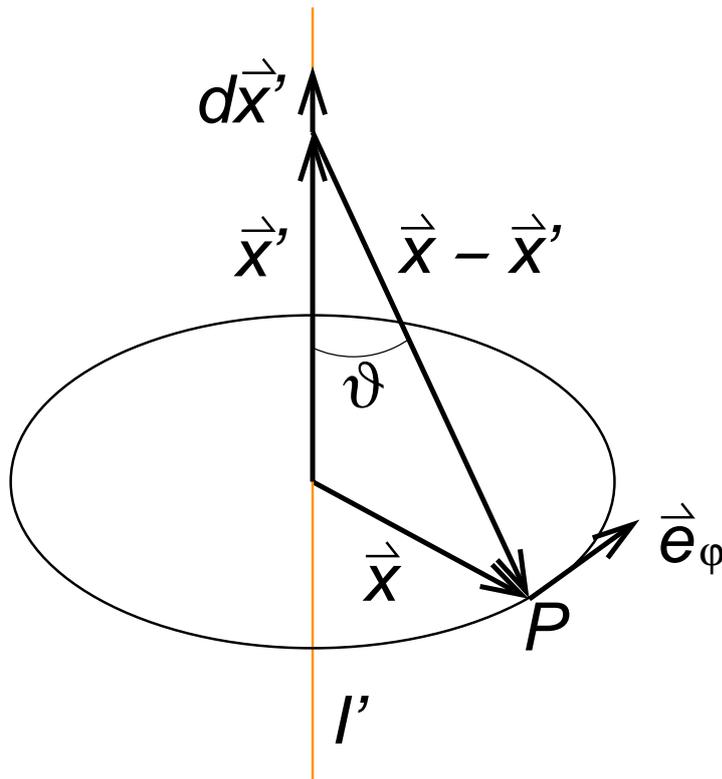
$$d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}') = |d\vec{x}'| |\vec{x} - \vec{x}'| \sin \vartheta \vec{e}_\varphi = dz' r \vec{e}_\varphi$$

mit

$$dz' = |d\vec{x}'| \quad \text{und} \quad |\vec{x}| = r = |\vec{x} - \vec{x}'| \sin \vartheta$$

$\vec{e}_\varphi$  ist der Einheitsvektor in azimuthaler Richtung. Außerdem gilt (nach Pythagoras)

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + z'^2}$$



**Abbildung 4.2:**  
Geometrie für die Bestimmung der magnetischen Induktion eines geraden, dünnen, unendlich langen Leiters  $L'$ , durch den ein Strom  $I'$  fließt.

Damit wird das Linienintegral zu einem eindimensionalen gewöhnlichen Integral:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I' r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\varphi \quad (4.29)$$

Dieses berechnen wir mit der Substitution

$$z' = r \sinh \xi \quad dz' = r \cosh \xi d\xi \quad r^2 + z'^2 = r^2 (1 + \sinh^2 \xi) = r^2 \cosh^2 \xi$$

wegen  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ . Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \cosh \xi d\xi}{r^3 \cosh^3 \xi} = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2 \xi} = \frac{1}{r^2} [\tanh \xi]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{r^2}$$

Das Ergebnis für die magnetische Induktion im Punkt  $P$  ist also

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \vec{e}_\varphi, \quad (4.30)$$

wobei  $r$  der senkrechte Abstand des Punktes  $P$  vom Draht ist. Dies ist die Formel von Biot und Savart für einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter. Es bedeutet, dass die Feldlinien von  $\vec{B}$  konzentrisch um den Leiter verlaufen und umgekehrt proportional zu  $r$  schwächer werden.

#### 4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Ausgehend von der Kraft, die eine Ladung  $q_i$  erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  im Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegt,

$$\vec{K}_i = q_i \left[ \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right], \quad (4.31)$$

erhält man mit der Umrechnung von Gl. (4.27) für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte  $\vec{j}$ :

$$\vec{K} = \sum_i q_i \left[ \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right] = \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}); \quad (4.32)$$

das Volumen  $V$  ist so zu wählen, dass es den Strom vollständig erfasst.

**Beispiel:** Für einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das  $\vec{B}$ -Feld nicht (wesentlich) ändert, können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in Gl. (4.32) ausführen:

$$\vec{K} = I \int_L d\vec{x} \times \vec{B}. \quad (4.33)$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters  $L$  lässt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn  $\vec{B}$  sich längs  $L$  nicht ändert:

$$\vec{K} = (\vec{I} \times \vec{B})L, \quad (4.34)$$

wo  $L$  die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum  $\vec{B}$ -Feld; sie ist maximal, wenn  $\vec{I}$  senkrecht zu  $\vec{B}$  verläuft und verschwindet, wenn  $\vec{I}$  parallel zu  $\vec{B}$  ist.

#### Drehmoment

Auf die Ladung  $q_i$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  im Feld  $\vec{B}$  wirkt das Drehmoment

$$\vec{N}_i = \vec{x}_i \times \left[ q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right]; \quad (4.35)$$

entsprechend auf den Strom der Stromdichte  $\vec{j}$  (Umrechnung wieder nach Gl. (4.27)):

$$\vec{N} = \sum_i \vec{x}_i \times \left[ q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right] = \int_V d^3x \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}). \quad (4.36)$$

Einfache Beispiele sind (rechteckige oder kreisförmige) Stromschleifen im homogenen  $\vec{B}$ -Feld.

Für die praktische Auswertung von Gl. (4.36) ist es zweckmäßig, mit der Identität („bac-cab-Regel“)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (4.37)$$

umzuformen:

$$\vec{N} = \int_V d^3x \left[ (\vec{x} \cdot \vec{B})\vec{j} - (\vec{x} \cdot \vec{j})\vec{B} \right]. \quad (4.38)$$

### Stationärer Strom

Für einen stationären, räumlich begrenzten Strom im homogenen  $\vec{B}$ -Feld verschwindet der zweite Term in Gl. (4.38). Um dies zu zeigen, berücksichtigen wir, dass in der Magnetostatik wegen  $\dot{\rho} = 0$  auch  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  gilt, und verwenden ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ )

$$\nabla(\chi_{\alpha j}) = \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma}(\chi_{\alpha j}) = \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\alpha\gamma} j + \chi_{\alpha} \nabla j = \vec{e}_{\alpha} j = j_{\alpha} \quad (4.39)$$

sowie

$$\begin{aligned} \nabla(\chi_{\beta} \chi_{\alpha} j) &= \left( \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma} \chi_{\beta} \right) \chi_{\alpha} j + \left( \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma} \chi_{\alpha} \right) \chi_{\beta} j \\ &= \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\beta\gamma} \chi_{\alpha} j + \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\alpha\gamma} \chi_{\beta} j = \chi_{\alpha} j_{\beta} + \chi_{\beta} j_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \chi_{\beta} j_{\alpha} &= \int_V d^3x \chi_{\beta} \nabla \cdot (\chi_{\alpha} j) = \int_V d^3x \nabla \cdot (\chi_{\beta} \chi_{\alpha} j) - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \chi_{\beta} \chi_{\alpha} j - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} = - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} \end{aligned} \quad (4.41)$$

unter Ausnutzung des Gaußschen Integralsatzes und des Verschwindens von  $j$  auf der Oberfläche  $\partial V$  von  $V$ . Für  $\alpha = \beta$  folgt aus Gl. (4.41)

$$\int_V d^3x (\vec{x} \cdot \vec{j}) = 0, \quad (4.42)$$

so dass für ein homogenes (bzw. ein schwach veränderliches) Feld in Gl. (4.38) der zweite Term exakt (bzw. näherungsweise) verschwindet.

### Magnetisches Dipolmoment

Entsprechend folgt aus Gl. (4.41) für  $\alpha \neq \beta$ :

$$\int_V d^3x (\vec{x} \cdot \vec{B}) \vec{j} = - \int_V d^3x (\vec{j} \cdot \vec{B}) \vec{x}, \quad (4.43)$$

also:

$$\int_V d^3x (\vec{B} \cdot \vec{x}) \vec{j} = \frac{1}{2} \int_V d^3x [(\vec{B} \cdot \vec{x}) \vec{j} - (\vec{B} \cdot \vec{j}) \vec{x}] = -\frac{1}{2} \vec{B} \times \int_V d^3x (\vec{x} \times \vec{j}) \quad (4.44)$$

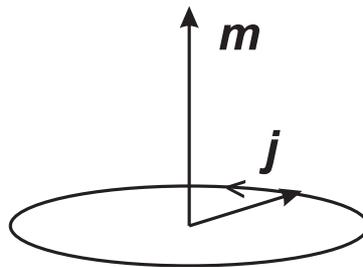
mit Formel (4.37). Ergebnis:

$$\boxed{\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}} \quad (4.45)$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x (\vec{x} \times \vec{j})}. \quad (4.46)$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht  $\vec{m}$  senkrecht zur Stromebene:



Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir nach Integration über den Leiterquerschnitt:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_L (\vec{x} \times d\vec{x}), \quad (4.47)$$

und für den Betrag  $m$ :

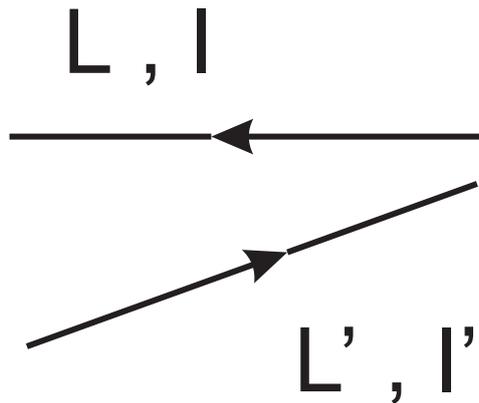
$$m = IF, \quad (4.48)$$

wobei  $I$  die Stromstärke und  $F$  die vom Strom eingeschlossene Fläche ist (vgl. hierzu den Flächensatz für die Bewegung eines Massenpunktes im Zentralfeld!).

### Anwendungen

Strommessung bzw. Elektromotor.

### 4.5 Kräfte zwischen Strömen



Mit den Gleichungen (4.28) und (4.33) lässt sich die Kraft eines Stromes  $I'$  auf einen Strom  $I$  bei dünnen Leitern schreiben als:

$$\vec{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \underbrace{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')] }_{[d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{x}' - [d\vec{x} \cdot d\vec{x}'] (\vec{x} - \vec{x}')} . \quad (4.49)$$

Das ist das *Ampèresche Kraftgesetz*, das die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden beschreibt. Gleichung (4.49) kann mit Hilfe von (4.37) symmetrisiert werden:

$$\vec{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (4.50)$$

denn der erste der zwei Terme aus der „bac-cab-Regel“ enthält eine totale Ableitung, mit

$$\int_L \frac{d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = - \int_L d\vec{x} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = 0 \quad (4.51)$$

für geschlossene (Linienintegral über einen Gradienten) oder unendlich lange Leiterkreise. Gleichung (4.50) ändert bei Vertauschung der beiden

Ströme, d.h. von  $I$  und  $I'$  sowie von  $\vec{\chi}$  und  $\vec{\chi}'$ , das Vorzeichen. Darin spiegelt sich das Actio-Reactio-Prinzip wider, das für elektrostatische wie für magnetostatische Wechselwirkungen gilt. Es wird allerdings durchbrochen bei beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Ladungsverteilungen (siehe Kap. 6).

## 5. Grundgleichungen der Magnetostatik

---

### 5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Wir bestimmen jetzt die Feldgleichungen der Magnetostatik, d.h. infinitesimale (lokale) Gleichungen für die magnetische Flussdichte, die zu den integralen Beziehungen aus Kap. 4 äquivalent sind. Die Gleichung (4.16)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

kann wegen

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

auch als

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \left( \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

geschrieben werden. Den Integranden formen wir um (Komponente  $\alpha$  des Vektorprodukts, mit Summenkonvention):

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{j}(\vec{x}') \times \left( \nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right\}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\beta(\vec{x}') \partial_\gamma \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma \frac{j_\beta(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \frac{j_\gamma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \left\{ \nabla_x \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}_\alpha \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir benutzt, dass  $j_\beta(\vec{x}')$  unabhängig von  $\vec{x}$  ist, sodass  $\partial_\gamma j_\beta(\vec{x}') = 0$ , und die Antisymmetrie  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta}$ ; im dritten Schritt haben wir Indizes  $\beta \leftrightarrow \gamma$  umbenannt.

Damit finden wir:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \quad (5.1)$$

Gemäß (5.1) kann also  $\vec{B}$  in der Form

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.2)$$

dargestellt werden mit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.3)$$

Gl. (5.2) ist das vektorielle Analog der Gleichung  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , durch die das elektrische Feld mit dem elektrischen Potential in Beziehung gesetzt wird.  $\vec{A}(\vec{x})$  nennt man das *Vektor-Potential*. Dann wird die Divergenz von  $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (5.4)$$

Gleichung (5.4) entspricht formal

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.5)$$

und zeigt, dass es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.4) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.6)$$

so sehen wir, dass der Fluss der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche  $F$  verschwindet. Der *magnetische Fluss* ist die über eine Fläche integrierte magnetische Flussdichte  $\vec{B}$ . Der Vergleich mit:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.7)$$

erklärt die obige Aussage.

## 5.2 Rotation der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$

In der Elektrostatik hatten wir für die Rotation des elektrischen Feldes gefunden

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (5.8)$$

oder gleichwertig ein Linienintegral entlang des geschlossenen Weges  $\partial F$  um eine Fläche  $F$

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.9)$$

nach der Formel von Stokes. Entsprechend wollen wir im folgenden das Linienintegral

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} \quad (5.10)$$

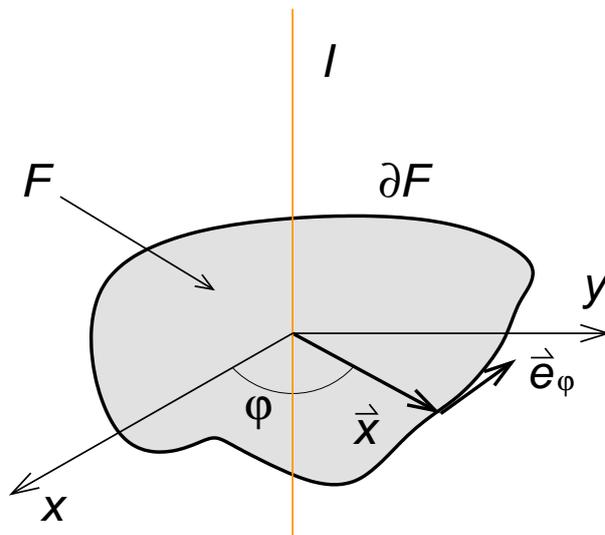
über einen geschlossenen Weg  $\partial F$  untersuchen und dann über die Formel von Stokes  $\nabla \times \vec{B}$  berechnen.

### Langer, dünner Leiter

Wir betrachten zunächst einen unendlich langen, dünnen, geraden Leiter. Dafür hatten wir in Abschnitt 4.3

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I\mu_0}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (5.11)$$

gefunden, wobei  $r$  der Abstand vom Leiter ist,  $I$  die Stromstärke und  $\vec{e}_\varphi$  die Richtung angibt: die Feldlinien laufen konzentrisch um den Leiter. Als Weg  $\partial F$  betrachten wir zunächst eine geschlossene (stückweise) glatte Kurve in der Ebene senkrecht zum Leiter, die den Leiter umfasst (siehe Fig. 5.1), den Rand der Fläche  $F$ .



**Abbildung 5.1:** Geschlossene Kurve  $F$  in der  $xy$ -Ebene mit Rand  $\partial F$ .

Dann wird:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint_{\partial F} \frac{d\vec{x} \cdot \vec{e}_\varphi}{r} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint d\varphi = I\mu_0. \quad (5.12)$$

Wenn  $S$  den Strom nicht umfasst, so gilt:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.13)$$

## Allgemeine Stromverteilung

Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern, indem man Ströme vom oben diskutierten Typ superponiert und geschlossene Raumkurven  $\partial F$  aus ebenen Wegstücken zusammensetzt. Ohne auf Beweis-Details einzugehen - was Aufgabe der Mathematik ist - halten wir als generelles Ergebnis fest:

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I}, \quad (5.14)$$

wobei  $I$  die Stromstärke des von  $\partial F$  umschlossenen Stromes ist. Dies ist als *Ampèresches (Durchflutungs-)Gesetz* bekannt.

### **Bemerkung**

Umläuft der Weg des Linienintegrals den Strom  $n$ -fach, so ist  $I$  durch  $nI$  zu ersetzen.

### Rotation von $\vec{B}$

Die zu Gl. (5.9) analoge integrale Aussage (5.14) können wir mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes (siehe Gl. 2.1) in eine differentielle Beziehung umwandeln. Der Satz von Stokes gestattet, das obige Linienintegral in ein Oberflächenintegral umzuformen:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (5.15)$$

wobei  $F$  eine beliebige glatte, in den geschlossenen Weg  $\partial F$  eingespannte, orientierbare Fläche ist.  $F$  und  $\partial F$  liegen im Definitionsbereich des stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\vec{B}$ . Mit Gl. (5.15) ergibt sich aus (5.14):

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 I = \mu_0 \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}, \quad (5.16)$$

oder, da  $F$  beliebig gewählt werden kann:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}. \quad (5.17)$$

Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld  $\vec{E}$  mit  $\nabla \times \vec{E} = 0$  ist also das  $\vec{B}$ -Feld *nicht wirbelfrei*.

## 5.3 Vektor-Potential und Eichung

Statt  $\vec{B}$  bei gegebener Stromverteilung  $\vec{j}$  aus Gl. (5.4) und (5.17) zu berechnen, wollen wir entsprechend der Poissongleichung für das elektrostatische

Potential  $\Phi$  eine Differentialgleichung herleiten, aus der wir das Vektorpotential  $\vec{A}$  bestimmen können; die magnetische Induktion kann daraus dann einfach durch Differenzieren gewonnen werden (Kap. 5.1 ):

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (5.18)$$

Aus der Differentialgleichung für das Vektor-Potential soll sich  $\vec{A}$  bei gegebener Stromverteilung  $\vec{j}$  berechnen lassen. Wir bilden zunächst die Rotation von  $\vec{B}$  aus Gl. (5.18):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (5.19)$$

### Coulomb-Eichung

Der 1. Term auf der rechten Seite in (5.19) lässt sich mittels einer sog. *Eichtransformation* beseitigen, indem man ausnutzt, dass  $\vec{A}$  über (5.18) nicht eindeutig definiert ist. Das Feld  $\vec{B}$  ändert sich nämlich nicht, wenn man die Eichtransformation

$$\boxed{\vec{A} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi} \quad (5.20)$$

durchführt, wobei  $\chi$  eine beliebige (mindestens zweimal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist. Denn:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \chi)}_{=0} = \nabla \times \vec{A}, \quad (5.21)$$

da die Rotation eines Gradienten verschwindet. Ist nun die Divergenz von  $\vec{A}$  ungleich null

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0, \quad (5.22)$$

so wählen wir das *Eichpotential*  $\chi$  so, dass die Divergenz des transformierten Vektorpotentials verschwindet:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla \chi) = 0. \quad (5.23)$$

Diese Wahl von  $\chi$  nennt man die *Coulomb-Eichung*. Das gesuchte  $\chi$  finden wir somit durch Lösen einer Differentialgleichung vom Typ der Poisson-Gleichung (2.40):

$$\Delta \chi = -\nabla \cdot \vec{A}, \quad (5.24)$$

wo  $-\nabla \cdot \vec{\bar{A}}$  als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist. Es lässt sich also stets erreichen (ohne die Physik, d.h. das  $\vec{B}$ -Feld in irgendeiner Weise einzuschränken!) dass:

$$\boxed{\Delta \vec{\bar{A}} = -\mu_0 \vec{j}} \quad \text{Coulomb-Eichung} \quad (5.25)$$

gilt. Die vektorielle Gleichung (5.25) zerfällt in ihre 3 Komponenten, die mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poissongleichung (2.40) sind.

## 5.4 Multipolentwicklung

Analog zu der in Abschnitt 1.5 besprochenen Multipolentwicklung für das elektrische Potential  $\Phi$  interessiert man sich oft für das  $\vec{B}$ -Feld in großer Entfernung von der (räumlich lokalisiert angenommenen) Stromverteilung  $\vec{j}$ .

Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential  $\vec{\bar{A}}$  analog zu  $\Phi$  in eine Taylorreihe zu entwickeln. Unter Verwendung von Gl. (5.3) und (1.28)

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (5.26)$$

erhalten wir

$$\vec{\bar{A}}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \dots \right) = \vec{\bar{A}}_0(\vec{x}) + \vec{\bar{A}}_1(\vec{x}) + \dots \quad (5.27)$$

mit dem

1.) Monopolanteil:

$$\vec{\bar{A}}_0(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \quad (5.28)$$

als 1. Term der Entwicklung von Gleichung (5.3). Nun ist für jede Komponente  $\alpha = 1, 2, 3$  (mit der Beziehung (4.39))

$$\int_V d^3x' j_\alpha(\vec{x}') = \int_V d^3x' \nabla' \cdot (x'_\alpha \vec{j}(\vec{x}')) = \oint_F d\vec{f}' \cdot x'_\alpha \vec{j}(\vec{x}') = 0 \quad (5.29)$$

wegen  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , dem Gaußschen Integralsatz und der Tatsache, dass  $\vec{j}$  auf der Oberfläche von  $V$  verschwindet ( $\vec{j} \neq 0$  nur innerhalb von  $V$ ). Also folgt:

$$\vec{\bar{A}}_0 = 0 \quad (5.30)$$

da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt, wenn man mit (1.30) vergleicht.

2.) Dipolanteil:

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V d^3x' (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}'). \quad (5.31)$$

Das Integral (5.31) formen wir gemäß (4.44) um:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x' (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') &= \frac{1}{2} \int_V d^3x' [(\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\vec{x} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}'] \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x' [\vec{x} \times (\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{x}')] . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ergebnis:

$$\boxed{\vec{A}_1(\vec{x}) = \vec{m} \times \left( \frac{\mu_0 \vec{x}}{4\pi r^3} \right)} \quad (5.33)$$

mit dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x (\vec{x} \times \vec{j})$  von (4.46). Man vergleiche das Ergebnis mit (1.31)!

### Magnetisches Moment versus Bahndrehimpuls

Für N Punktladungen  $q_i$  lautet  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (\vec{x}_i \times \vec{v}_i) . \quad (5.34)$$

Weiterhin kann  $\vec{m}$  in einen einfachen Zusammenhang mit dem Drehimpuls  $\vec{L}$  der N geladenen Massenpunkte gebracht werden, wenn  $M_i = M$  und  $q_i = q$ , denn dann ist:

$$\vec{m} = \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^N M (\vec{x}_i \times \vec{v}_i) = \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i , \quad (5.35)$$

mit den (Bahn-)Drehimpulsen  $\vec{L}_i$  der geladenen Teilchen, und damit

$$\vec{m} = \frac{q}{2M} \vec{L} . \quad (5.36)$$

Mit dem Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von  $\vec{L}$  verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms.

Umgekehrt lässt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.36) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein *inneres* magnetisches Dipolmoment, das nicht mit dem Bahndrehimpuls, sondern mit dem *Spin* dieser Teilchen verknüpft ist durch:

$$\vec{m}_s = g \frac{q}{2M} \vec{s}, \quad (5.37)$$

wobei  $\vec{s}$  der Spin-Vektor ist und  $g$  das *gyromagnetische Verhältnis*. Es ist  $g \approx 2.0024$  für Elektronen, d.h. für den Spin („inneren Drehimpuls“) des Elektrons ist das magnetische Moment ca. doppelt so groß wie klassisch zu erwarten. Das wird erst in der relativistischen Theorie (Dirac-Theorie) des Elektrons aufgeklärt.

## 5.5 Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld

Wie auch für das elektrische Feld (vgl. Kap. 2.6.) betrachten wir jetzt den Fall, dass eine äußere magnetische Induktion  $\vec{B}(\vec{x})$  auf eine räumlich begrenzte Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x})$  einwirkt und bestimmen von dieser Wechselwirkung den  $f\tilde{A}\frac{1}{4}$ hrenden Term:

$$\vec{K} = \int d^3x [\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})]$$

$\vec{B}(\vec{x})$  soll sich jetzt in den Gebiet, in dem  $\vec{j}(\vec{x}) \neq 0$  ist, nur schwach ändern; den Ursprung  $\vec{x} = 0$  legen wir dann in das Gebiet mit  $\vec{j}(\vec{x}) \neq 0$  und entwickeln  $\vec{B}(\vec{x})$  um den Ursprung in eine Taylorreihe:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(0) + (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{x})|_{\vec{x}=0} + \dots \quad (5.38)$$

Für die Kraft folgt

$$\vec{K} = \underbrace{-\vec{B}(0) \times \int d^3x \vec{j}(\vec{x})}_{=0} + \int d^3x [\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{B}(0)] + \dots \quad (5.39)$$

wobei der erste Term wegen Gl. (5.29) verschwindet.

Für die  $\alpha$ -Komponente der Kraft finden wir (mit Summenkonvention)

$$\begin{aligned}
\vec{K}_\alpha &\approx - \int d^3\mathbf{x} [(\vec{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \vec{B}(0) \times \vec{j}(\mathbf{x})]_\alpha \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{x}} \cdot \nabla) B_\beta(0) j_\gamma(\vec{\mathbf{x}}) \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3\mathbf{x} (x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3) B_\beta(0) j_\gamma(\vec{\mathbf{x}}) \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3\mathbf{x} [(\partial_1 B_\beta(0)) x_1 + (\partial_2 B_\beta(0)) x_2 + (\partial_3 B_\beta(0)) x_3] j_\gamma(\vec{\mathbf{x}}) \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3\mathbf{x} [\nabla B_\beta(0)] \cdot \vec{\mathbf{x}} j_\gamma(\vec{\mathbf{x}})
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Mit der Gleichung (4.44)

$$\int d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{a}} \vec{\mathbf{x}}) \vec{j} = -\frac{1}{2} \vec{\mathbf{a}} \times \int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{x}} \times \vec{j}), \tag{5.41}$$

die wir für  $\vec{\mathbf{a}} = \vec{B}$  bewiesen haben, die aber für einen beliebigen Vektor  $\vec{\mathbf{a}}$  gilt, auf den das Integral nicht wirkt, können wir fortfahren, indem wir jetzt  $\vec{\mathbf{a}} = \nabla B_\beta$  setzen (wir haben die  $\gamma$ -Komponente der Gl. (5.41) vorliegen):

$$\begin{aligned}
\vec{K}_\alpha &\approx -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ [\nabla B_\beta(0)] \times \int_V d^3\mathbf{x} [\vec{\mathbf{x}} \times \vec{j}(\vec{\mathbf{x}})] \right\}_\gamma \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \vec{\mathbf{m}} \times [\nabla B_\beta(0)] \right\}_\gamma \\
&= - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \vec{\mathbf{m}} \times \nabla \right\}_\gamma B_\beta(0) \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \vec{\mathbf{m}} \times \nabla \right\}_\beta B_\gamma(0) = [(\vec{\mathbf{m}} \times \nabla) \times \vec{B}(0)]_\alpha
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Damit ist

$$\vec{K} \approx (\vec{\mathbf{m}} \times \nabla) \times \vec{B}(0) \tag{5.43}$$

der führende Term in der Entwicklung der Kraft auf eine Stromverteilung im  $\vec{B}$ -Feld. Das formen wir noch etwas um:

$$\vec{K} \approx -\vec{\mathbf{m}} [\nabla \cdot \vec{B}(0)] + \nabla [\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{B}(0)] \tag{5.44}$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  folgt also für die Kraft auf einem magnetischen Dipol  $\vec{m}$  in einem räumlich schwach veränderlichen Feld  $\vec{B}$ :

$$\vec{K} \approx \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (5.45)$$

Da die Kraft als negativer Gradient einer potentiellen Energie definiert ist, ergibt sich aus (5.45) für die potentielle Energie des magnetischen Dipols im  $\vec{B}$ -Feld:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \quad (5.46)$$

analog zu  $U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$  als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld, Gl. (2.59). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

## 5.6 Übersicht über die Magnetostatik

### 1.) Basis: *Ampèresches Gesetz*

$$\vec{K} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

für stationäre Ströme, wobei  $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

### 2.) *Feldgleichungen: Aus*

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

folgt

#### a) *differentiell:*

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

#### b) *integral*

$$\oint_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0; \quad \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I$$

### 3.) *Vektor-Potential:*

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

für  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  (Coulomb-Eichung).

**Teil III**

**Grundlagen der Elektrodynamik**

## 6. Die Maxwell'schen Gleichungen

---

### 6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Im folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und für das magnetische Feld  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  für den Fall beliebiger Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho = \rho(\vec{x}, t); \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t) \quad (6.1)$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir in Erweiterung der Gleichungen (1.8) und (4.15):

$$(Lorentz - Kraft) \quad \vec{K} = q \left[ \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.2)$$

Wir hatten in der Magnetostatik den magnetischen Teil dieser Kraft  $\vec{K} = q\vec{v} \times \vec{B}$  separat betrachtet. Da nun aber  $\rho$  und  $\vec{j}$  durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6.3)$$

verknüpft sind, ist klar, dass elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die *Maxwell'schen Gleichungen* sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ .

### 6.2 Faradaysches Induktionsgesetz

Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Wenn sich der magnetische Fluss (Abschnitt 5.1) durch einen geschlossenen Leiterkreis  $L = \partial F$  ändert, wird längs des Leiterkreises ein (die Ladungsträger beschleunigendes) elektrisches Feld induziert, das im Leiter einen Induktionsstrom sowie eine induzierte Spannung der Grösse

$$-k \frac{d}{dt} \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E}' \quad (6.4)$$

hervorrufen, wobei  $\int_F \vec{df} \cdot \vec{B}$  der magnetische Fluss durch die Fläche  $F$  und  $\oint_{\partial F} \vec{dx} \cdot \vec{E}'$  die *elektromotorische Kraft* ist, die die Ladungsträger in der Leiterschleife bewegt (ihre Einheit ist Volt). Hierbei gilt:

- i)  $F$  ist eine beliebige in den Leiterkreis  $\partial F$  eingespannte Fläche (siehe unten);
- ii)  $\vec{E}'$  ist die induzierte elektrische Feldstärke bezogen auf ein mit dem Leiter  $\partial F$  mitbewegtes Koordinatensystem  $\Sigma'$  ist;
- iii)  $k$  ist eine vom Maßsystem abhängige Konstante ist, und zwar:

$$k = 1 \quad \text{im SI-System;} \quad k = \frac{1}{c} \quad \text{im Gaußschen cgs-System.} \quad (6.5)$$

Gleichung (6.2) bezieht sich auf das SI-System und ist im cgs-System zu ersetzen durch

$$\vec{K} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \right) = q \left( \vec{E} + (\vec{\beta} \times \vec{B}) \right) \quad (6.6)$$

mit  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ . Alle folgenden Formeln beziehen sich auf das SI-System.

- iv) Das Vorzeichen in Gl. (6.4) spiegelt die *Lenzsche Regel* wider: Der induzierte Strom produziert ein Feld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

### Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss als entscheidende Größe des Induktionsgesetzes (6.4) lässt sich mit Hilfe des Vektorpotentials wie folgt

$$\int_F \vec{df} \cdot \vec{B} = \int_F \vec{df} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_{\partial F} \vec{dx} \cdot \vec{A}$$

ausdrücken, wenn man den Satz von Stokes anwendet. Die rechte Seite zeigt explizit, dass der Fluss nur vom Weg (Leiterschleife)  $\partial F$  abhängt, nicht jedoch von der speziellen Form der in  $\partial F$  eingespannten Fläche  $F$ .

### Quellenfreiheit von $\vec{B}$

Aus i) folgt, dass auch für zeitabhängige Felder wie in der Magnetostatik die Quellenfreiheit

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad (6.7)$$

der magnetischen Induktion. Sind nämlich  $F_1$  und  $F_2$  irgendwelche in  $\partial F = \partial F_1 = \partial F_2$  eingespannte Flächen, so folgt aus i):

$$\int_{F_1} d\vec{f}_1 \cdot \vec{B} = \int_{F_2} d\vec{f}_2 \cdot \vec{B}. \quad (6.8)$$

Unter Beachtung der Orientierung der Flächen ergibt das Gaußsche Gesetz für das durch  $F_1$  und  $F_2$  definierte Volumen:

$$0 = \oint_{F_1} d\vec{f}_1 \cdot \vec{B} - \oint_{F_2} d\vec{f}_2 \cdot \vec{B} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B}, \quad (6.9)$$

was Gl. (6.7) beweist. Die universelle Gültigkeit von  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  war schon aufgrund der in Abschnitt 5.1 gegebenen Interpretation (Nicht-Existenz von magnetischen Monopolen) zu erwarten.

### 6.3 Diskussion des Induktionsgesetzes

Die totale Zeitableitung auf der linken Seite von Gl. (6.4) kann auf zwei Arten beitragen:

- 1) explizite zeitliche Änderung der magnetischen Induktion  $\vec{B}$ .
- 2) Positionsänderung des Leiterkreises  $\partial F$ .

#### Fall 1: Zeitlich veränderliches $\vec{B}$ -Feld bei ruhendem Leiterkreis $\partial F$

Dann ist  $\vec{E}' = \vec{E}$  die induzierte Feldstärke im Laborsystem  $\Sigma$  und es folgt nach der Formel von Stokes:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = - \int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.10)$$

Im letzten Schritt haben wir berücksichtigt, dass der Leiterkreis  $\vec{F}$  ruht und daher die Zeitableitung nur auf  $\vec{B}$  wirkt, sodass man sie mit dem Integral vertauschen kann. Da die Fläche  $F$  beliebig gewählt werden kann, können wir aus Gl. (6.10) folgern:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.} \quad (6.11)$$

Gleichung (6.11) zeigt zum ersten Mal die erwartete Verknüpfung der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  und stellt eine Erweiterung der elektrostatischen Feldgleichung  $\text{rot } \vec{E} = 0$  für ein zeitabhängiges  $\vec{B}$ -Feld dar.

### Bemerkung:

Gleichung (6.11) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, er dient nur zum Nachweis des induzierten Feldes!

### Anwendung:

Betatron: In dem von einem zeitlich veränderlichen  $\vec{B}$ -Feld induzierten ringförmigen elektrischen Feld  $\vec{E}$  werden geladene Teilchen (z.B. Elektronen) beschleunigt.



**Abbildung 6.1:** Historisches Betatron (6 MeV von 1942).

Quelle: wikipedia

### Fall 2: Bewegter Leiterkreis S bei zeitlich konstantem $\vec{B}$ -Feld

Wir betrachten (im Laborsystem) eine zeitunabhängige (aber räumlich variierende) magnetische Induktion  $\vec{B}$  und bewegen eine Leiterschleife  $\partial F$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  durch dieses  $\vec{B}$ -Feld. Wir bezeichnen das Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht, als  $\Sigma'$  und ihre Koordinaten mit  $\vec{x}'$ . Dann gilt:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t$$

Nun betrachten wir eine Ladung  $q$ , die sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im  $\vec{B}$ -Feld bewegt. Im Laborsystem erfährt sie die Kraft

$$\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.12)$$

Da sich  $\Sigma'$  mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zu  $\Sigma$  bewegt, erfährt die Ladung dieselbe Kraft  $\vec{K}' = \vec{K}$  im Bezugssystem  $\Sigma'$  (keine Scheinkräfte). In  $\Sigma'$  ist ihre Geschwindigkeit jedoch nicht  $\vec{v}$  sondern

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0.$$

Wegen des klassischen Äquivalenzprinzips (Galileiinvarianz), d.h. des Prinzips, dass alle physikalischen Gesetze in beliebigen Inertialsystemen gleich lauten, muss  $\vec{K}'$  dieselbe Gleichung erfüllen wie  $\vec{K}$ , d.h.

$$\vec{K}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q(\vec{E}' - \vec{v}_0 \times \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{B}') \quad (6.13)$$

Durch Vergleich mit Gl. (6.12) gilt daher, dass

$$\vec{B}'(\vec{x}') = \vec{B}(\vec{x}) \quad (6.14)$$

$$\vec{E}'(\vec{x}') = \vec{E}(\vec{x}) + \vec{v}_0 \times \vec{B}(\vec{x}) \quad (6.15)$$

Die elektromotorische Kraft (Ringspannung), die auf Ladungen in der Leiterschleife  $\partial F$  wirkt, ist also

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B}) \quad (6.16)$$

Die rechte Seite können wir mit dem Stokesschen Integralsatz als Flächenintegral schreiben:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \int_F d\vec{f} \cdot \underbrace{\nabla \times (\vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B})}_{=0} \quad (6.17)$$

wobei der erste Term wegen der statischen Feldgleichung  $\text{rot} \vec{E} = 0$  verschwindet. Weiter finden wir

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \int_F d\vec{f} \cdot [(\nabla \cdot \vec{B})\vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B}] = \int_F d\vec{f} \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B} \quad (6.18)$$

wegen  $\text{div} \vec{B} = 0$ .

Das Magnetfeld  $\vec{B}'$ , das im Bezugssystem  $\Sigma'$  wirkt, ist zeitabhängig, da

$$\vec{B}'(\vec{x}', t) = \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t)$$

In  $\Sigma'$  gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_1(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \\ B_2(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \\ B_3(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{01}\partial_1 B_1 + v_{02}\partial_2 B_1 + v_{03}\partial_3 B_1 \\ v_{01}\partial_1 B_2 + v_{02}\partial_2 B_2 + v_{03}\partial_3 B_2 \\ v_{01}\partial_1 B_3 + v_{02}\partial_2 B_3 + v_{03}\partial_3 B_3 \end{pmatrix} = (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Einsetzen in Gl. (6.18) ergibt also

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = - \int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = - \frac{d}{dt} \int_F d\vec{f}' \cdot \vec{B}' \quad (6.20)$$

denn die Leiterschleife ruht in  $\Sigma'$ .

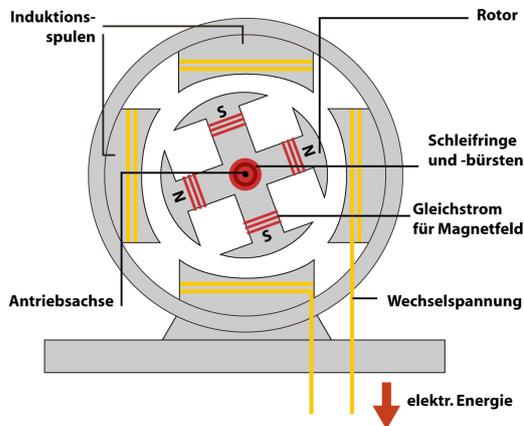
Da diese Identität für beliebige Leiterschleifen (und in beliebige Inertialsystemen) gelten muß, können wir sie auch in infinitesimaler Form (ohne Striche) schreiben:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (6.21)$$

Diese Relation verknüpft in derselben Weise wie Gl. (6.11) das elektrische und das magnetische Feld; die Verallgemeinerung von  $\nabla \times \vec{E} = 0$  für zeitabhängige Prozesse gilt also genauso für zeitabhängige  $\vec{B}$ -Felder wie für Bewegungen von Leiterschleifen.

### Anwendung:

#### Wechselstromgenerator



**Abbildung 6.2:** Schematischer Aufbau eines vierpoligen Wechselstromgenerators

Quelle: wikipedia

## 6.4 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Das Ampèresche Gesetz der Magnetostatik

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.22)$$

gilt nur für stationäre Ströme. Bildet man nämlich

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j}, \quad (6.23)$$

so erhält man wegen der Identität

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0, \quad (6.24)$$

gerade  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , d.h. stationäre Ströme. Allgemein gilt jedoch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.25)$$

so dass (6.22) für nichtstationäre Ströme modifiziert werden muss.

Wie diese Modifikation aussehen muss, wird sofort klar, wenn man das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik (Kapitel 2.4) beibehält:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}, \quad (6.26)$$

was durch die in Kapitel 1.1 aufgeführte Ladungsinvarianz gestützt wird. Daraus folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Kombiniert man dies nun mit der Kontinuitätsgleichung (6.25), so folgt:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.27)$$

Ersetzt man daher

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.28)$$

so hat man wieder einen Strom mit verschwindender Divergenz wie in der Magnetostatik. In Einklang mit der Ladungserhaltung erweitern wir also (6.22) wie folgt:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}. \quad (6.29)$$

Das Ampèresche Gesetz (6.29) findet seine experimentelle Bestätigung in der Existenz elektromagnetischer Wellen (s.u.).

### Selbstinduktion

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung gemäß (6.29) ein magnetisches (und elektrisches) Feld. Ändert sich der Fluss dieses Magnetfeldes durch den Leiterkreis, so wird im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt (Selbstinduktion), der nach (6.4) dem primären Strom entgegen gerichtet ist (Lenzsche Regel).

Die Selbstinduktion hängt von der Geometrie des Leiters ab. Für eine quantitative Formulierung greift man zweckmäßigerweise auf die elektromagnetischen Potentiale zurück (Kap. 7).

## 6.5 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen

### Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.30)$$

was dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht.

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (6.31)$$

was dem Faradayschen Induktionsgesetz entspricht.

### Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.32)$$

was dem Gaußschen Gesetz entspricht.

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad (6.33)$$

was dem Ampère-Maxwellschen Gesetz entspricht.

In (6.32) und (6.33) ist die Ladungserhaltung (6.25) schon implizit enthalten. (6.31) und (6.33) zeigen, dass ein zeitlich veränderliches Magnetfeld  $\vec{B}$  ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  bedingt und umgekehrt. Die Gleichungen (6.30) – (6.33) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\vec{K} = q \left[ \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.34)$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik.

## 7. Die elektromagnetischen Potentiale

---

### 7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Statt die gekoppelten Differentialgleichungen (6.30) - (6.33), die Maxwell'schen Gleichungen, für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  direkt zu lösen, ist es meist bequemer - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.

Da generell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.1)$$

gilt, können wir ein Vektorpotential  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  über die Beziehung

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.2)$$

einführen. Für  $\dot{\vec{B}}$  finden wir damit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dann schreibt sich das Induktionsgesetz (6.31)  $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$  als

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (7.3)$$

d.h. die Vektorfunktion  $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$  ist wirbelfrei, und lässt sich als Gradient einer skalaren Funktion  $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$  darstellen:

$$\left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \Phi, \quad (7.4)$$

oder

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (7.5)$$

Damit sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das skalare Potential  $\Phi$  zurückgeführt.

### Gleichungen für $\vec{A}$ und $\Phi$

Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen  $\vec{A}$  und  $\Phi$  berechnet werden können, wenn  $\rho$  und  $\vec{j}$  vorgegeben sind. Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.32) und (6.33). Aus dem Gaußschen Gesetz (6.32) folgt mit  $\vec{E}$  aus Gl. (7.5):

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot \nabla \Phi$$

und damit

$$\boxed{\Delta \Phi + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (7.6)$$

Indem man den Term  $-\mu_0 \epsilon_0 \ddot{\Phi}$  beidseitig ergänzt, kann man diese Gleichung auch schreiben als

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (7.7)$$

Weiterhin folgt aus dem Ampère-Maxwellschen Gesetz (6.33) mit den Beziehungen (7.2) und (7.5)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

und damit

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}. \quad (7.8)$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = -\Delta \vec{a} + \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) \quad (7.9)$$

geht (7.8) über in:

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)} \quad (7.10)$$

Damit haben wir die acht Maxwell-Gleichungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  überführt in vier Gleichungen (7.6) oder (7.7) und (7.10) für die Potentiale  $\vec{A}$  und  $\Phi$ , die jedoch untereinander gekoppelt sind. Diese Kopplung werden wir durch geeignete Eichtransformationen beseitigen können.

### Eichinvarianz

Zur Entkopplung von Gl. (7.6) und (7.10) machen wir davon Gebrauch, dass die Maxwell-Gleichungen unter den Eichtransformationen

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\chi, \quad (7.11)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (7.12)$$

invariant sind. Hierbei ist  $\chi(\vec{x}, t)$  eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion. Diese Behauptung weisen wir nach, indem wir zeigen, dass die Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \quad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi$$

unter den Transformationen invariant sind:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\tilde{B}} &\equiv \nabla \cdot [\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi)] = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) + \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla\chi)}_{=0} \\ &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{\tilde{E}} &\equiv \nabla \cdot (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\Phi + \nabla\dot{\chi}) = \nabla \cdot (-\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi) = \nabla \cdot \vec{E} \\ \nabla \times \vec{\tilde{B}} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{\tilde{E}}} &\equiv \nabla \times [\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi)] - \mu_0 \epsilon_0 (-\ddot{\vec{A}} - \nabla\ddot{\chi} - \nabla\dot{\Phi} + \nabla\dot{\chi}) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \mu_0 \epsilon_0 (-\ddot{\vec{A}} - \nabla\dot{\Phi}) = \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \\ \nabla \times \vec{\tilde{E}} + \dot{\vec{\tilde{B}}} &\equiv \nabla \times (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\Phi + \nabla\dot{\chi}) + \nabla \times (\dot{\vec{A}} + \nabla\dot{\chi}) \\ &= \nabla \times (-\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi) + \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} \end{aligned}$$

### 7.2 Lorenz-Eichung

Die Gleichungen (7.7) und (7.10) legen es nahe,  $\chi$  so zu wählen, dass

$$\nabla \cdot \dot{\vec{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad (7.13)$$

was der *Lorentz-Konvention* entspricht. Man erhält dann aus Gl. (7.10) und (7.7) entkoppelte Gleichungen:

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (7.14)$$

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.15)$$

die jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.40) und (5.25) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorenz-Eichung (7.13) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  benutzt, da diese Eichung Lorentz-invariant (invariant unter Lorentztransformationen) ist.

### Konstruktion von $\chi$

Falls

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0 \quad (7.16)$$

wäre, so führen wir eine Eichtransformation durch und fordern:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta \chi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (7.17)$$

d.h.  $\Delta \chi$  und  $\ddot{\chi}$  sollen die unerwünschten Terme kompensieren. Gleichung (7.17) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\Delta \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = f(\vec{x}, t). \quad (7.18)$$

Bei gegebener Inhomogenität

$$f(\vec{x}, t) = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (7.19)$$

ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.18) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.20)$$

addiert werden kann, d.h. Gl. (7.18) legt  $\chi(\vec{x}, t)$  nur bis auf Lösungen der homogenen Wellengleichung (7.20) fest.

### 7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird  $\chi$  meist so gewählt, dass

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (7.21)$$

Dann geht (7.6) über in

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.22)$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}; \quad (7.23)$$

aus (7.10) wird

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \epsilon_0\mu_0 \nabla \frac{\partial\Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\frac{\partial\rho(\vec{x}', t)}{\partial t} (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{(\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)) (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung  $-\dot{\rho} = \nabla \cdot \vec{j}$  verwendet haben. Diese Eichung ist nicht Lorentz-invariant, d.h. Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen eichen anders.

### Elektromagnetische Wellen

In quellenfreien Gebieten mit

$$\rho = 0; \quad \vec{j} = 0 \quad (7.25)$$

reduzieren sich (7.23) und (7.24) dann auf:

$$\Phi = 0; \quad \Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.26)$$

Die Lösungen von (7.26) sind elektromagnetische Wellen, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Kap. IV).

### Konstruktion von $\chi$

Erfüllt die Lösung  $\vec{A}$  von (7.10) nicht die Eichbedingung (7.21), so führen wir die Transformation (7.11), (7.12) durch und fordern

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta\chi = 0, \quad (7.27)$$

oder

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \vec{A}. \quad (7.28)$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.18) mit  $-\nabla \cdot \vec{A}$  als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von  $\chi$ : Zu jeder Lösung von (7.28) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung (Laplacegleichung)

$$\Delta\chi = 0 \quad (7.29)$$

addieren.

## 8. Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

---

### 8.1 Energie

In Abschnitt 2.5 hatten wir dem elektrostatischen Feld eine Energie zugeordnet, charakterisiert durch die Energiedichte

$$\omega_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2. \quad (8.1)$$

Analog kann man dem magnetostatischen Feld eine Energie zuordnen. Wir wollen diesen Schritt überspringen und direkt die Energiebilanz für ein beliebiges elektromagnetisches Feld aufstellen.

Wir betrachten dazu zunächst eine Punktladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in einem elektromagnetischen Feld  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  bewegt. Die an dieser Ladung vom Feld geleistete Arbeit ist gegeben durch die Leistung:

$$\frac{dW_M}{dt} = \vec{K} \cdot \vec{v} = q [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (8.2)$$

Nur der elektrische Anteil der Kraft ist am Energieaustausch zwischen Teilchen und Feld beteiligt; das Magnetfeld leistet keine Arbeit, da der magnetische Anteil der Kraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. Entsprechend gilt für einen Strom der Stromdichte  $\vec{j}$ :

$$\frac{dW_M}{dt} = \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (8.3)$$

Der Index  $M$  steht dafür, dass es sich hier um mechanische Arbeit handelt, die an den geladenen Teilchen geleistet wird. Die an den bewegten Punktladungen vom Feld geleistete Arbeit geht auf Kosten des elektromagnetischen Feldes; die explizite Form davon soll im folgenden hergeleitet werden.

Wir eliminieren in Gl. (8.3) zunächst die auf die bewegten Massenpunkte bezogene Stromdichte  $\vec{j}$  mit Hilfe des Ampère-Maxwell'schen Gesetzes

$$(6.33), \mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}:$$

$$\int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{j} = \int_V d^3x \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (8.4)$$

Diesen Ausdruck, der nur noch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  enthält, können wir bzgl.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  symmetrisieren. Wir verwenden

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \partial_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta B_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha E_\beta) B_\gamma + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta (\partial_\alpha B_\gamma) \\ &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

sowie das Induktionsgesetz  $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  und finden:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.6)$$

Setzen wir nun Gl. (8.6) in (8.4) ein, so erhalten wir:

$$\int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{j} = - \int_V d^3x \left( \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right). \quad (8.7)$$

## Interpretation

### **Fall 1 : $V \rightarrow \infty$**

Aus Gl. (8.3) und (8.7) folgt für die *Feldenergie*

$$\boxed{W_F = \int_V d^3x \left( \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right)}, \quad (8.8)$$

falls die Felder asymptotisch schnell genug abfallen, so dass der Divergenz-Term in Gl. (8.7) verschwindet. Mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes,

$$\int_V d^3x \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.9)$$

mit  $\partial V$  als Oberfläche des (zunächst als endlich angenommenen) Volumens  $V$ , findet man, dass die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stärker als  $1/R$  abfallen müssen, da  $d\vec{f}$  mit  $R^2$  anwächst (vgl. Abschnitt 2.5). Für statische Felder ist die obige Voraussetzung erfüllt, nicht dagegen für Strahlungsfelder (vgl. Kap. 11). In Gl. (8.8) können wir nun die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes*

$$\omega_F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8.10)$$

eingeführen, die sich aus einem elektrischen Anteil (vgl. (8.1))

$$\omega_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (8.11)$$

und einem magnetischen Anteil

$$\omega_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (8.12)$$

zusammensetzt.

### Fall 2 : V endlich

Wir behalten die Interpretation von Gl. (8.10) bei und schreiben, da  $V$  beliebig wählbar ist, Gl. (8.7) als (differentielle) Energiebilanz:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \omega_{\text{F}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{S}} = 0}. \quad (8.13)$$

mit dem *Poynting-Vektor*

$$\boxed{\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})}. \quad (8.14)$$

**Interpretation:** Die Feldenergie in einem Volumen  $V$  kann sich via Gl. (8.13) dadurch ändern,

- (a) dass Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung (Kap. 11) hinein-(hinaus-)strömt, beschrieben durch den Term  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{S}}$ , und/oder
- (b) dass an Punktladungen Arbeit geleistet wird, beschrieben durch  $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}}$ .

In Analogie zur Ladungserhaltung (Abschnitt 4.1 ) nennen wir  $\vec{\mathbf{S}}$  die Energiestromdichte, bzw. den Poynting-Vektor. Die Energiebilanz zeigt, dass die Energie des abgeschlossenen Systems (Punktladungen plus elektromagnetisches Feld) eine Erhaltungsgröße ist.

## 8.2 Impuls

Dem elektromagnetischen Feld kann man außer Energie auch Impuls zuordnen. Wir beginnen wieder mit der Impulsbilanz für eine Punktladung  $q$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{\mathbf{v}}$ . Nach Newton gilt dann für die Änderung des Impulses  $\vec{\mathbf{p}}_{\text{M}}$  der Punktladung:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{M}}}{dt} = q [\vec{\mathbf{E}} + (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})]. \quad (8.15)$$

Für  $N$  Punktladungen, charakterisiert durch eine Stromdichte  $\vec{j}$  und Ladungsdichte  $\rho$  erhalten wir entsprechend für den Gesamtimpuls  $\vec{P}_M$  der Ladungen:

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int_V d^3x [\rho \vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B})]. \quad (8.16)$$

Analog zu Abschnitt 8.1 versuchen wir,  $\rho$  und  $\vec{j}$  zu eliminieren, so dass die rechte Seite in Gl. (8.16) nur noch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  enthält.

Wir benutzen dazu

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (8.17)$$

und

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.18)$$

Das Resultat

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int_V d^3x \left[ \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) \right] \quad (8.19)$$

können wir bzgl.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  symmetrisieren, indem wir in (8.19) den (verschwindenden) Term

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) \quad (8.20)$$

hinzufügen und in

$$-\epsilon_0 \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (8.21)$$

das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.22)$$

ausnutzen. Ergebnis:

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int_V d^3x \left\{ \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right\}. \quad (8.23)$$

Wir verwenden die Abkürzung  $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$  und fassen für die Interpretation von (8.23) einige Terme wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})]_\alpha &= E_\alpha \partial_\mu E_\mu - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\lambda\mu} E_\beta \partial_\lambda E_\mu = \\
&= E_\alpha \partial_\mu E_\mu - (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}) E_\beta \partial_\lambda E_\mu = E_\alpha \partial_\mu E_\mu - E_\mu \partial_\alpha E_\mu + E_\mu \partial_\mu E_\alpha \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\alpha E_\mu^2 + \partial_\mu E_\mu E_\alpha = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( E_\alpha E_\mu - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\mu} \right).
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Für das Verjüngen der Levi-Civita-Tensoren haben wir folgende allgemeine Beziehung benutzt:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} \tag{8.25}$$

Diese zeigen wir, indem wir prüfen, ob beide Seiten dieselben Symmetrien bezüglich der Indizes aufweisen, und indem wir dann die Identität fuer einen Spezialfall zeigen. Beim Vertauschen zweier Indizes ändern beide Seiten ihr Vorzeichen (rechts, weil Vertauschen von Indizes zum Vertauschen eines Zeilen- oder Spaltenpaars führt, d.h. zum Vorzeichenwechsel der Determinante); bei Gleichheit zweier Indizes werden beide Seiten null (rechts, weil das zu zwei gleichen Zeilen/Spalten führt, d.h. verschwindender Determinante). Für den Spezialfall  $\alpha = \lambda = 1, \beta = \mu = 2, \gamma = \nu = 3$  ist das Ergebnis links  $\epsilon_{123} \epsilon_{123} = 1$ , rechts

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Mit der Wahl  $\alpha = \lambda$  folgt aus Gl. (8.25)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$$

mit derselben Diskussion oder durch Entwickeln der Determinante aus Gl. (8.25). Entsprechend der  $\vec{E}$ -Terme erhalten wir für die  $\vec{B}$ -Terme

$$[\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})]_\alpha = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( B_\alpha B_\mu - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\mu} \right). \tag{8.26}$$

Damit ist das Ergebnis für die Impulsänderung:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_M + \vec{P}_F)_\alpha + \int_V d^3x \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\alpha\mu} = 0, \quad (8.27)$$

wobei der *Maxwellsche Spannungstensor*  $T_{im}$  durch

$$T_{\alpha\mu} = \epsilon_0 \left( \frac{E^2}{2} \delta_{\alpha\mu} - E_\alpha E_\mu \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{B^2}{2} \delta_{\alpha\mu} - B_\alpha B_\mu \right) \quad (8.28)$$

gegeben ist. Die Divergenz des Spannungstensors ist so zu verstehen:

$$\underline{\underline{T}}^\alpha = T_{\alpha\mu} \vec{e}_\mu \quad \nabla \cdot \underline{\underline{T}}^\alpha = \vec{e}_\mu \partial_\mu T_{\alpha\mu} \vec{e}_\mu = \partial_\mu T_{\alpha\mu}$$

$T_{\alpha\mu}$  ist also die  $\mu$ -Komponente eines Vektors  $\underline{\underline{T}}^\alpha$  beziehungsweise eine Komponente des Tensors 2. Stufe  $\underline{\underline{T}}$ . Dieser Tensor ist symmetrisch:  $T_{\alpha\mu} = T_{\mu\alpha}$ , sodass wir die Summe in Gl. (8.27) als  $\alpha$ -Komponente von  $\nabla \cdot \underline{\underline{T}}$  auffassen können, denn

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{T}} &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 T_{11} & \partial_2 T_{12} & \partial_3 T_{13} \\ \partial_1 T_{21} & \partial_2 T_{22} & \partial_3 T_{23} \\ \partial_1 T_{31} & \partial_2 T_{32} & \partial_3 T_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 T_{11} & \partial_2 T_{21} & \partial_3 T_{31} \\ \partial_1 T_{12} & \partial_2 T_{22} & \partial_3 T_{32} \\ \partial_1 T_{13} & \partial_2 T_{23} & \partial_3 T_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Gesamtimpuls  $\vec{P}_F$  des elektromagnetischen Feldes ist  $\vec{P}_F = \int_V d^3x \vec{\pi}_F$  mit der Impulsdichte

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.29)$$

## Interpretation

### Fall 1 : $V \rightarrow \infty$

Wie unter Abschnitt 8.1 überzeugt man sich, dass der dritte Term in (8.27) verschwindet, falls die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  schneller als  $1/R$  abfallen. Dann lautet die Impulsbilanz

$$\vec{P}_M + \vec{P}_F = \text{const.} \quad (8.30)$$

Gleichung (8.30) legt nahe,  $\vec{P}_F$  als Impuls des elektromagnetischen Feldes zu interpretieren. Für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Felder) ist dann der Gesamtimpuls, der sich additiv aus Teilchen- und Feldimpuls zusammensetzt, eine Erhaltungsgröße.

**Fall 2 : Allgemeines Volumen**

Da das Volumen  $V$  in (8.27) beliebig ist, finden wir für  $(\underline{T})_{im} \equiv T_{im}$  die differentielle Impulserhaltung

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\pi}_M}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\pi}_F}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{T} = 0,} \quad (8.31)$$

wobei wir Gl. (8.16) für die mechanische Impulsdichte  $\vec{\pi}_M = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$  verwendet haben.

**Fall 3 : V endlich**

Wir formen die rechte Seite in (8.27) mit dem Gaußschen Gesetz um:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{P}_M + \vec{P}_F)_\alpha &= - \int_V d^3x [\nabla \cdot \underline{T}]_\alpha = - \oint_{\partial V} [d\vec{f} \cdot \underline{T}]_\alpha \\ &= - \oint_{\partial V} \sum_{\mu=1}^3 T_{\alpha\mu} df_\mu = - \oint_{\partial V} df [\vec{n} \cdot \underline{T}]_\alpha, \end{aligned} \quad (8.32)$$

wobei  $d\vec{f} = \vec{n} df$  das gerichtete Oberflächen-Element und  $\partial V$  die die Oberfläche von  $V$  sind. Da auf der linken Seite von (8.32) nach Newton eine Kraft steht, können wir  $\vec{n} \cdot \underline{T}$  als *Druck des Feldes (Strahlungsdruck)* interpretieren. Das elektromagnetische Feld überträgt auf einen Absorber also nicht nur Energie, sondern auch Impuls.

Der Strahlungsdruck des Lichts wurde von Lebedev und Hull direkt an einer Drehwaage nachgewiesen. An den Balkenenden angebrachte Metallplättchen wurden im Takt der Eigenschwingung jeweils belichtet; es wurden in Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten.

Der Strahlungsdruck wird auch bei den Sonnensegeln der Satelliten ausgenutzt; die Solarkonstante beträgt  $1370 \text{ W/m}^2$ ; das entspricht einem Solar-Strahlungsdruck von  $4.6 \text{ } \mu\text{Pa}$  bei Absorption bzw. dem doppelten Wert bei Totalreflexion. Mit diesem Druck auf die Sonnensegel lässt sich die Lage von Satelliten stabilisieren.

### Bemerkung

Die Tatsache, dass die sich die Impulsdichte  $\vec{\pi}_F$  und die Energiestromdichte  $\vec{S}$  nur um einen konstanten Faktor unterscheiden,

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{S}, \quad (8.33)$$

ist kein Zufall, sondern ergibt sich zwangsläufig im Rahmen der relativistischen Formulierung.

### 8.3 Drehimpuls

Die Änderung des Drehimpulses einer Punktladung  $q$  im elektromagnetischen Feld ist durch

$$\frac{d\vec{l}_M}{dt} = \vec{x} \times \frac{d\vec{p}_M}{dt} = q \vec{x} \times \left[ \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \quad (8.34)$$

gegeben. Entsprechend gilt für  $N$  Punktladungen, die durch  $\rho$  und  $\vec{j}$  charakterisiert seien, im Volumen  $V$ :

$$\frac{d\vec{L}_M}{dt} = \int_V d^3x \vec{x} \times \left[ \rho \vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B}) \right]. \quad (8.35)$$

Eliminiert man  $\rho$  und  $\vec{j}$  und symmetrisiert man das Resultat bzgl.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , so erhält man analog Abschnitt 8.2

$$\frac{d\vec{L}_M}{dt} = \int_V d^3x \vec{x} \times \left\{ \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 (\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})) \right\}.$$

### Interpretation

#### Fall 1 : $V \rightarrow \infty$

Fallen die Felder asymptotisch rasch genug ab, d.h. stärker als  $1/R$ , so bleibt für  $V \rightarrow \infty$ :

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_M + \vec{L}_F) = 0, \quad (8.36)$$

mit

$$\vec{L}_F = \epsilon_0 \int_V d^3x \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.37)$$

als *Drehimpuls des Feldes*. Die Summe aus dem mechanischen Drehimpuls  $\vec{L}_M$  und dem des Feldes  $\vec{L}_F$  ist eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{L}_M + \vec{L}_F = \text{const.} \quad (8.38)$$

### Fall 2 : Allgemeines Volumen

Für ein beliebiges Volumen finden wir auch eine differentielle Form der Drehimpulserhaltung:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\lambda}_M}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\lambda}_F}{\partial t} + \vec{x} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{I}}) = 0,} \quad (8.39)$$

wobei die Drehimpulsdichten

$$\vec{\lambda}_M = \vec{x} \times \left[ \rho \vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B}) \right] \quad \text{und} \quad \vec{\lambda}_F = \epsilon_0 \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B})$$

verwendet sind.

## 8.4 Zusammenfassung

Bei Abwesenheit anderer Kräfte gelten für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Da sich Energie, Impuls und Drehimpuls der Punktladungen zeitlich ändern, müssen wir dem Feld selbst Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen, um die Erhaltungssätze für das Gesamtsystem zu garantieren. Die Grundgrößen

*Energiedichte*

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (8.40)$$

*Impulsdichte*

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (8.41)$$

und *Drehimpulsdichte*

$$\vec{\lambda}_F = \epsilon_0 \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{x} \times \vec{\pi}_F \quad (8.42)$$

findet man aus den jeweiligen Bilanzen unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen. Die Tatsache, dass man dem Maxwell-Feld *mechanische* Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen kann, bietet die Grundlage für die im atomaren Bereich benutzte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene durch *Teilchen*, die als *Photonen* bezeichnet werden.

## Teil IV

# Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

## 9. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

---

### 9.1 Homogene Wellengleichungen

Im Vakuum ( $\rho = 0$ ;  $\vec{j} = 0$ ) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (9.1)$$

Zur *Entkopplung* von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \\ &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

wobei wir drei der vier homogenen Maxwellgleichungen (9.1) verwendet haben. Das Resultat ist eine homogene Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0; \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0. \quad (9.3)$$

Analog verfährt man mit dem  $\vec{E}$ -Feld:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \\ &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Mit der Abkürzung

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (9.5)$$

für den *d'Alembert-Operator*  $\square$  erhält man dann anstelle von (9.1)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \square \vec{B} = 0; & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \square \vec{E} = 0; & \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array}} \quad (9.6)$$

Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kapitel 7:

$$\square \vec{A} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (9.7)$$

$$\Phi = 0 \quad (9.8)$$

in der Coulomb-Eichung.

Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\square f(\vec{x}, t) = 0 \quad (9.9)$$

zu lösen, wobei  $f$  für irgendeine Komponente von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  oder  $\vec{A}$  steht. Die Lösungen für  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{A}$  sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, dass die Divergenz verschwindet (Transversalitätsbedingung).

## 9.2 Ebene Wellen

### Ebene Wellen in z-Richtung

Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, dass die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nur in einer Raumrichtung, z.B. in z-Richtung, variieren, d.h.  $f = f(z, t)$ . Dann lautet die Wellengleichung (9.9)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(z, t) = 0. \quad (9.10)$$

Wir suchen Lösungen dieser Gleichung, indem wir die Substitution

$$\xi = z - ct \quad \eta = z + ct$$

vornehmen, d.h.

$$z = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi).$$

Damit lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \curvearrowright \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Wellengleichung also als

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0$$

schreiben. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f = f_+(\xi) + f_-(\eta)$$

und nach Rücktransformation auf die alten Variablen  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{t}$

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = f_+(\mathbf{z} - \mathbf{c}\mathbf{t}) + f_-(\mathbf{z} + \mathbf{c}\mathbf{t})$$

worin  $f_+$  und  $f_-$  beliebige, zweimal differenzierbare Funktionen sind. Die Lösung  $f(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = f_+(\mathbf{z} - \mathbf{c}\mathbf{t})$  bedeutet, dass ein beliebiger, zur Zeit  $\mathbf{t} = 0$  vorgegebener Funktionsverlauf  $f_+(\xi)$  sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{c}$  in positiver  $\mathbf{z}$ -Richtung verschiebt (oder bei  $f_-(\mathbf{z} + \mathbf{c}\mathbf{t})$  in negativer  $\mathbf{z}$ -Richtung). Wegen der Linearität der Wellengleichung lassen sich die Lösungen überlagern. Das Argument  $\mathbf{z} \mp \mathbf{c}\mathbf{t}$  heißt die Phase der Lösung der Wellengleichung. Den Punkten  $\mathbf{z}$  gleicher Phase sind dieselben Werte der Funktion  $f_+(\mathbf{z} - \mathbf{c}\mathbf{t})$  (oder  $f_-(\mathbf{z} + \mathbf{c}\mathbf{t})$ ), d.h. dieselben physikalischen Feldzustände, zugeordnet. Die Punkte gleicher Phase liegen auf den Ebenen  $\mathbf{z} = \pm \mathbf{c}\mathbf{t}$ , die senkrecht auf dem Basisvektor  $\vec{\mathbf{e}}_z$  stehen und sich mit Geschwindigkeit  $\pm \mathbf{c}$  in Richtung  $\vec{\mathbf{e}}_z$  bewegen. Solche Lösungen der Wellengleichung heißen ebene Wellen. Beispiel:

$$f_{\pm}(\mathbf{z} \mp \mathbf{c}\mathbf{t}) = \frac{f_0}{\mathbf{b}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{z} \mp \mathbf{c}\mathbf{t})^2}{2\mathbf{b}^2}\right], \quad f_0 = \text{const.}$$

Das ist eine Welle in Form einer Gaußkurve der Breite  $\mathbf{b}$ .

### Allgemeine ebene Wellen

Die ebenen Wellen, die sich in  $\mathbf{z}$ -Richtung bewegen, lassen sich leicht zu dem allgemeinen wichtigen Lösungstyp von (9.9) verallgemeinern:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = f(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \mp \mathbf{c}\mathbf{t}) \tag{9.11}$$

für beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktionen  $f$  und dem Einheitsvektor  $\vec{\mathbf{n}}$  in einer beliebigen Raumrichtung, mit  $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$ . Um zu zeigen, dass Gl. (9.11) eine Lösung der Wellengleichung ist, verwenden wir die Abkürzung

$$\xi = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \mp \mathbf{c}\mathbf{t} \tag{9.12}$$

und bilden:

$$\begin{aligned}
 (\nabla f)_\alpha &= \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \xi} n_\alpha \rightsquigarrow \nabla f = \vec{n} \frac{df}{d\xi}; & \Delta f &= \vec{n}^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}; \\
 \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} (\mp c) \rightsquigarrow \mp \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{d^2 f}{d\xi^2}.
 \end{aligned}
 \tag{9.13}$$

und somit

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.
 \tag{9.14}$$

Damit ist

$$\vec{B} = \vec{B}_0 f(\vec{x}, t)
 \tag{9.15}$$

Lösung von Gl. (9.3); analog für  $\vec{E}$  und  $\vec{A}$ .

## Eigenschaften der Lösungen

### i) Ebene Wellen

Funktionen vom Typ (9.11) beschreiben ebene Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte  $\vec{x}$ , in denen  $f(\vec{x}, t)$  zu einer festen Zeit  $t$  den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebene (Hesse'sche Normalform)

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const} ,
 \tag{9.16}$$

die senkrecht zu  $\vec{n}$  steht. Je nach Wahl des Vorzeichens in (9.11) erhält man Wellen, die in  $\pm \vec{n}$ -Richtung laufen.

### ii) Transversalität der elektromagnetischen Wellen

Aus  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  folgt mit Gl. (9.15)  $\vec{B} = \vec{B}_0 f(\vec{x}, t)$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = B_{01} \frac{\partial f}{\partial \xi} n_1 + B_{02} \frac{\partial f}{\partial \xi} n_2 + B_{03} \frac{\partial f}{\partial \xi} n_3 ,$$

also

$$\left( \vec{B}_0 \cdot \vec{n} \right) \frac{df}{d\xi} = 0 ,
 \tag{9.17}$$

d.h. da  $\partial f/\partial \xi$  im allgemeinen nicht null ist,

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 ; \quad (9.18)$$

Entsprechende Orthogonalität zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$  der Welle findet man für  $\vec{E}$  und  $\vec{A}$ , wenn man  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  (im Vakuum) und  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  (wegen der Coulombbeziehung) berücksichtigt.

### iii) Orthogonalität von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

Aus dem Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.19)$$

folgt für die ebenen Wellenlösungen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct); \quad \vec{B} = \vec{B}_0 g(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) \quad (9.20)$$

wegen

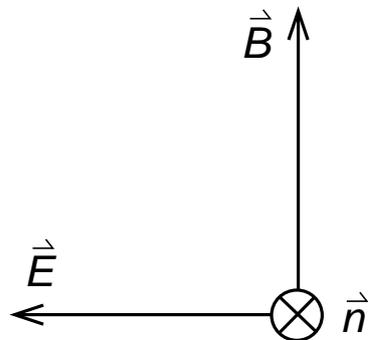
$$(\nabla \times \vec{E})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta E_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{0\gamma} \frac{\partial f}{\partial \xi} n_\beta = (\vec{n} \times \vec{E}_0)_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

die Beziehung

$$(\vec{n} \times \vec{E}_0) \frac{df}{d\xi} = c \vec{B}_0 \frac{dg}{d\xi}, \quad (9.21)$$

also  $\vec{E} \perp \vec{B}$  mit Gl. (9.18).  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  bilden also ein orthogonales Dreibein (siehe Fig. 9.1).

**Abbildung 9.1:**  $\vec{E}$ ,  
 $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  bilden ein  
Rechtssystem.



### Bemerkungen

- 1.) Außer ebenen Wellen sind z.B. auch Kugelwellen Lösungen von Gl. (9.9); sie haben die Form:

$$\frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{c}t)}{r}, \quad (9.22)$$

wobei  $f$  eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist. Der Beweis verläuft analog zu (9.13) in Kugelkoordinaten.

- 2.) Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen,  $\gamma$ -Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit der Relation  $\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{\mathbf{E}} / \partial t$  im Vakuum, die entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie stellt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.29) dar.

### 9.3 Monochromatische ebene Wellen

Eine spezielle Form der ebenen Welle ist die Wahl

$$f(\xi) = \exp\left(i \frac{\omega}{c} \xi\right)$$

mit der man z.B. die elektrische Feldstärke in der Form

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp(i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \mp \omega t)) \quad (9.23)$$

erhält. Dabei ist

$$\vec{\mathbf{k}} = k \vec{\mathbf{n}}, \quad (9.24)$$

und  $\omega$  und  $\vec{\mathbf{k}}$  hängen über die *Dispersionsrelation*

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad (9.25)$$

zusammen, wie man durch Einsetzen von Gl. (9.23) in die Wellengleichung (9.6) sofort sieht. Eine ebene Welle vom Typ (9.23) nennt man *monochromatisch*, da sie nur eine (Kreis-)Frequenz  $\omega$  enthält. Entsprechende Lösungen findet man für  $\vec{\mathbf{A}}$  und  $\vec{\mathbf{B}}$ .

### Komplexe versus reelle Felder

$\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{A}}$  und  $\vec{\mathbf{B}}$  sind als Messgrößen reelle Vektorfelder. Die komplexe Schreibweise in Gleichung (9.23) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, dass das physikalische Vektorfeld durch den Realteil von (9.23) beschrieben wird.

Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.

Bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte treten Produkte von Vektorfeldern auf. Bei diesen Problemen muss man von Anfang an reell rechnen. Zeitliche Mittelwerte  $\langle \dots \rangle$  solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}_0(\vec{x}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{b}(\vec{x}, t) = \vec{b}_0(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \quad (9.26)$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\langle (\text{Re}\vec{a}) \cdot (\text{Re}\vec{b}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}^*), \quad (9.27)$$

denn in

$$\begin{aligned} (\text{Re}\vec{a}) \cdot (\text{Re}\vec{b}) &= \frac{1}{4} (\vec{a}_0 \exp(-i\omega t) + \vec{a}_0^* \exp(i\omega t)) (\vec{b}_0 \exp(-i\omega t) + \vec{b}_0^* \exp(i\omega t)) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{a}_0 \vec{b}_0^* + \vec{a}_0^* \vec{b}_0 + \vec{a}_0 \vec{b}_0 \exp(-2i\omega t) + \vec{a}_0^* \vec{b}_0^* \exp(2i\omega t)) \end{aligned} \quad (9.28)$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren  $\exp(\pm 2i\omega t)$  nach Zeitmittelung und es bleibt

$$\langle (\text{Re}\vec{a}) \cdot (\text{Re}\vec{b}) \rangle = \frac{1}{4} (\vec{a} \cdot \vec{b}^* + \vec{a}^* \cdot \vec{b}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}^*). \quad (9.29)$$

## Terminologie

Wellenvektor	$\vec{k}$	
Wellenzahl	$k$	$k =  \vec{k} $
Kreisfrequenz	$\omega$	$\omega = c k$
Frequenz	$\nu$	$\nu = \omega / (2\pi)$
Wellenlänge	$\lambda$	$\lambda = (2\pi) / k = c / \nu$
Schwingungsdauer	$T$	$T = (2\pi) / \omega = 1 / \nu$

Anhand von Gl. (9.23) sieht man, dass  $T$  die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort  $\vec{x}$  beschreibt,

$$\exp(i\omega(t + T)) = \exp(i\omega t + 2\pi i) = \exp(i\omega t); \quad (9.30)$$

analog gibt die Wellenlänge  $\lambda$  die räumliche Periodizität an:

$$\exp(i\mathbf{k}(z + \lambda)) = \exp(i\mathbf{k}z + 2\pi i) = \exp(i\mathbf{k}z) \quad (9.31)$$

für eine Welle in  $z$ -Richtung zu fester Zeit  $t$ .

### Phasengeschwindigkeit

Die Größe

$$\phi = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t \quad (9.32)$$

nennt man die *Phase* der Welle. Unter der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um  $v_{\text{ph}}$  zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in  $z$ -Richtung und bilden das totale Differential von  $\phi(z, t)$ :

$$d\phi = k dz - \omega dt. \quad (9.33)$$

Für  $\phi = \text{const.}$  folgt dann:

$$v_{\text{ph}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c; \quad (9.34)$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

### Energiedichte

Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu irgendwelchen *Hindernissen* (z.B. Spalte), durch die sie *gestört* werden kann.

Für monochromatische ebene Wellen gehen die Beziehungen

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}; \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad (9.35)$$

(wegen der Coulombbeziehung ist  $\Phi = 0$ ) wegen

$$(\nabla \times \vec{\mathbf{A}})_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} A_{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{0\gamma} i k_{\beta} e^{i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} + i\omega t} = i(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{A}})_{\alpha}$$

in der komplexen Darstellung über in

$$\vec{\mathbf{B}} = i(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{A}}); \quad \vec{\mathbf{E}} = i\omega \vec{\mathbf{A}}. \quad (9.36)$$

Mit Gl. (9.36) und (9.27) lassen sich Energie und Impuls der Welle leicht ausrechnen. Der zeitliche Mittelwert der Energiedichte (reelle Darstellung) ist:

$$\langle \omega_F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_F dt, \quad (9.37)$$

wobei die Energiedichte  $\omega_F$  (mit  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ ) durch

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (9.38)$$

gegeben ist. Mit  $\vec{A} \cdot \vec{k} = 0$ , d.h.  $\vec{A} \perp \vec{k}$ , finden wir:

$$\begin{aligned} \langle \omega_F \rangle &= \frac{\epsilon_0}{2} (\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle + c^2 \langle \vec{B} \cdot \vec{B} \rangle) \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\omega^2 \vec{A} \cdot \vec{A}^* + \underbrace{c^2 k^2}_{=\omega^2} \vec{A} \cdot \vec{A}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 |\vec{A}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2. \end{aligned} \quad (9.39)$$

### Energiestromdichte

Entsprechend zu Gl. (9.39) gilt (mit  $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ ) für die Energiestromdichte (8.14)

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \frac{\omega}{2\mu_0} |\vec{A}_0|^2 \vec{k} = \frac{\omega \vec{k}}{2\mu_0} \frac{|\vec{E}_0|^2}{\omega^2} = \frac{\vec{k}}{2\mu_0} \frac{|\vec{E}_0|^2}{ck} = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}_0|^2 \vec{n} \quad (9.40)$$

und direkt über Gl. (8.33) für die Impulsdichte

$$\langle \vec{\pi}_F \rangle = \frac{\epsilon_0}{2c} |\vec{E}_0|^2 \vec{n} = \frac{1}{c^2} \langle \vec{S} \rangle. \quad (9.41)$$

Vergleicht man Gl. (9.39) mit (9.40), so findet man

$$|\langle \vec{S} \rangle| = c \langle \omega_F \rangle; \quad c |\langle \vec{\pi}_F \rangle| = \langle \omega_F \rangle.$$

Die Gleichung linker Hand zeigt, dass Energie des elektromagnetischen Feldes mit der Geschwindigkeit  $c$  transportiert wird, da es sich bei  $\vec{S}$  um eine Energiestromdichte handelt, also dem Produkt einer Dichte und der Geschwindigkeit einer strömenden „Substanz“. Die Gleichung rechter Hand weist aufgrund der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (E = cp)_{m_0=0}$$

auf Ruhemassen-lose Teilchen (Photonen) hin.

## 9.4 Polarisation

Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.23) beschreiben durch:

$$\vec{E} = \vec{e}_1 E_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)); \quad \vec{B} = \vec{e}_2 B_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \quad (9.42)$$

mit

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}; \quad \vec{e}_i \cdot \vec{k} = 0. \quad (9.43)$$

Eine solche Welle nennt man linear polarisiert. Eine zu (9.42) *gleichberechtigte*, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor  $\vec{k}$  erhält man, indem man  $\vec{E}$  in  $\vec{e}_2$ -Richtung und  $\vec{B}$  in  $\vec{e}_1$ -Richtung wählt. Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich dann nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \quad (9.44)$$

mit  $E_l$  ( $l = 1,2$ ) als beliebigen komplexen Zahlen  $E_l = |E_l| \exp(i\phi_l)$ . Das reelle physikalische Feld ist dann

$$E_x = |E_1| \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1) \quad E_y = |E_2| \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_2) \quad (9.45)$$

Gleichung (9.44) bzw. (9.45) beschreibt alle möglichen Polarisationszustände, die nach der relativen Phase  $\phi_1 - \phi_2$  und den Beträgen  $|E_1|$  und  $|E_2|$  unterschieden werden können. Außerdem lässt sich Gleichung (9.44) als Überlagerung zweier linearer polarisierter Wellen auffassen; das zeigt, dass sich jede beliebig polarisierte Welle als Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen auffassen lässt.

1.) Lineare Polarisation liegt vor, wenn

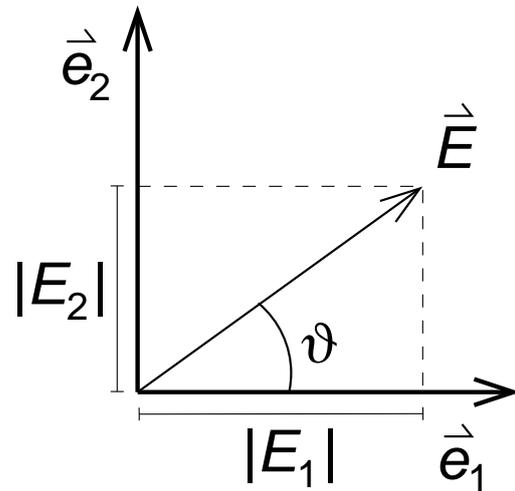
$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \pm \pi. \quad (9.46)$$

Das Feld ist dann

$$\vec{E} = (|E_1|\vec{e}_1 + |E_2|\vec{e}_2) \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1), \quad (9.47)$$

mit einem orts- und zeitunabhängigen Koeffizienten;  $\vec{E}$  schwingt in einer festen Richtung relativ zur Ausbreitungsrichtung. Richtung und Betrag von  $\vec{E}$  sind gegeben durch (siehe Fig. 9.2)

$$\vartheta = \arctan\left(\pm \frac{|E_2|}{|E_1|}\right); \quad E = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2} \quad (9.48)$$



**Abbildung 9.2:** Richtung des elektrischen Feldes bei linearer Polarisation.

2.) Zirkulare Polarisation:

$$|E_1| = |E_2| = E_0; \quad \phi_1 - \phi_2 = \pm \frac{\pi}{2}; \quad (9.49)$$

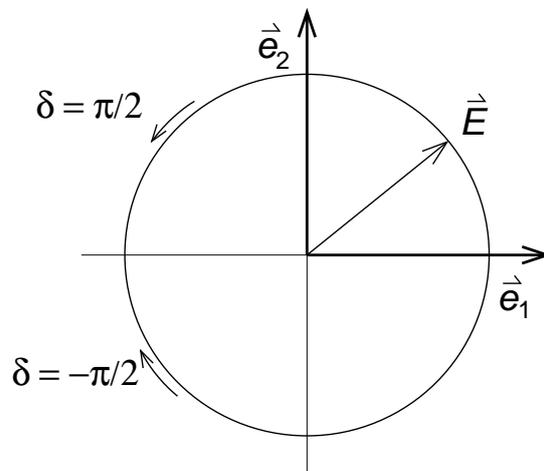
dann wird nämlich

$$\vec{E} = E_0(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_1)), \quad (9.50)$$

oder in reeller Darstellung

$$\vec{E} = E_0[\cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1)\vec{e}_1 \mp \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1)\vec{e}_2]. \quad (9.51)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt für festgehaltenen Ort  $\vec{x}$  die Parameterdarstellung des Einheitskreises dar. Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in Gl. (9.50) festgelegt; man erhält rechts- bzw. links-zirkulare Polarisation (vgl. Fig. 9.3).



**Abbildung 9.3:** Drehsinn bei rechts- (links-) zirkularer Polarisation, Ausbreitungsrichtung aus der Papierebene heraus.

3.) Elliptische Polarisation tritt auf für

$$|\mathbf{E}_1| \neq |\mathbf{E}_2|; \quad \phi_1 - \phi_2 \neq 0. \quad (9.52)$$

$\vec{\mathbf{E}}$  beschreibt dann für festes  $\vec{\mathbf{x}}$  eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu  $\vec{\mathbf{e}}_1$  durch  $\phi_1 - \phi_2$  und deren Hauptachsenverhältnis durch  $|\mathbf{E}_1|/|\mathbf{E}_2|$  bestimmt ist.

## 10. Wellenpakete im Vakuum

---

### 10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. Monochromatische ebene Wellen sind dazu ungeeignet, da sie praktisch keine Information außer ihrer Periode ( $\omega$ ) vermitteln können. Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch *modulieren* und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t). \quad (10.1)$$

Alternativ kann Gl. (10.1) als *amplituden-modulierte Schwingung* dargestellt werden:

$$f(t) = 2f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) \quad (10.2)$$

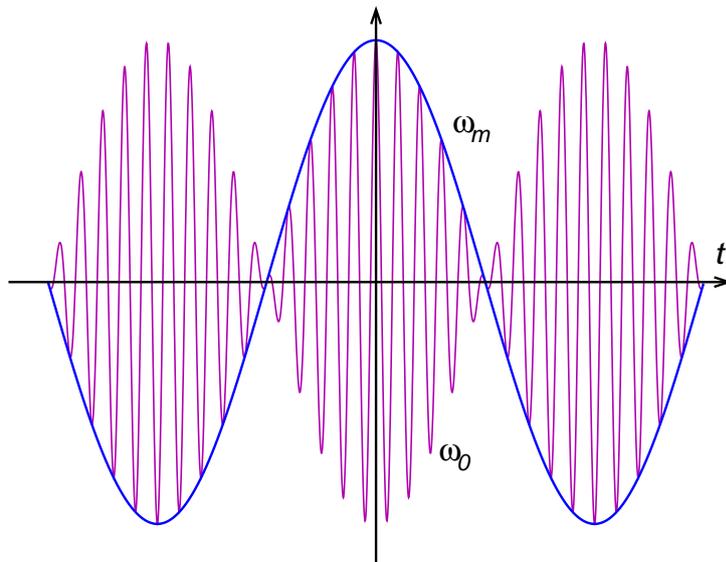
mit

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (10.3)$$

denn

$$\begin{aligned} & 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \\ &= 2 \left( \cos\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2} + \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} \right) \left( \cos\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2} - \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} \right) \\ &= 2 \cos^2\frac{\omega_1}{2} \cos^2\frac{\omega_2}{2} - 2 \sin^2\frac{\omega_1}{2} \sin^2\frac{\omega_2}{2} \\ &= 2 \frac{1 + \cos\omega_1}{2} \frac{1 + \cos\omega_2}{2} - 2 \frac{1 - \cos\omega_1}{2} \frac{1 - \cos\omega_2}{2} \\ &= \cos\omega_1 + \cos\omega_2. \end{aligned}$$

Wenn  $\omega_1 \approx \omega_2$  gewählt wird, dann ist Gl. (10.2) eine fast harmonische Schwingung der Frequenz  $\omega_0$  (*Trägerfrequenz*), deren Amplitude sich mit



**Abbildung 10.1:** Überlagerung zweier monochromatischer Wellen, die eine Schwebung mit Trägerfrequenz  $\omega_0$  mit Modulationsfrequenz  $\omega_m$  bilden.

der *Modulationsfrequenz*  $\omega_m$  ändert. Man erhält das Bild einer *Schwebung* (siehe Abb. 10.1).

Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

## 10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Ausgehend von einer Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  bildet man

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_n t) \quad \omega_n = n\omega. \quad (10.4)$$

Die Fourier-Reihe (10.4) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn  $f(t)$  periodisch mit der Periode  $T$  und stückweise glatt ist. Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in  $[0, T]$  stetige Funktionen  $f(t)$ .

### Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten  $f_n$  sind durch

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \exp(i\omega_n t). \quad (10.5)$$

gegeben. Für den Beweis verwenden wir die Orthonormalitätsrelation

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp(i\omega(m-n)t) = \delta_{mn} \quad (10.6)$$

und finden

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \exp(i\omega_m t) = T \sum_n f_n \delta_{mn} = T f_m. \quad (10.7)$$

### Fourier-Integrale

Nicht-periodische Funktionen lassen sich i.a. durch Fourier-Integrale darstellen, die sich aus Gl. (10.4) im Limes  $T \rightarrow \infty$  ergeben, d.h. das Periodizitätsintervall ist  $[-T/2, T/2]_{T \rightarrow \infty}$ , und damit muss die Summe über  $\omega_n$  durch ein Integral über  $\omega$  ersetzt werden.

Sei  $\Delta\omega = 2\pi/T$  der Abstand benachbarter Frequenzen  $\omega_n$ , so ist

$$f(t) = \sum_n \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega} f_n \exp(-i\omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \tilde{f}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t) \quad (10.8)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{f_i}{\Delta\omega} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{2\pi} f_i \right). \quad (10.9)$$

Also kann man Gl. (10.8) als *Riemann-Summe* des *Fourier-Integrals*

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t)} \quad (10.10)$$

auffassen. Für die Umkehrung von Gl. (10.10) zeigt der Vergleich von Gl. (10.5) und (10.9):

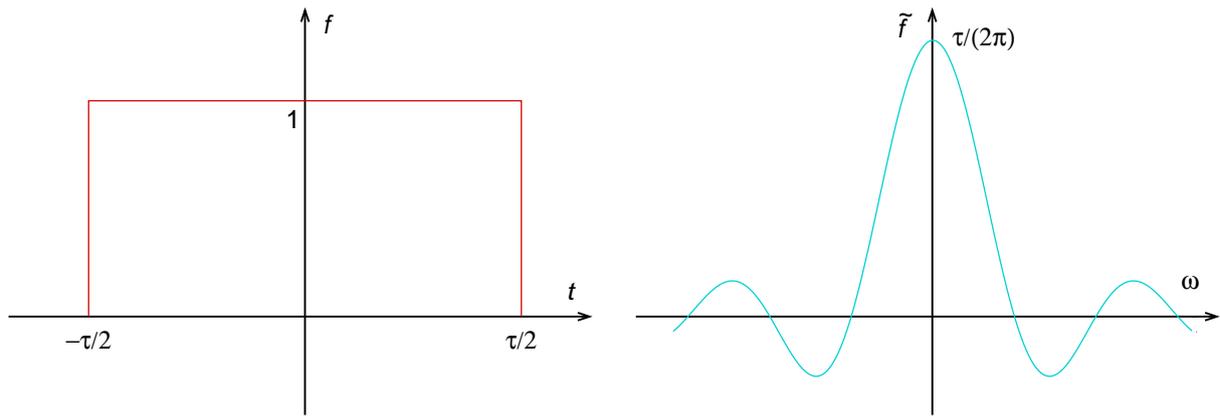
$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(i\omega t)} \quad (10.11)$$

$\tilde{f}(\omega)$  heißt die *Fourier-Transformierte* zu  $f(t)$ . Sie existiert und (10.10) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen  $f(t)$ , für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 < \infty; \quad (10.12)$$

$\tilde{f}(\omega)$  ist dann auch quadratintegabel.

### Beispiel: Rechteckimpuls



**Abbildung 10.2:** Rechteckfunktion und ihre Fouriertransformierte.

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \quad f(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.13)$$

Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \exp(i\omega t) = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\pi\omega}. \quad (10.14)$$

Die Breite  $\Delta\omega$  von  $\tilde{f}(\omega)$  schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{oder} \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \quad (10.15)$$

Je schmaler (breiter) das Signal  $f(t)$  werden soll, desto breiter (schmäler) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese *Unschärferelation* ist nicht an das Beispiel (10.13) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

### **Bemerkung**

Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (10.16)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(i\omega t) \quad (10.17)$$

benutzt.

### 10.3 $\delta$ -Distribution

Die Fourier-Transformation (10.10), (10.11) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man Gl. (10.11) in (10.10) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t-t')) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t-t') \quad (10.18)$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t-t')) \quad (10.19)$$

für beliebige quadratintegrale Funktionen  $f(t)$  gelten. Die hier eingeführte Größe  $\delta(t-t')$  ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution*, die streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbindung mit der Integration in (10.18) erklärt ist.

#### Darstellungen

Die  $\delta$ -Distribution, als deren Definition wir im folgenden Gl. (10.18) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen  $\delta_n$ , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta_n(t-t') = f(t) \quad (10.20)$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

#### 1.) Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für } |t| < \frac{1}{2n}; \quad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.21)$$

#### 2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n \exp(-\pi t^2 n^2). \quad (10.22)$$

#### 3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi n t)}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n d\omega \exp(i\omega t) \quad (10.23)$$

führt gerade auf die Schreibweise (10.19).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.20) - (10.23) sind so zu verstehen, dass die  $t'$ -Integration vor der Limes-Bildung  $n \rightarrow \infty$  auszuführen ist!

### Rechenregeln

1.)  $\delta(t) = \delta(-t)$

2.)  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3.)  $\delta(t^2 - a^2) = \frac{\delta(t+a) + \delta(t-a)}{2|a|}; \quad a \neq 0 .$

### 10.4 Überlagerung monochromatischer ebenen Wellen

Wir lösen die Wellengleichung

$$\square \vec{E}(\vec{x}, t) = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (10.24)$$

durch Fouriertransformation, in dem wir den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (10.25)$$

machen, d.h.  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  durch seine Fouriertransformierte in Raum und Zeit darstellen. In der Fouriertransformation ist  $\vec{k}$  die zu  $\vec{x}$  und  $\omega$  die zu  $t$  konjugierte Variable, physikalisch bedeuten  $\vec{k}$  den Wellenzahlvektor und  $\omega$  die Kreisfrequenz. Statt einfach den Realteil dieses Ansatzes als die physikalische Lösung zu definieren, verfahren wir hier so, dass wir fordern, dass  $\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t)$ :

$$\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}^*(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}^*(-\vec{k}, -\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

wobei wir im letzten Schritt  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  und  $\omega \rightarrow -\omega$  ersetzt haben (vertauschen von Integrationsgrenzen und Vorzeichen der Integrationsdifferenziale kompensiert sich gegenseitig). Damit folgt die Realitätsbedingung (z.B. durch Umkehren der Fouriertransformation)

$$\tilde{\vec{E}}^*(-\vec{k}, -\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega); \quad \tilde{\vec{E}}^*(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{E}}(-\vec{k}, -\omega)$$

Einsetzen von Gl. (10.25) in die Wellengleichung ergibt:

$$\begin{aligned}\square \vec{E}(\vec{x}, t) &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \left( -\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} = 0\end{aligned}\quad (10.26)$$

wegen

$$\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}; \quad \Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \nabla^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Wir finden also, dass die Fourierdarstellung einer Funktion null sein soll; dann muss die Fouriertransformierte selbst identisch null sein:

$$(\omega^2 - c^2\vec{k}^2)\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = 0$$

d.h.  $\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = 0$  falls nicht  $\omega^2 - c^2\vec{k}^2 = 0$ . Der allgemeinste Ausdruck dafür ist:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})\delta(\omega - ck) + \tilde{\vec{E}}_2(\vec{k})\delta(\omega + ck)$$

Einsetzen in die Fourierdarstellung ergibt:

$$\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \int d^3k \left( \tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + ckt)} \right)$$

mit  $\tilde{\vec{E}}_{1,2}(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \pm ck)$ . Die Realitätsbedingung wird jetzt zu

$$\tilde{\vec{E}}_1^*(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}_2(-\vec{k}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\vec{E}}_2^*(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}_1(-\vec{k})$$

Leichtes Umformen der Lösung ergibt

$$\begin{aligned}E(\vec{x}, t) &= \int d^3k \left( \tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_1^*(-\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + ckt)} \right) \\ &= \int d^3k \left( \tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_1^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right)\end{aligned}\quad (10.27)$$

Diese Lösung ist jetzt offensichtlich reell und lässt sich sinngemäß auf  $\vec{B}$ ,  $\vec{A}$  und  $\Phi$  übertragen.

## 10.5 Wellenpakete, Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Zur Vereinfachung betrachten wir jetzt zunächst ein Wellenpaket, das sich nur in einer Koordinatenrichtung, z.B. in z-Richtung ausbreitet.  $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$  sei eine Komponente von  $\vec{\mathbf{E}}$  oder  $\vec{\mathbf{B}}$ ,

Wie oben folgt aus  $\square \mathbf{u} = 0$  die Darstellung

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left\{ \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} + \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} \right\} \quad (10.28)$$

mit  $\omega(\mathbf{k}) = c\mathbf{k}$  für elektromagnetische Wellen. Da aber das folgende im Prinzip auch für Wellen mit anderer Dispersion  $\omega(\mathbf{k})$  gilt, bleiben wir zunächst bei der Schreibweise  $\omega(\mathbf{k})$ . Wir nehmen jetzt an, dass die auftretenden Wellenzahlen aus einem *Band*, d.h. einem begrenzten Bereich in der Nähe der Wellenzahl  $\mathbf{k}_0$  stammen. Wir wählen als Amplitudenfunktion  $\tilde{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{k}})$  eine Gaußfunktion

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Maximum  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$  und Breite  $\sigma$ , die auf  $\int d\mathbf{k} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_0$  normiert ist. Das bedeutet auch, dass

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})}{\mathbf{u}_0} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Wir setzen  $\tilde{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{k}})$  in das erste Integral von Gl. (10.28) ein und substituieren dabei  $\kappa = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/\sigma$ , d.h.  $d\kappa = d\mathbf{k}/\sigma$  und  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \sigma\kappa$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2\sigma^2} + i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)\right] \\ &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp\left[-\frac{\kappa^2}{2} + i(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)z - i\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)t\right]. \end{aligned}$$

Hier kommen wir ohne Kenntnis von  $\omega(\mathbf{k})$  nicht weiter; aber für eine hinreichend schmale Gaußkurve (für kleines  $\sigma$ ) können wir  $\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)$  nach  $\sigma\kappa$  entwickeln und mit der linearen Näherung arbeiten:

$$\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa) \approx \omega(\mathbf{k}_0) + v\sigma\kappa \quad \text{mit} \quad v = \left(\frac{d\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$$

Für elektromagnetische Wellen ist  $\omega(\mathbf{k}) = c\mathbf{k}$  linear, und diese Näherung wird exakt. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{u}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp \left[ -\frac{\kappa^2}{2} + i\sigma(z - vt)\kappa \right] \\ &= \mathbf{u}_0 e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right] \end{aligned} \quad (10.29)$$

wegen

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa^2}{2} + i\sigma(z - vt)\kappa &= \frac{1}{2} \{ (i\kappa)^2 + 2i\sigma(z - vt)\kappa + \sigma^2(z - vt)^2 \} - \frac{1}{2} \sigma^2(z - vt)^2 \\ &= \frac{1}{2} (i\kappa + \sigma(z - vt))^2 - \frac{1}{2} \sigma^2(z - vt)^2 \end{aligned} \quad (10.30)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp \left[ \frac{1}{2} (i\kappa + \sigma(z - vt))^2 \right] = \sqrt{2\pi} \quad (10.31)$$

Der zweite Teil von Gl. (10.28) liefert das konjugierte Komplexe davon. Endergebnis:

$$\mathbf{u}(z, t) = 2\mathbf{u}_0 \cos[k_0 z - \omega(k_0)t] \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right] \quad (10.32)$$

Abb. 10.3 zeigt die  $z$ -Abhängigkeit der Lösung für eine feste Zeit  $t$ . Die Welle

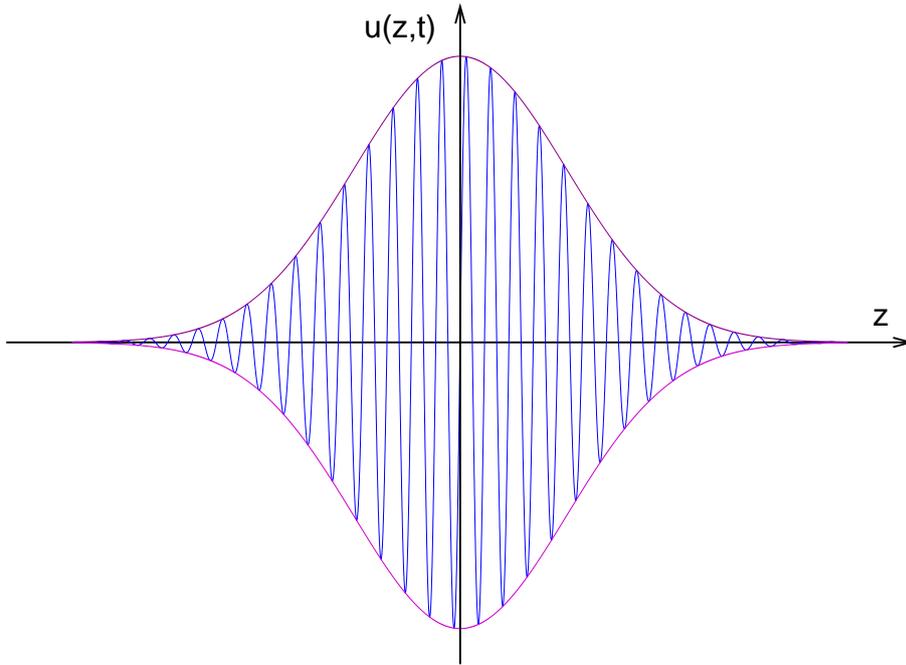
$$\propto \cos[k_0 z - \omega(k_0)t] = \cos \left[ k_0 \left( z - \frac{\omega(k_0)}{k_0} t \right) \right]$$

bewegt sich mit Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$$

in  $z$ -Richtung. Sie wird begrenzt durch den  $z$ -abhängigen Amplitudenfaktor

$$\pm \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right]$$



**Abbildung 10.3:**  
Momentaufnahme  
des Wellenpakets für eine  
feste Zeit  $t$ .

der Breite  $1/\sigma$ , der sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{gr}} = v = \left( \frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=k_0}$$

in  $z$ -Richtung bewegt. Der Amplitudenfaktor formt das Wellenpaket. Im Allgemeinen sind Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit verschieden; dann gleitet die Welle durch das Wellenpaket hindurch. Im Fall elektromagnetischer Wellen jedoch sind beide gleich der Lichtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \text{Phasengeschwindigkeit} \quad v_{\text{ph}} &= \frac{\omega(k)}{k} = c \\ \text{Gruppengeschwindigkeit} \quad v_{\text{gr}} &= \frac{\partial\omega(k)}{\partial k} = c \end{aligned} \tag{10.33}$$

Welle und Wellenpaket sind hier also starr verbunden. Die Verallgemeinerung auf eine allgemeine Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  ist unproblematisch; das Wellenpaket wird dann durch

$$\mathbf{u}(\vec{x}, t) = \int d^3k \tilde{\mathbf{u}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} \tag{10.34}$$

dargestellt, und man erhält für das Wellenpaket die Gleichung

$$\text{Re } \mathbf{u}(\vec{x}, t) = \cos [\vec{k}_0\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t] \int d^3k f(\vec{k} - \vec{k}_0) \cos [(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{x} - \vec{v}t)]$$

(10.35)

mit einer um  $\vec{k}_0$  zentrierten Amplitudenfunktion  $\tilde{u}(\vec{k}) = f(\vec{k} - \vec{k}_0)$ .

### Fourierdarstellung des Vektorpotentials

Signale endlicher Energie erhält man nur für raum-zeitlich begrenzte Felder (Wellenpakete), die wir aus monochromatischen ebenen Wellen durch Superposition aufbauen können. Für das Vektorpotential erhalten wir:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + \vec{A}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right]. \quad (10.36)$$

Hierbei haben wir wieder die beiden Basislösungen  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t))$  so addiert, dass  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  reell ist. Wegen  $\omega = c|\vec{k}|$  kommen in (10.36) alle Frequenzen  $\omega$  vor. Für die Fouriertransformation ist hier die symmetrische Schreibweise gewählt. Gleichzeitig stellt Gl. (10.36) die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (9.8) dar. Die Coulomb-Eichung verlangt

$$\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0. \quad (10.37)$$

### Photonen-Addition der Erhaltungsgrößen

Wichtig für den Aufbau der Quantenmechanik, die das elektromagnetische Feld durch Photonen beschreibt, ist die Eigenschaft, dass Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes sich additiv aus den Beiträgen der monochromatischen ebenen Wellen zusammensetzen. Wir demonstrieren dies für den Fall der Energie. Dazu schreiben wir (10.36) noch einmal um,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ \vec{A}(\vec{k}, t) + \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (10.38)$$

mit den Abkürzungen

$$\vec{A}(\vec{k}, t) = \vec{A}(\vec{k}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{A}^*(-\vec{k}, t) = \vec{A}^*(-\vec{k}) \exp(i\omega t). \quad (10.39)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir hier die Tilde bei den Fou-

riertransformierten weg. Damit wird nach (8.10) die Feldenergie zu

$$\begin{aligned}
W &= \int d^3x \omega_F = \int d^3x \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \vec{A})^2 \right] \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\
&\quad \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ -i\omega \vec{A}(\vec{k}, t) + i\omega \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \cdot \left\{ -i\omega' \vec{A}(\vec{k}', t) + i\omega' \vec{A}^*(-\vec{k}', t) \right\} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2\mu_0} \left\{ i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, t) + i\vec{k} \times \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \cdot \left\{ i\vec{k}' \times \vec{A}(\vec{k}', t) + i\vec{k}' \times \vec{A}^*(-\vec{k}', t) \right\} \right], \tag{10.40}
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{k}, t) = -i\omega \vec{A}(\vec{k}, t) \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^*(-\vec{k}, t) = i\omega \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \tag{10.41}$$

und

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = i(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, t)) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \tag{10.42}$$

benutzt haben.

Nach Ausführen der Integration  $\int d^3x$  erhalten wir wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \exp [i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}] = \delta(\vec{k} + \vec{k}') \tag{10.43}$$

und  $\delta(\vec{k}) = \delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z)$  nur Beiträge für  $\vec{k}' = -\vec{k}$  und mit  $\omega = c|\vec{k}|$  auch nur für  $\omega' = \omega$ . Wegen der Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0$  ist  $\vec{k} \perp \vec{A}$ , und in der allgemeinen Vektoridentität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

entfällt durch diese Orthogonalität der zweite Summand, und wir haben

$$(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) \cdot (\vec{k} \times \vec{A}(-\vec{k})) = |\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}(-\vec{k}).$$

Wir verwenden noch  $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$  und finden:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{8} \int d^3k \left[ (i\omega)^2 \left\{ \vec{A}(\vec{k}, t) - \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \left\{ \vec{A}(-\vec{k}, t) - \vec{A}^*(\vec{k}, t) \right\} \right. \\
&\quad \left. - (ikc)^2 \left\{ \vec{A}(\vec{k}, t) + \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \left\{ \vec{A}(-\vec{k}, t) + \vec{A}^*(\vec{k}, t) \right\} \right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{4} \int d^3k \omega^2 \left[ \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) + \vec{A}^*(-\vec{k}) \cdot \vec{A}(-\vec{k}) \right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \omega^2 \left[ \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) \right].
\end{aligned}
\tag{10.44}$$

Gleichung (10.44) beschreibt die Feldenergie als Summe (Integral) der Einzelbeiträge  $\langle \omega_{\text{F}} \rangle = (\epsilon_0/2)\omega^2 |\vec{A}_0|^2$  aus Gl. (9.39) der beteiligten monochromatischen Wellen. Sie stellt zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für Impuls und Drehimpuls die Grundlage für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch unabhängige *Teilchen* (Photonen) dar.  $W$  ist selbst zeitunabhängig in Einklang mit der Energieerhaltung.

## Teil V

# Quellen elektromagnetischer Strahlung

# 11. Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

---

## 11.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.14), (7.15))

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (11.1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.2)$$

mit der Nebenbedingung (Lorenz-Eichung)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (11.3)$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = -\gamma(\vec{r}, t), \quad (11.4)$$

wo  $\Psi$  für  $\Phi$ ,  $A_i$  und  $\gamma$  für  $\rho/\epsilon_0$ ,  $\mu_0 j_i$  steht.

### Greensche Funktion

Die allgemeine Lösung von Gl. (11.4) setzt sich aus der (in Abschnitt 10 diskutierten) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.11) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (11.4) benutzen wir die Methode der *Greenschen Funktionen*.

Wir nehmen an, dass die Felder den ganzen Raum füllen können, sodass wir als Randbedingung das Verschwinden der Lösung im Unendlichen fordern:

$$\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

Um die Gleichungen (11.1) und (11.2) zu lösen, stellen wir die Lösung  $\Psi(\vec{x}, t)$  und die Inhomogenität  $\gamma(\vec{x}, t)$  durch ihre Fouriertransformierten dar:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3\mathbf{k} \int d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) \\ \gamma(\vec{x}, t) &= \int d^3\mathbf{k} \int d\omega e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)\end{aligned}\quad (11.5)$$

Wir benötigen auch die Umkehrung

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{x} \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Psi(\vec{x}, t) \\ \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{x} \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \gamma(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (11.6)$$

Wir bestimmen jetzt die Form der Lösung, indem wir die Entwicklung (11.5) in die Wellengleichung  $\square\Psi(\vec{x}, t) = -\gamma(\vec{x}, t)$  einsetzen, unter Verwendung von

$$\square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = - \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

und erhalten den Zusammenhang

$$\int d^3\mathbf{k} \int d\omega \left[ \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) - \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) \right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0 \quad (11.7)$$

Wir schließen wie in Kap. 10.4 aus dem Verschwinden der Fourierdarstellung auf das Verschwinden der Fouriertransformierten:

$$\left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) - \tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega) = 0; \quad \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) = \frac{\tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (11.8)$$

Einsetzen in die Fouriertransformation (11.5) unter Verwendung der Umkehrung (11.6) für  $\tilde{\gamma}(\vec{k}, \omega)$  ergibt:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{x}' \int dt' e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}'-\omega t')} \gamma(\vec{x}', t') \quad (11.9)$$

Wir vertauschen die  $\vec{x}', t'$ -Integration mit der  $\vec{k}, \omega$ -Integration und erhalten das Ergebnis in der Form

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \int dt' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \gamma(\vec{x}', t') \\ G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\end{aligned}\quad (11.10)$$

Dies erinnert an die Lösung der Poissongleichung mit  $\Psi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})$  und  $\gamma(\vec{x}) = \rho(\vec{x})/\epsilon_0$ :

$$\Delta\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x}); \quad \Psi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}') \gamma(\vec{x}'), \quad G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

oder anders ausgedrückt, die Greensche Funktion löst die Gleichung

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

sodass man die Lösung von  $\Delta\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x})$  durch Überlagerung angeben kann. Nach Gl. (11.10) ist  $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$  also als Greensche Funktion der Wellengleichung  $\square\Psi(\vec{x}, t) = -\gamma(\vec{x}, t)$  zu interpretieren. Um die Analogie zu vervollständigen, berechnen wir  $\square G$ :

$$\begin{aligned}\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{\square e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t'))} \\ &= -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')\end{aligned}\quad (11.11)$$

## 11.2 Berechnung der Greenschen Funktion

Die  $\vec{k}$ - und  $\omega$ -Integrationen in Gl. (11.10) laufen jeweils von  $-\infty$  bis  $+\infty$ :

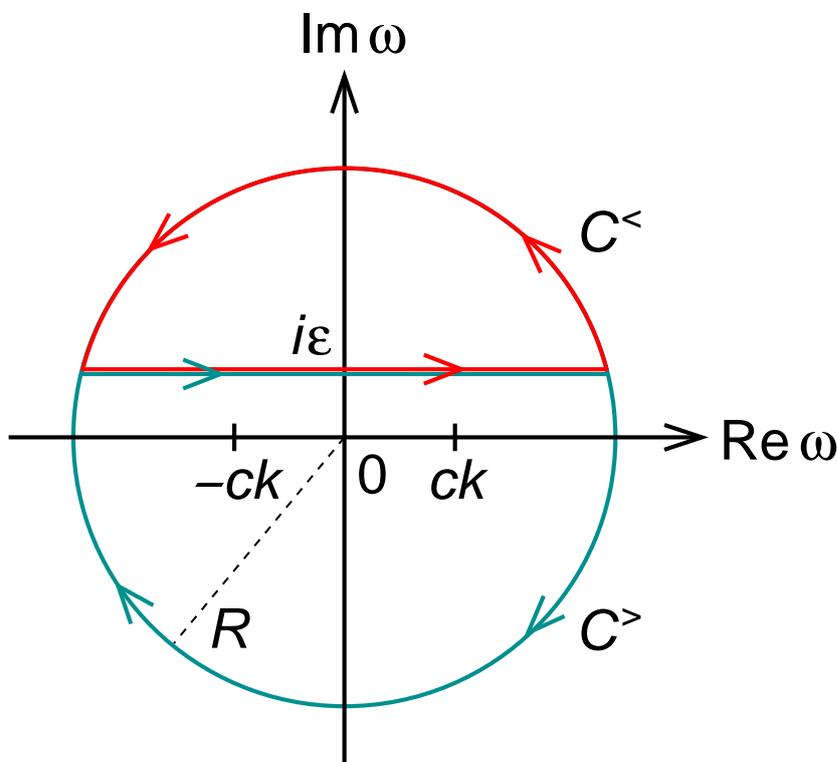
$$\int d^3k \int d\omega \dots = \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \dots$$

Es gibt jedoch im Nenner des Integranden Nullstellen bei  $\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$  bzw.  $\omega = c|\vec{k}|$ , sodass die Integrationen über Singularitäten laufen; es handelt sich um uneigentliche Integrale. Diese Divergenzen kann man vermeiden, indem man den Integranden auf die komplexe Frequenzebene erweitert

und den Integrationsweg an den Divergenzen vorbeiführt. Die Integrale werden dann mit dem Residuensatz ausgewertet. Wir werden sehen, dass die Interpretation von Gl. (11.10) als

$$G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \epsilon > 0 \quad (11.12)$$

zu physikalischen, d.h. kausalen Ergebnissen führt. Der Integrationsweg soll also in der Halbebene  $\text{Im } \omega > 0$  im Abstand  $\epsilon$  zur reellen Achse verlaufen (siehe Fig. 11.1).



**Abbildung 11.1:** Integrationswege zur Berechnung von  $G(\vec{x}-\vec{x}', t-t')$  in der komplexen Frequenzebene.

Wir berechnen zunächst das Frequenzintegral

$$g(k, \tau) := \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (11.13)$$

mithilfe des Residuensatzes. Dazu schließen wir den Integrationsweg in der komplexen Frequenzebene durch einen Halbkreis mit Radius  $R$ , den wir später gegen  $\infty$  gehen lassen, entweder in der oberen komplexen  $\omega$ -Ebene  $\text{Im } \omega > 0$  oder in der unteren komplexen  $\omega$ -Ebene  $\text{Im } \omega < 0$ . Zwischen den beiden Möglichkeiten müssen wir so auswählen, dass der Beitrag der

Halbkreise im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  nach Jordans Lemma verschwindet. Dazu müssen wir das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (11.13) untersuchen:

$$-i\omega\tau = -i(\operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega)\tau = -i\tau \operatorname{Re} \omega + \tau \operatorname{Im} \omega$$

Damit also der Realteil  $\tau \operatorname{Im} \omega$  zu einer für  $R = |\omega| \rightarrow \infty$  verschwindenden Exponentialfunktion im Integranden führt, muss  $\tau \operatorname{Im} \omega \rightarrow -\infty$  für  $R \rightarrow \infty$  gelten:

$$\begin{aligned} \tau > 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \omega < 0, & \text{Kontour } C^> \text{ in unterer Halbebene} \\ \tau < 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \omega > 0, & \text{Kontour } C^< \text{ in oberer Halbebene} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Der Residuensatz lautet

$$\oint_{\partial G} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z_i \in G} \operatorname{Res}\{f(z_i)\} \quad (11.15)$$

Hier ist  $G$  ein Gebiet in der komplexen Ebene, begrenzt von  $\partial G$ . Die Integration auf der linken Seite muss im mathematisch positiven Sinne, d.h. gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. Auf der rechten Seite wird die Summe über alle Pole  $z_i$  von  $f(z)$  in  $G$  ausgeführt.  $\operatorname{Res}\{f(z_i)\}$  ist das Residuum von  $f(z)$  bei  $z_i$ ; wenn die Laurentreihe von  $f(z)$  bei  $z_i$  die Form

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_i} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n$$

hat, dann ist  $a_{-1} = \operatorname{Res}\{f(z_i)\}$ . Für einen einfachen Pol bei  $z_0$  berechnet man das Residuum als

$$\operatorname{Res}\{f(z_0)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Alternativ, wenn  $f(z) = p(z)/q(z)$  ist und  $q(z)$  bei  $z = z_0$  eine einfache Nullstelle hat:

$$\operatorname{Res}\{f(z_0)\} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Für einen Pol mit Ordnung  $m > 1$  gilt

$$\operatorname{Res}\{f(z_0)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\}$$

Insbesondere für  $m = 2$  bedeutet das

$$\operatorname{Res}\{f(z_0)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] \right\}$$

Wir beginnen jetzt die Berechnung des Integrals (11.13) mit dem

**Fall 1:  $\tau < 0$**

Der Integrationsweg muss nach der Fallunterscheidung (11.14) in der Halbebene  $\text{Im } \omega > 0$  geschlossen werden, was zur Kontour  $C^<$  in Abb. 11.1 führt. Der Weg  $\partial G = C^<$  umschließt keinen Pol des Integranden. Nach dem Residuensatz verschwindet also das Integral:

$$g(\mathbf{k}, \tau) = 0 \quad \text{für } \tau < 0$$

Also ist die Greensche Funktion

$$G(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{t} - \mathbf{t}' < 0$$

Damit folgt für die Lösung der Wellengleichung

$$\Psi(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} dt' G(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') \gamma(\vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t}') \quad (11.16)$$

Das Integral über  $\mathbf{t}'$ , das von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ging, reduziert sich auf den Bereich von  $\mathbf{t}' = -\infty$  bis  $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ . Das macht physikalisch Sinn, wenn wir  $\Psi(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  als Wirkung der Ursache  $\gamma(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  interpretieren.  $\Psi(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  steht für Komponenten des Vektorpotentials  $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  bzw. für  $\Phi(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$ ;  $\gamma(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  steht für Komponenten der Stromdichte  $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  oder für die Ladungsdichte  $\rho(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$ . Die Wellengleichung beschreibt also, wie sich die Potentiale und mit ihnen die Felder  $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  und  $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  als Wirkung, d.h. durch elektromagnetische Ausstrahlung, aus der gegebenen Strom- und Ladungsdichte als Ursache ergeben. Die Reduktion der Integration auf  $\mathbf{t}' < \mathbf{t}$  ist Ausdruck der *Kausalität*: Die Wirkung kann der Ursache zeitlich nur folgen, kann ihr nicht vorauslaufen.

Allerdings hätten wir durch Wahl von  $\epsilon < 0$  beim Umgehen der Singularitäten bei  $\omega = \pm c|\vec{\mathbf{k}}|$  die *anti-kausale* Lösung erhalten, die der Ursache vorausläuft und auch eine formal korrekte Lösung der Wellengleichung darstellt. Die formale Gleichberechtigung der beiden Lösungen hat ihre Ursache in der Invarianz der Maxwellgleichungen bei Zeitumkehr.

**Fall 2:  $\tau > 0$**

Wir schließen den Integrationsweg bei der Berechnung von  $g(\mathbf{k}, \tau)$  diesmal in der unteren Halbebene  $\text{Im } \omega < 0$ , was zur Kontour  $C^>$  in Abb. 11.1 führt. Die beiden Pole bei  $\omega = \pm c\mathbf{k}$  liegen im Inneren des geschlossenen

Weges  $C^>$ , der aber im mathematisch negativen Sinne orientiert ist, also ein negatives Vorzeichen beiträgt. Wegen

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}(\omega - ck)(\omega + ck)$$

ergibt der Residuensatz

$$\begin{aligned} g(k, \tau) &= -c^2 \oint_{C^>} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= (-2\pi i)(-c^2) \sum_{\omega=\pm ck} \text{Res} \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= 2\pi ic^2 \left[ \lim_{\omega \rightarrow +ck} \left( \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + ck} \right) + \lim_{\omega \rightarrow -ck} \left( \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - ck} \right) \right] \\ &= 2\pi ic^2 \left[ \frac{e^{-ick\tau}}{2ck} + \frac{e^{ick\tau}}{-2ck} \right] = 2\pi c \frac{\sin(ck\tau)}{k} \end{aligned} \quad (11.17)$$

Damit folgt für die Greensche Funktion (11.12)

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}} \frac{\sin(ck\tau)}{k} \quad \vec{s} = \vec{x} - \vec{x}', \quad \tau = t - t' > 0 \quad (11.18)$$

Das  $\vec{k}$ -Integral berechnen wir in Kugelkoordinaten und messen den Winkel  $\vartheta$  bezüglich der  $\vec{s}$ -Richtung. Dann ist

$$d^3k = k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \vec{k} \cdot \vec{s} = ks \cos \vartheta, \quad s = |\vec{s}|.$$

Die  $\varphi$ -Integration liefert einen Faktor  $2\pi$ ; damit folgt

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(ck\tau) \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{iks \cos \vartheta} \quad (11.19)$$

Mit der Substitution  $\xi = \cos \vartheta$ ,  $d\xi = -\sin \vartheta d\vartheta$  wird das  $\vartheta$ -Integral zu

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{iks \cos \vartheta} = \int_{-1}^1 d\xi e^{iks\xi} = \frac{e^{iks} - e^{-iks}}{iks} = \frac{2 \sin(ks)}{ks}$$

und damit

$$\begin{aligned} G(\vec{s}, \tau) &= \frac{c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \sin(ck\tau) \sin(ks) \\ &= \frac{2c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \left\{ \cos \left[ ck \left( \tau - \frac{s}{c} \right) \right] - \cos \left[ ck \left( \tau + \frac{s}{c} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

wegen  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ . Mit der Substitution  $\kappa = ck$  und  $\zeta = \tau \mp s/c$  folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \cos(ck\zeta) &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\kappa \cos(\kappa\zeta) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \cos(\kappa\zeta) \\ &= \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa (e^{i\kappa\zeta} + e^{-i\kappa\zeta}) = \frac{\pi}{c} \delta(\zeta). \end{aligned}$$

Einsetzen in  $G$  ergibt

$$G(\vec{s}, \tau) = \frac{1}{4\pi s} \left[ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right] \quad (11.20)$$

Da für  $\tau = t - t' > 0$  immer  $\tau + s/c > 0$  gilt, trägt die zweite  $\delta$ -Funktion nichts bei. Das Endergebnis lautet daher:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \quad (11.21)$$

## Diskussion

Aus Gründen der räumlichen Isotropie hängt  $G$  nur von  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  ab. Die Greensche Funktion erfüllt nicht nur die Forderung der Kausalität,  $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0$  für  $t < t'$ , sondern es ist darüber hinaus

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0 \quad \text{für } t < t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \quad (11.22)$$

Diese Eigenschaft drückt die Retardierung aus. Die Wirkung ist gegenüber der Ursache um die Zeit  $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$  verzögert. Dies ist gerade die Laufzeit des Signals, das mit der Geschwindigkeit  $c$  vom Ort  $\vec{x}'$  der Ursache zum Ort  $\vec{x}$  der Wirkung läuft.

Die Greensche Funktion hat jedoch darüber hinaus die Eigenschaft

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \neq 0 \quad \text{nur für } t = t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \quad (11.23)$$

d.h. die Wirkung tritt scharf zur retardierten Zeit  $t = t' + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  ein, nicht nur nicht vorher, sondern auch nicht nachher. Dies ist eine Besonderheit des dreidimensionalen Raums; in zwei Dimensionen hätte die Ursache einen unendlich langen Nachhall.

## Interpretation als Kugelwelle

Die Inhomogenität in Gl. (11.11)  $\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')$  stellt eine punktförmige Quelle dar, die zur Zeit  $t'$  am Ort  $\vec{x}'$  für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit  $c$  aus. Es muss also gelten:

- i) Die Kugelwelle  $G$  muss für  $t < t'$  nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden.
- ii) Sie muss am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t = t' + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ausbreiten.
- iii) Da die Energie der Welle auf einer Kugeloberfläche verteilt ist, sollte  $G$  asymptotisch wie  $R^{-1} = |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$  verschwinden.

Die *retardierte* Greensche Funktion (11.21) erfüllt genau diese Forderungen. Gleichung (11.10) zeigt, wie man die Potentiale  $\vec{A}, \Phi$  zu gegebener Quellenverteilung  $\rho, \vec{j}$  aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

## 11.3 Retardierte Potentiale

Durch Einsetzen der Greenschen Funktionen in die Lösung der Wellengleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \int dt' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \gamma(\vec{x}', t') \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \frac{\gamma(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11.24) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\gamma\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis lässt sich so deuten, dass der Ort  $\vec{x}'$  den ganzen Raum abtastet und die Wirkung von  $\gamma$  jeweils zur retardierten Zeit  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  eintritt. Die Wirkung fällt mit  $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$  mit der Entfernung von der Ursache ab. Je nach Problemstellung werden wir  $\Psi(\vec{x}, t)$  in der Form der zweiten oder der dritten Zeile von Gl. (11.24) verwenden. Wenn wir jetzt  $\Psi$  durch  $\Phi$

bzw.  $\vec{A}$  und  $\gamma$  durch  $\rho/\epsilon_0$  bzw.  $\mu_0\vec{j}$  ersetzen, erhalten wir die *retardierten Potentiale*:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\rho(\vec{x}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.25)$$

und

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (11.26)$$

Sie sind ebenso wie die *avancierten Potentiale* mit den Maxwellgleichungen vereinbar, da diese keine Zeitrichtung auszeichnen. Der Unterschied zu den statischen Potentialen besteht darin, dass sich eine Änderung von  $\rho$  und  $\vec{j}$  bei  $x'$  erst nach der Zeit  $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$  auf das Feld an der Stelle  $\vec{x}$  auswirkt. Gl. (11.24) ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung, die man noch zur allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung addieren muss, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu erhalten; für die Potentiale erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3k \left( \tilde{\vec{A}}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{A}}_1^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right) \\ \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3k \left( \tilde{\Phi}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\Phi}_1^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right) \end{aligned} \quad (11.27)$$

Die Lösungen (11.25) und (11.26) sind über die Lorenz-Eichung Gl. (11.3) bzw. die Ladungserhaltung Gl. (6.3) miteinander verknüpft. Die Ausführung der Integrationen in Gl. (11.25) und (11.26) wollen wir anhand von zwei praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der  $\delta$ -Distribution enthaltene Retardierung achten.

### Quasistationäre Felder

Vernachlässigt man die Retardierung in (11.25) und (11.26),

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \rightarrow \delta(t - t'), \quad (11.28)$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.29)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.30)$$

die in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auftreten. Die Näherung (11.28) ist gerechtfertigt, wenn  $\rho$  und  $\vec{j}$  sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

### Beispiel 1: Zeitlich periodische Quellen-Verteilungen

$$\rho = \rho(\vec{x}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x}) \exp(-i\omega t). \quad (11.31)$$

Dann folgt aus Gl. (11.25):

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}') e^{-i\omega t'} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)} \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned}$$

und analog für Gl. (11.26); damit ist

$$\Phi = \Phi(\vec{x}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \quad (11.32)$$

mit ( $k = \omega/c$ )

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (11.33)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (11.34)$$

Die zugehörigen Differentialgleichungen ergeben sich aus Gl. (11.1), (11.2), (11.31) und (11.32) zu:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{x}, t) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) e^{-i\omega t} \\ \leadsto e^{-i\omega t} \Delta\Phi(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} \\ \leadsto (\Delta + k^2) \Phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

und damit gilt für die Potentiale

$$(\Delta + k^2)\Psi(\vec{x}) = -\gamma(\vec{x}), \quad (11.35)$$

wo  $\Psi$  für  $\Phi, \mathbf{A}_i$  und  $\gamma$  für  $\rho/\epsilon_0, \mu_0 \mathbf{j}_i$  steht. Die Lösungen (11.33) und (11.34) können wir dann mit der zu (11.35) gehörenden Greenschen Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; k) = \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (11.36)$$

als

$$\Psi(\vec{x}) = \int d^3x' \gamma(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}'; k) \quad (11.37)$$

schreiben. Die Diskussion der Integrale (11.33), (11.34) werden wir in Kapitel 12 wieder aufgreifen.

### **Beispiel 2: Felder bewegter Punktladungen**

Für eine sich auf der Bahn  $\vec{x}(t)$  bewegende Punktladung  $q$  können wir

$$\rho = q \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)); \quad \vec{j} = q \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad (11.38)$$

schreiben. Dann kann in (11.25) die  $\vec{x}'$ -Integration ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{x}(t')) \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}, \end{aligned} \quad (11.39)$$

analog

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\vec{v}(t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}. \quad (11.40)$$

Um die  $t'$ -Integration auszuführen, substituieren wir

$$\xi = t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}(t')|}{c} = t' - t + \frac{R(t')}{c}$$

mit  $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}(t')$ , d.h.  $R(t') = |\vec{R}(t')| = |\vec{x} - \vec{x}(t')|$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt'} R(t') = \frac{d}{dt'} |\vec{x} - \vec{x}(t')| = -\vec{v}(t') \cdot \nabla_{\mathbf{R}} |\vec{x} - \vec{x}(t')| = -\vec{v}(t') \cdot \frac{\vec{R}(t')}{R(t')} = -\vec{v}(t') \cdot \vec{n}(t')$$

wobei wir mit  $\vec{n}(t')$  den Einheitsvektor in  $\vec{R}(t')$ -Richtung abkürzen. Außerdem gilt

$$\frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \frac{\vec{R}(t')}{R(t')} = 1 - \frac{\vec{v}(t')}{c} \cdot \vec{n}(t')$$

und damit

$$\frac{dt'}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|} = \frac{dt'}{R(t')} = \frac{d\xi}{R(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{R}(t')}$$

Einsetzen in Gl. (11.39) ergibt

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(\xi)}{R(t')} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\delta(\xi)}{R(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{R}(t')}$$

und damit

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{R(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{R}(t')} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \quad (11.41)$$

wobei der Index “ret” bedeutet, dass der Ausdruck in Klammern für  $\xi = 0$ , d.h. für die Lösung der Gleichung

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{R(t_{\text{ret}})}{c} \quad (11.42)$$

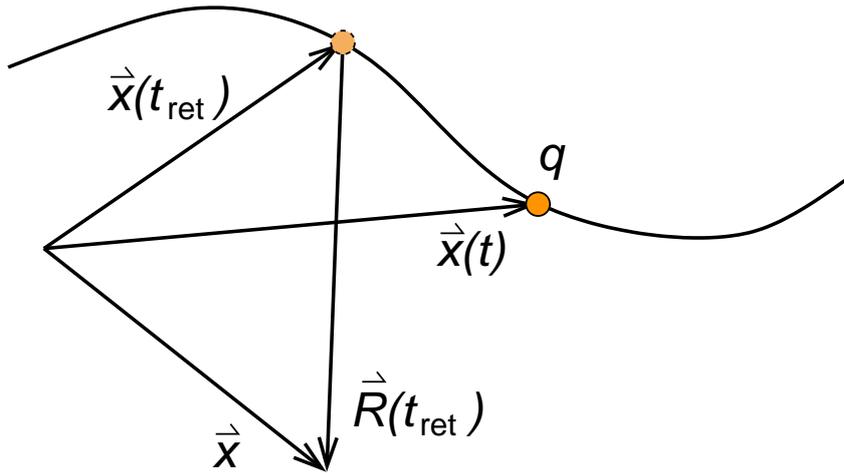
auszuwerten ist. Das analoge Ergebnis für das Vektorpotential lautet

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q\vec{v}(t')}{R(t') - \frac{1}{c} \vec{v}(t') \cdot \vec{R}(t')} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \quad (11.43)$$

Diese beiden Beziehungen (11.41) und (11.43) heißen *Liénard-Wiechert-Potentiale*. Sie sind für komplizierte Teilchenbahnen wegen Gl. (11.42) nicht einfach auszuwerten. Die Zeit  $t_{\text{ret}}$  trägt der endlichen Laufzeit der elektromagnetischen Welle vom momentanen Aufenthaltspunkt  $\vec{x}(t)$  zum Beobachtungspunkt  $\vec{x}$  Rechnung (siehe Abb. 11.2).

Der Grenzfall  $v \rightarrow 0$  ergibt das Coulomb-Potential:

$$\vec{A} \rightarrow 0; \quad \Phi(\vec{x}, t) \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (11.44)$$



**Abbildung 11.2:**  
Geometrie für die retardierte Wirkung einer bewegten Punktladung.

### 11.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

Von Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluss durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int d\vec{f} \cdot \vec{S} \neq 0. \quad (11.45)$$

Das bedeutet, dass die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  nicht stärker als  $R^{-1}$  abfallen dürfen, da die Oberfläche wie  $R^2$  anwächst. Solche Felder nennt man *Strahlungsfelder*, im Gegensatz zu den *statischen* Feldern, die mit  $R^{-2}$  abfallen.

Wir wollen nun zeigen, dass beschleunigte Punktladungen *strahlen*; dazu müssen wir die zu (11.41) und (11.43) gehörenden Felder über

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11.46)$$

berechnen, wobei wir für  $\Phi$ ,  $\vec{A}$  die Form (11.39), (11.40) benutzen wollen. Mit den Abkürzungen

$$\nabla f(\mathbf{R}) = \vec{n} \frac{\partial f}{\partial R}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad \vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}(t') \quad (11.47)$$

erhält man:

$$-\nabla\Phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) - \frac{\dot{\vec{n}}(t')}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \quad (11.48)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta' \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right), \quad (11.49)$$

so dass ( $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ )

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{cR(t')} \delta' \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Dabei bedeutet  $\delta'(t' - t + R(t')/c)$  die Ableitung der  $\delta$ -Distribution nach ihrem Argument  $\xi = t' - t + R(t')/c$ :

$$\int dx f(x) \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \int dx f^{(n)}(x) \delta(x); \quad (11.51)$$

d.h. die  $\delta$ -Distribution ist (beliebig oft) differenzierbar, vorausgesetzt, dass  $f$  (beliebig oft) differenzierbar ist. Die Ableitung wird von der Deltafunktion also abgewälzt auf die Funktion  $f(x)$ , mit der die Deltafunktion unter dem Integral steht.

Analog:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' (\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')) \left\{ \frac{1}{R^2(t')} \delta \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{cR(t')} \delta' \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Zur Ausführung der  $t'$ -Integration benutzen wir ( $\xi = t' - t + R(t')/c$ ):

$$\frac{d}{dt'} \delta(\xi) = \delta'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t'} \quad \curvearrowright \quad \delta'(\xi) = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \delta \left( t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \quad (11.53)$$

mit

$$\kappa(t') = \frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{\vec{v}(t')}{c} \cdot \vec{n}(t'),$$

und die allgemeine Beziehung

$$\int dt' g(t') \delta(f(t')) = \sum_i \frac{g(t'_i)}{|f'(t'_i)|}, \quad (11.54)$$

wobei die  $t'_i$  die (einfachen) Nullstellen von  $f(t')$  sind. Mit Gl. (11.51) sowie (11.41) und (11.43) wird dann:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \frac{d}{dt'} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\vec{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \frac{d}{dt'} \left( \frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')} - \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\frac{\vec{v}(t')}{c} - \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} .
\end{aligned} \tag{11.55}$$

Ebenso findet man

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')} + \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{v}(t') \times \vec{n}(t')}{c\kappa(t')R(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} .$$

Um die Differentiation nach  $t'$  auszuführen bilden wir

$$\frac{d\vec{n}}{dt'} = \frac{d}{dt'} \frac{\vec{x} - \vec{x}'(t')}{|\vec{x} - \vec{x}'(t')|} = \frac{\vec{R}}{R^2} (\vec{n} \cdot \vec{v}) - \frac{\vec{v}}{R} = \frac{1}{R} ((\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}) \tag{11.56}$$

und

$$\frac{d}{dt'}(\kappa R) = \frac{d}{dt'} \left( R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right) = \frac{v^2}{c} - \vec{n} \cdot \vec{v} - \frac{R}{c} (\vec{n} \cdot \vec{b}) \tag{11.57}$$

mit der Beschleunigung der Punktladung  $\vec{b} = d\vec{v}/dt'$ . Hierbei haben wir  $\dot{R} = (-1/R) \vec{R} \cdot \vec{v} = -\vec{n} \cdot \vec{v}$  verwendet.

### Entwicklung nach grossen Entfernungen

Setzen wir Gl. (11.56) und (11.57) in (11.55) ein und ordnen nach Potenzen

von  $R^{-1}$ , so erhalten wir (unter Weglassung des Argumentes  $t'$ ):

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa R^2} - \frac{\kappa R \frac{\vec{b}}{c} - \kappa((\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}) + \left(\frac{\vec{v}}{c} - \vec{n}\right)(\vec{v} \cdot \vec{n} - \frac{v^2}{c} + \frac{R}{c}(\vec{n} \cdot \vec{b}))}{(\kappa c)(\kappa^2 R^2)} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa R^2} - \frac{1}{c\kappa^3 R^2} \left( \frac{\kappa R \vec{b}}{c} + \kappa \vec{v} - \kappa(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \vec{v} - \frac{v^2}{c^2} \vec{v} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{R}{c^2}(\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{v} - (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \frac{v^2}{c} \vec{n} - \frac{R}{c}(\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left( -\kappa \vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b}) \frac{\vec{v}}{c} + (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}),
\end{aligned}$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left( (\vec{n} \cdot \vec{b}) \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \kappa \vec{b} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}). \quad (11.58)$$

Die Terme mit  $R^{-2}$  und noch höheren Potenzen von  $1/R$  sind im Hinblick auf die Ausstrahlungsbedingung (11.45) uninteressant. Entsprechend gilt für  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left( (\vec{n} \cdot \vec{b})(\vec{v} \times \vec{n}) - \kappa c (\vec{n} \times \vec{b}) \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} + O(R^{-2}). \quad (11.59)$$

Zur Berechnung der Energiestromdichte benutzen wir die Identität

$$\vec{n} \times \left( \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{b} \right) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \vec{b} \left( \vec{n}^2 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \right) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \kappa \vec{b}, \quad (11.60)$$

wobei wir  $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$  benutzt haben. Ferner gilt die Relation

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{E}), \quad (11.61)$$

die für den asymptotischen Bereich direkt aus Gl. (11.58), (11.59) folgt, sich jedoch auch für die  $R^{-2}$ -Terme beweisen lässt, die uns im folgenden nicht interessieren. Wir finden dann für den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \vec{n} E^2 - \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{E}) \right) = \frac{\vec{n}}{\mu_0 c} E^2, \quad (11.62)$$

da  $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$  im Fernfeld. Mit Gl. (11.58) und (11.60) erhalten wir:

$$\vec{S} = \frac{q^2 \vec{n}}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \kappa^6 R^2} \left( \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{b} \right] \right)^2. \quad (11.63)$$

Da  $|\vec{S}| \sim R^{-2}$ , ist die Ausstrahlungsbedingung (11.45) erfüllbar und wir haben das Ergebnis, dass beschleunigte Punktladungen,  $\vec{b} \neq 0$ , strahlen. Dass geradlinig und gleichförmig bewegte Punktladungen ( $\vec{b} = 0$ ) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruhe-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so dass  $\vec{S} = 0$  wird.

### Beispiele:

#### 1.) *Bremsstrahlung:*

Wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target), dann entsteht Bremsstrahlung. Daraus resultiert das kontinuierliche *Röntgenspektrum*.

#### 2.) *Synchrotron-Strahlung:*

Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung *verloren*. Allerdings wird das Synchrotron auch als Strahlungsquelle verwendet.

#### 3.) *Strahlungsdämpfung:*

Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.

## 12. Multipolstrahlung

---

Wir betrachten jetzt eine Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet  $|\vec{x}'| < d$ . Wir haben in Kap. 1.5 bzw. 5.4 festgestellt, dass die  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder im statischen Fall für  $r \rightarrow \infty$  mindestens mit  $r^{-2}$  abfallen. Wir werden jetzt sehen, dass die Retardierung im zeitabhängigen Fall bewirkt, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nur wie  $r^{-1}$  abfallen. Dabei gehen wir von einer harmonisch oszillierenden Quelle aus, was aber die Gültigkeit der folgenden Multipolentwicklung nicht einschränkt.

### 12.1 Langwellen-Näherung

Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho = \rho(\vec{x})e^{-i\omega t}; \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (12.1)$$

hatten wir in Abschnitt 11.3

$$\Phi = \Phi(\vec{x})e^{-i\omega t}; \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (12.2)$$

gefunden, sowie (mit  $k = \omega/c$ )

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Bei der Diskussion von Gl. (12.3) können wir uns im folgenden auf  $\vec{A}(\vec{x})$  beschränken, da  $\vec{A}$  und  $\Phi$  direkt über die Lorenz-Eichung zusammenhängen: Aus

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (12.4)$$

folgt mit Gl. (12.2)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}). \quad (12.5)$$

## Langwellen - Näherung

Zur weiteren Behandlung von Gl. (12.3) machen wir die Langwellen - Näherung

$$\mathbf{d} \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (12.6)$$

wobei  $\mathbf{d}$  den Radius einer Kugel angibt, die die Ladungs- und Stromverteilung umfasst.

## Beispiele

Für die optische Strahlung von Atomen ist  $\mathbf{d} \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ; analog für die  $\gamma$ -Strahlung von Atomkernen:  $\mathbf{d} \approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 10^{-4} \text{ nm} = 10^{-13} \text{ m}$ .

Bei der Diskussion von Gl. (12.3) sind nun die Längen  $\mathbf{d}$ ,  $\lambda$  und  $r = |\vec{\mathbf{x}}|$  wesentlich. Wir untersuchen folgende Fälle:

### Fall 1: $\mathbf{d} < r \ll \lambda$ (Nahzone)

Dann ist

$$k|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| \ll 1 \quad (12.7)$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{\mathbf{x}}')}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|}, \\ \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{x}}')}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach Gl. (12.8) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik. Angesichts der Zeitabhängigkeit (12.2) spricht man von *quasistatischen Feldern*, für die  $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}$  wie  $R^{-2}$  abfallen, so dass die Ausstrahlungsbedingung (11.45) nicht erfüllt ist.

### Fall 2 : $\mathbf{d} \ll \lambda \ll r$ (Fernzone)

Wegen

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \quad (12.9)$$

können wir dann die Taylor-Reihe in  $(\vec{\mathbf{x}}/r)$

$$|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!} (\vec{\mathbf{x}}' \cdot \nabla)^n r \approx r - \frac{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}}'}{r} = r \left( 1 - \frac{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}}'}{r^2} \right) \quad (12.10)$$

in Gl. (12.3) benutzen:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \vec{A}_0(\vec{x}) + \vec{A}_1(\vec{x}) + \dots \\
&\approx \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{\exp\left\{i\mathbf{k}r\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)\right\}}{r\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \underbrace{\exp\left\{-i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}\right\}}_{1 - i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}} \underbrace{\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)^{-1}}_{1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left(1 - i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2} - i\mathbf{k}\frac{(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2}{r^3}\right) \\
&\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left(1 - i\frac{\omega}{c}(\vec{e}\cdot\vec{x}')\right)
\end{aligned} \tag{12.11}$$

mit  $\mathbf{k} = \omega/c$  und dem Richtungsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}}{r}. \tag{12.12}$$

Dabei haben wir die beiden Reihenentwicklungen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

verwendet.

## 12.2 Elektrische Dipol-Strahlung

Im ersten Term in Gl. (12.11)

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \tag{12.13}$$

können wir wegen

$$\nabla'(x'_\alpha \vec{j}) = j_\alpha + x'_\alpha (\nabla' \vec{j}(\vec{x}'))$$

wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x' j_\alpha &= \int_V d^3x' \nabla' \cdot (x'_\alpha \vec{j}) - \int_V d^3x' x'_\alpha (\nabla' \cdot \vec{j}) \\ &= \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot (x'_\alpha \vec{j})}_{=0} - \int_V d^3x' x'_\alpha (\nabla' \cdot \vec{j}) = -i\omega \int_V d^3x' x'_\alpha \rho(\vec{x}'), \end{aligned} \quad (12.14)$$

da die Ladungs- und Stromverteilung räumlich begrenzt sind sowie unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} - i\omega \rho = 0. \quad (12.15)$$

Mit der Definition des elektrischen Dipolmoments  $\vec{d} = \int_V d^3x \vec{x} \rho(\vec{x})$  wird  $\vec{A}_0(\vec{x})$  dann zu

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d}. \quad (12.16)$$

Für die Felder folgt mit

$$\begin{aligned} \left( \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d} \right)_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \left( \frac{e^{ikr}}{r} d_\gamma \right) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( ike^{ikr} \frac{x_\beta}{r^2} - e^{ikr} \frac{x_\beta}{r^3} \right); \\ \leadsto \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d} &= ik \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times \vec{d}) - \frac{e^{ikr}}{r^2} (\vec{e} \times \vec{d}) \end{aligned}$$

wenn man Gl. (12.9) beachtet und sich auf Terme  $\sim r^{-1}$  beschränkt:

$$\vec{B}_0(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times \vec{d}). \quad (12.17)$$

Mit

$$\Phi_0(\vec{x}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \vec{A}_0(\vec{x}) = -i \frac{\mu_0 c}{4\pi} \omega \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \cdot \vec{d}) \quad (12.18)$$

folgt aus Gl. (7.5) für das  $\vec{E}$ -Feld:

$$\vec{E}_0(\vec{x}) = -\nabla \Phi_0(\vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left( \vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d}) \right) = c (\vec{B}_0 \times \vec{e}), \quad (12.19)$$

wenn man  $(\vec{e} \times \vec{d}) \times \vec{e} = \vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d})$  ausnutzt.

## Energiestromdichte

Wir sind nun in der Lage, die Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B}_0 \times \vec{e}) \times \vec{B}_0 = \frac{c}{\mu_0} \left( \vec{e} B_0^2 - \vec{B}_0 (\vec{B}_0 \cdot \vec{e}) \right) \quad (12.20)$$

zu berechnen. Wir benutzen die Realteile von Gl. (12.17) und (12.19) und finden mit Gl. (12.2) sowie

$$\begin{aligned} ((\vec{e} \times \vec{d}) \times \vec{e}) \times (\vec{e} \times \vec{d}) &= (\vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d})) \times (\vec{e} \times \vec{d}) \\ &= \vec{e} (\vec{d}^2 - (\vec{e} \cdot \vec{d})^2) - \vec{d} \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{d} - \vec{e} \cdot \vec{d})}_{=0} \\ &= \vec{e} (d^2 - (d \cos \vartheta)^2) = \vec{e} d^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

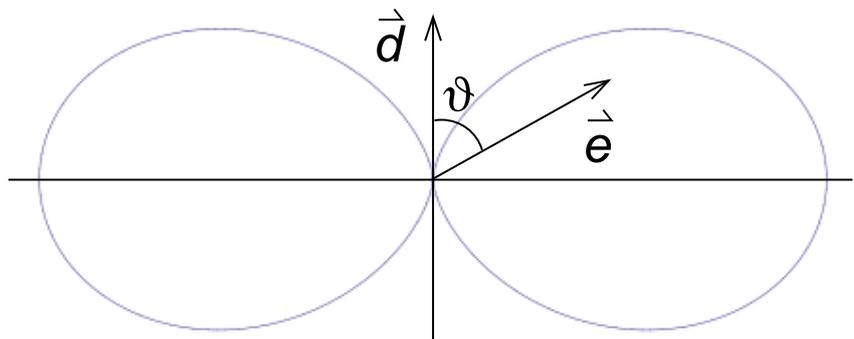
und erhalten

$$\vec{S}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \vec{e}, \quad (12.21)$$

wobei  $\vartheta$  der von  $\vec{e}$  und  $\vec{d}$  eingeschlossene Winkel ist. Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\langle \vec{S}_0 \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{2r^2} \vec{e}. \quad (12.22)$$

**Abbildung 12.1:**  
Charakteristische  
Winkelabhängigkeit  
der Dipolstrahlung.



Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von  $\vec{d}$  ( $\vartheta = 0$ ), sondern maximal senkrecht zu  $\vec{d}$  ( $\vartheta = 90^\circ$ ). Die  $\sin^2 \vartheta$ -Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

## Bemerkungen

- 1.) Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, dass  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{S}$  ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Abschnitt 9.3).

- 2.) Ein (mit der Frequenz  $\omega$ ) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. Gl. (12.22) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (11.63).
- 3.) Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung ( $l=1$ ), nicht Monopol-Strahlung ( $l=0$ )! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt mit der Tatsache verknüpft, dass Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

### 12.3 Magnetische Dipol-Strahlung

Der 2. Term der Entwicklung (12.11) lautet

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') (\vec{e} \cdot \vec{x}'); \quad (12.23)$$

das verbleibende Integral ist bestimmt durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupoltensor. Um dies zu sehen, benutzen wir

$$\vec{e} \times (\vec{x}' \times \vec{j}) = (\vec{e} \cdot \vec{j}) \vec{x}' - (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}$$

und erhalten die Identität

$$(\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j} = \frac{1}{2} (\vec{x}' \times \vec{j}) \times \vec{e} + \frac{1}{2} \{ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j} + (\vec{e} \cdot \vec{j}) \vec{x}' \} \quad (12.24)$$

die den Integranden in Gl. (12.23) in zwei charakteristische Summanden zerlegt. Mit der Definition

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x (\vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}))$$

(siehe Gl. (4.46)) des magnetischen Dipolmoments wird der erste (bzgl.  $\vec{x}' \leftrightarrow \vec{x}$  antisymmetrische) Anteil:

$$\vec{A}_1^{(m)}(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{m} \times \vec{e}). \quad (12.25)$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (12.16) über, wenn man

$$\frac{1}{c} (\vec{m} \times \vec{e}) \rightarrow \vec{d} \quad (12.26)$$

ersetzt. Damit kann man durch die umgekehrte Ersetzung aus Gl. (12.17) und (12.19) für die Feldstärken sofort ablesen:

$$\vec{B}_1^{(m)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times (\vec{m} \times \vec{e})) \quad (12.27)$$

und

$$\vec{E}_1^{(m)}(\vec{x}) = c (\vec{B}_1^{(m)} \times \vec{e}). \quad (12.28)$$

Analog zu Gl. (12.22) findet man für die im Zeitmittel abgestrahlte Energie:

$$\langle \vec{S}_1^{(m)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^4 m^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{2r^2} \vec{e}, \quad (12.29)$$

wo  $\vartheta$  jetzt der Winkel zwischen  $\vec{m}$  und  $\vec{e}$  ist. Der Vergleich von Gl. (12.29) und (12.22) zeigt, dass sich elektrische und magnetische Dipol-Strahlung in ihrer Frequenz- und Winkelabhängigkeit nicht unterscheiden. Der einzige Unterschied liegt in der *Polarisation*: für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes in der von  $\vec{e}$  und  $\vec{d}$  aufgespannten Ebene, für einen magnetischen Dipol senkrecht zu der von  $\vec{e}$  und  $\vec{m}$  aufgespannten Ebene.

## 12.4 Elektrische Quadrupol-Strahlung

Wir befassen uns nun mit dem 2. Term in Gl. (12.24), der auf

$$\vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{2r} \int d^3x' \{ \vec{j}(\vec{e} \cdot \vec{x}') + \vec{x}'(\vec{e} \cdot \vec{j}) \} \quad (12.30)$$

führt. Das Integral in Gl. (12.30) kann nun auf den in Abschnitt 1.5 eingeführten elektrischen Quadrupoltensor zurückgeführt werden. Analog zu Gl. (12.14) suchen wir eine Beziehung zu den Momenten der Quellenverteilung:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x' \nabla' \left[ x'_\alpha (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \right] \\ &= \int d^3x' x'_\alpha \nabla' \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \right] + \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \underbrace{\nabla' x'_\alpha}_{e'_\alpha} \end{aligned} \quad (12.31)$$

wobei die erste Identität wegen der räumlichen Beschränkung von  $\vec{j}(\vec{x}')$  gilt. Es gilt dann weiter

$$\begin{aligned} \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') j_\alpha(\vec{x}') &= - \int d^3x' x'_\alpha \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \nabla' \vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}') \cdot \underbrace{\nabla'(\vec{e} \cdot \vec{x}')}_{=\vec{e}} \right] \\ \leadsto \int d^3x' \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + \vec{x}' (\vec{e} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \right] &= -i\omega \int d^3x' \vec{x}' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') \end{aligned} \quad (12.32)$$

wobei wieder die Ladungserhaltung in der Form (12.15) benutzt wurde. Also können wir Gl. (12.30) schreiben als:

$$\vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{2r} \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{x}' \rho(\vec{x}'). \quad (12.33)$$

Für die Felder folgt bei Beachtung von Gl. (12.9)

$$\vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = ik \left( \vec{e} \times \vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) \right) \quad (12.34)$$

und

$$\vec{E}_1^{(e)}(\vec{x}) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = c \left( \vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) \times \vec{e} \right), \quad (12.35)$$

da im ladungsfreien Raum

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12.36)$$

gilt. Mit Hilfe des Quadrupoltensors, gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{\alpha\beta} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \{ 3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \}, \quad (12.37)$$

erhalten wir für  $\vec{B}_1^{(e)}$  den Ausdruck:

$$\vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = -i \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^3 \frac{e^{ikr}}{6r} \left( \vec{e} \times \vec{Q} \right), \quad (12.38)$$

wobei der Vektor  $\vec{Q}$  die Komponenten

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} e_\beta \quad \vec{e} = (e_1, e_2, e_3) \quad (12.39)$$

hat. Man beachte, dass der 2. Term in Gl. (12.37) zu Gl. (12.38) keinen Beitrag liefert (denn  $\delta_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta$ )!

### Energiestromdichte

Wie oben berechnen wir nun die Energiestromdichte

$$\vec{S}_1^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{E}_1^{(e)} \times \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \right) = \frac{c}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \times \vec{e} \right) \times \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)}, \quad (12.40)$$

woraus mit

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (12.41)$$

folgt

$$\vec{S}_1^{(e)} = \frac{c}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \right)^2 \vec{e} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^6 \frac{\cos^2(\mathbf{kr} - \omega t)}{36r^2} (\vec{e} \times \vec{Q})^2 \vec{e}. \quad (12.42)$$

Nach Zeitmittelung wird Gl. (12.42) zu

$$\langle \vec{S}_1^{(e)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} (\vec{e} \times \vec{Q})^2 \vec{e}. \quad (12.43)$$

Der Unterschied zur Dipolstrahlung in der Frequenzabhängigkeit ist offensichtlich.

### Axialsymmetrie

Zur Diskussion der Winkelabhängigkeit betrachten wir den Fall der Axialsymmetrie (vgl. Abschnitt 1.5 )

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta; \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2} = -\frac{Q_0}{3}. \quad (12.44)$$

In

$$(\vec{e} \times \vec{Q})^2 = Q^2 - (\vec{e} \cdot \vec{Q})^2 \quad (12.45)$$

wird dann

$$Q^2 = \frac{Q_0^2}{9} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{4}{9} Q_0^2 e_3^2 = \frac{Q_0^2}{9} (\sin^2 \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta) \quad (12.46)$$

sowie

$$\vec{e} \cdot \vec{Q} = e_\alpha Q_{\alpha\alpha} e_\alpha = -\frac{Q_0}{3} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{3} Q_0 \cos^2 \vartheta; \quad (12.47)$$

also

$$(\vec{e} \times \vec{Q})^2 = \frac{4}{9} Q_0^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta. \quad (12.48)$$

Ergebnis:

$$\langle \vec{S}_1^{(e)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} \frac{4Q_0^2}{9} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \vec{e}. \quad (12.49)$$

Die elektrische Quadrupolstrahlung unterscheidet sich von der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung sowohl in der Frequenzabhängigkeit als auch in der Winkelverteilung.

### **Anwendung in der Atom- und Kernphysik**

Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die Dipolstrahlung: Der Vergleich von Gl. (12.22) und (12.49) zeigt, dass elektrische Dipolstrahlung um einen Faktor der Größenordnung  $(kd_0)^{-2}$  stärker ist als elektrische Quadrupolstrahlung. Sie dominiert auch die magnetische Dipolstrahlung, von der sie sich nach Gl. (12.22) und (12.29) um den Faktor  $(v/c)^2$  unterscheidet. Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der *Quantentheorie* möglich.



## Teil VI

# Das elektromagnetische Feld in Materie

## 13. Makroskopische Felder

---

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}, \mathbf{t})$  und die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}, \mathbf{t})$  exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}, \mathbf{t})$  und Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}, \mathbf{t})$  definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind. Wir werden uns daher im folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

### 13.1 Makroskopische Mittelwerte

Integrale der Form

$$\langle f(\vec{x}, \mathbf{t}) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3 \xi \int d\tau f(\vec{x} + \vec{\xi}, \mathbf{t} + \tau) \quad (13.1)$$

sind *makroskopische Mittelwerte*, wobei

- (i)  $\Delta V$  das Volumen,  $\Delta T$  das Zeitintervall angibt, über das gemittelt wird,
- (ii)  $f$  für die Ladungs- oder Stromdichte und die Komponenten der Feldstärken steht.

Wir wollen im folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (13.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die *mikroskopischen* Maxwell-Gleichungen.

### Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad (13.2)$$

## Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}}. \quad (13.3)$$

### Makroskopische Felder

Wenn wir annehmen, dass in Gl. (13.1) Differentiationen nach  $\vec{x}$  und  $t$  unter dem Integral ausgeführt werden dürfen,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle; \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle; \quad \text{etc.}, \quad (13.4)$$

so erhalten wir aus Gl. (13.2) und (13.3) folgende Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0; \quad \nabla \times \langle \vec{E} \rangle + \frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = 0 \quad (13.5)$$

und

$$\nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \langle \vec{B} \rangle - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \vec{j} \rangle. \quad (13.6)$$

Die homogenen Gleichungen (13.5) bleiben beim Übergang von den *mikroskopischen* Feldern  $\vec{E}, \vec{B}$  zu den *makroskopischen* Feldern

$$\vec{\mathcal{E}} \equiv \langle \vec{E} \rangle; \quad \vec{\mathcal{B}} \equiv \langle \vec{B} \rangle \quad (13.7)$$

erhalten. In den inhomogenen Gleichungen (13.6) müssen wir nun  $\langle \rho \rangle$  und  $\langle \vec{j} \rangle$  geeignet aufteilen in Anteile, die wie bisher von freien Ladungsträgern herrühren und solche Anteile, die auf festen oder induzierten elektrischen oder magnetischen Dipolen beruhen. Ziel des Umschreibens der Maxwellgleichungen ist es, die in einem Material von gebundenen Ladungen oder Strömen erzeugten elektrischen und magnetischen Felder mit den äußeren Felder  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  zusammenzufassen; als Ergebnis werden wir elektrische und magnetische Hilfsfelder erhalten, die sich nur auf die freien Ladungen und Ströme beziehen.

## 13.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in Gl. (13.6) mit dem Zusammenhang von  $\vec{\mathcal{E}}$  und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir

$$\langle \rho \rangle = \rho_b + \rho_f, \quad (13.8)$$

wobei  $\rho_b$  die im Sinne von Gl. (13.1) gemittelte Dichte der *gebundenen* Ladungsträger (**b** steht für 'bound') darstellt,  $\rho_f$  die gemittelte Dichte der *freien* Ladungsträger (**f** steht für 'free').

*Gebundene Ladungsträger* sind z. B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie NaCl mit den Gitterbausteinen  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$ ) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, dass die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, dass sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte *Gleichgewichtslagen* gebunden sind, um die herum kleine Schwingungen möglich sind.

*Frei bewegliche Ladungsträger* sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie unter dem Einfluss eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

### Polarisations-Ladungen

$\rho_f$  ist im Gegensatz zu  $\rho_b$  eine makroskopische, im Experiment direkt kontrollierbare Größe. Die Ladungen auf den Platten eines Kondensators z.B. können *von außen* vorgegeben werden. Sie erzeugen ein elektrisches Feld, das in einem Dielektrikum zwischen den Platten elektrische Dipole erzeugen oder ausrichten kann. Der Effekt für den Beobachter sind *Polarisationsladungen* auf den Oberflächen des Dielektrikums, die von den speziellen Gegebenheiten (Art des Dielektrikums, Temperatur der Umgebung, Stärke des  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes) abhängen.

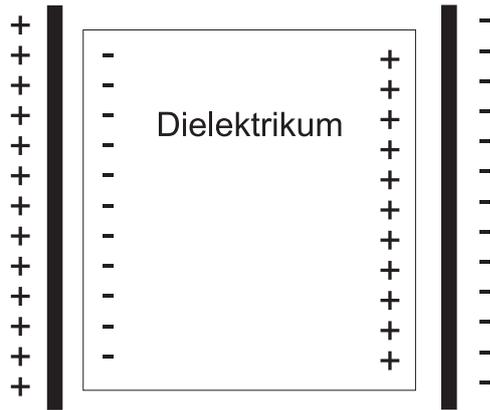
### Dielektrische Polarisation

Es liegt daher nahe, das von den (gebundenen) Polarisationsladungen resultierende zusätzliche elektrische Feld mit dem Feld zusammenzufassen, das von den Ladungen  $\rho_f$  auf den Platten herrührt. Das Zusatzfeld  $\vec{\mathcal{P}}$  wählen wir so, dass:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b} \quad (13.9)$$

und

$$\vec{\mathcal{P}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \rho_b = 0. \quad (13.10)$$



**Abbildung 13.1:** Induzierte Polarisationsladungen auf der Oberfläche des Dielektrikums im Kondensator erzeugen ein zusätzliches elektrisches Feld.

Mit der letzten Beziehung wird  $\vec{\mathcal{P}}$  erst eindeutig, denn nach Gl. (13.9) könnte man zu  $\vec{\mathcal{P}}$  noch ein beliebiges Wirbelfeld  $\nabla \times \vec{\mathcal{Q}}(\vec{x})$  addieren, ohne dass sich an der Gleichung etwas ändert. Dann wird mit Gl. (13.6)

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}) = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \rho_f,$$

also

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) = \rho_f \quad (13.11)$$

oder nach Einführung der *dielektrischen Verschiebung*,  $\vec{\mathcal{D}}$ ,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad (13.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f. \quad (13.13)$$

Wir werden weiter unten zeigen, dass das *Hilfsfeld*  $\vec{\mathcal{P}}$  gerade die Dichte des (makroskopischen) Dipolmoments des betrachteten Dielektrikums ist (*dielektrische Polarisation*). Gleichung (13.13) zeigt, dass die dielektrische Verschiebung  $\vec{\mathcal{D}}$  nur von den freien Ladungsträgern, d.h. den Überschussladungen  $\rho_f$  erzeugt und damit unabhängig von den Spezifika des Materials ist; diese gehen über  $\vec{\mathcal{E}} = (\vec{\mathcal{D}} - \vec{\mathcal{P}})/\epsilon_0$ , d.h. durch  $\vec{\mathcal{P}}$  in die elektrische Feldstärke  $\vec{\mathcal{E}}$  ein. Zwei elektrostatische Felder gleicher Geometrie mit denselben Überschussladungen  $\rho_f$  haben dasselbe  $\vec{\mathcal{D}}$ -Feld.

### 13.3 Mikroskopische Ströme

Wir wollen nun noch die zweite inhomogene Gleichung in Gl. (13.6) umformen. Analog zu Gl. (13.8) teilen wir auf:

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_b, \quad \text{mit} \quad \vec{j}_b = \vec{j}_P + \vec{j}_M. \quad (13.14)$$

Dabei ist:

$\vec{j}_f$  die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende, gemäß Gl. (13.1) gemittelte, Stromdichte.

$\vec{j}_b$  die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte. Es ist zweckmäßig  $\vec{j}_b$  nochmals aufzuteilen:

$\vec{j}_p$ : Nach Gl. (13.6) (Ampère-Maxwellsches Gesetz) erzeugt ein zeitlich veränderliches makroskopisches elektrisches Feld einen Strom, nach Gl. (13.13) auch die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{P}$ :

$$\vec{j}_p \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (13.15)$$

Oder anders ausgedrückt: Die Polarisation  $\vec{P}(\vec{x})$  bewirkt nach Gl. (13.9) eine Polarisationsladungsdichte  $-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_b \equiv \rho_p$ , die der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_p(\vec{x}) + \nabla \cdot \vec{j}_p(\vec{x}) = 0$$

genügt, woraus wieder Gl. (13.15) folgt.

$\vec{j}_M$ : Molekulare Kreisströme, d.h. solche die *magnetische Dipole* erzeugen. Wir diskutieren diesen Anteil später.

## Magnetfeld und magnetische Induktion

Mit Gl. (13.12), (13.14) und (13.15) entwickeln wir jetzt die Form der zweiten inhomogenen Gleichung (13.6) in Anwesenheit von Materie. Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} &= \underbrace{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{=\mu_0 \vec{j}} \\ &= \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_M) - \mu_0 \vec{j}_p = \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_M). \end{aligned} \quad (13.16)$$

Für die weitere Umformung von Gl. (13.16) nutzen wir die Kontinuitätsgleichung für die freien Ladungsträger aus:

$$\nabla \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \quad (13.17)$$

Unter Verwendung von Gl. (13.13) und (13.17) betrachten wir jetzt die Größe

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} - \rho_f) = 0, \quad (13.18)$$

so dass der Vektor  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t + \vec{j}_f$  sich als Rotation eines Vektors darstellen lässt, dem *makroskopischem Magnetfeld*  $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathcal{H}} \equiv \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f}. \quad (13.19)$$

Mit Gl. (13.16) finden wir den Zusammenhang von  $\vec{\mathcal{B}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$ , indem wir betrachten:

$$\nabla \times (\vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}) = \underbrace{\nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f \right)}_{=\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M)} = \mu_0 \vec{j}_M. \quad (13.20)$$

Analog zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{\mathcal{P}}$  führen wir hier die *Magnetisierung*  $\vec{\mathcal{M}}$  ein:

$$\boxed{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}}, \quad (13.21)$$

so dass entsprechend Gl. (13.9)  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b$ :

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \vec{j}_M; \quad \vec{\mathcal{M}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \vec{j}_M = 0. \quad (13.22)$$

$\vec{\mathcal{M}}$  lässt sich also konsistent als Dichte des (makroskopischen) magnetischen Dipolmoments (*Magnetisierung*) interpretieren, erzeugt durch die mikroskopischen Kreisströme  $\vec{j}_M$ .

## Bemerkungen

- 1.) Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{B}}$ , nämlich  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  (vgl. Gl. (13.7)).  $\vec{\mathcal{D}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.

- 2.) Eine makroskopische Polarisation (oder Magnetisierung) kann dadurch zustande kommen, dass vorhandene elektrische (oder magnetische) Dipole im Feld *ausgerichtet* werden oder dass Dipole vom Feld *induziert* werden. Ohne äußeres Feld sind *permanente* Dipole statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarisation (oder Magnetisierung).
- 3.) Aus der Linearität der Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$  und der (postulierten) Kontinuitätsgleichung (13.18) für die freien Ladungsträger gilt auch die für die gebundenen Ladungsträger:

$$\nabla \cdot \vec{j}_b + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0.$$

## Makroskopischen Feldgleichungen

Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (13.23)$$

Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j}_f \quad (13.24)$$

Verknüpfungen

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}; \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}}. \quad (13.25)$$

Die Gleichungen (13.23), (13.24) haben formal die gleiche Struktur wie Gl. (13.2), (13.3). Sie können daher mit den gleichen Methoden gelöst werden.

## Materialgleichungen

Die Gleichungen (13.23), (13.24) reichen jedoch noch nicht aus, um - bei gegebenem  $\rho_f, \vec{j}_f$  - die vier Felder  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}}$  eindeutig zu bestimmen. Dazu müssen wir die formalen Verknüpfungen (13.25) mit Hilfe spezieller Modelle für die betrachtete Materie in explizite *Materialgleichungen* umwandeln.

### 13.4 Polarisation und Magnetisierung

Zur Interpretation von Polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$  und Magnetisierung  $\vec{\mathcal{M}}$  führen wir durch

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}; \quad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\bar{\Phi} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \quad (13.26)$$

das makroskopische skalare Potential  $\bar{\Phi}$  und Vektor-Potential  $\vec{\mathcal{A}}$  ein. Für sie gelten in Lorenz-Eichung die inhomogenen Wellengleichungen

$$-\square\bar{\Phi} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \rho_f - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} \right), \quad (13.27)$$

wegen  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b$  und

$$-\square\vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \left( \vec{j}_f + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t} \right). \quad (13.28)$$

wegen  $\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \vec{j}_M$  und  $\dot{\vec{\mathcal{P}}} = \vec{j}_p$ . Sie haben als spezielle Lösungen die retardierten Potentiale (vgl. Abschnitt 11.3)

$$\bar{\Phi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int d^3x' \frac{\rho_f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \quad (13.29)$$

mit der retardierten Zeit  $t' = t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ . Ebenso:

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int d^3x' \frac{\vec{j}_f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t')}{\partial t'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}. \quad (13.30)$$

#### Elektrische Dipol-Dichte

Den uns interessierenden Term in Gl. (13.29) formen wir mit partieller Integration um:

$$\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (13.31)$$

wobei wir der Einfachheit halber die Retardierung vernachlässigen ( $t = t'$ ). Für endlich ausgedehnte Materie tritt kein Oberflächenterm bei der partiellen Integration auf. Der Vergleich mit Abschnitt 12.2 oder Gl. (1.31)

zeigt, dass  $\vec{\mathcal{P}}$  die Bedeutung der Dichte des makroskopischen elektrischen Dipolmoments zukommt, wie oben schon behauptet.

### Magnetische Dipol-Dichte

Ganz entsprechend wird bei Vernachlässigung der Retardierung ( $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ ) aus dem letzten Term in Gl. (13.30):

$$\int d^3\mathbf{x}' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t})}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|} = - \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}') \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t})}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|^3}. \quad (13.32)$$

Der Vergleich mit Abschnitt 12.3 oder Gl. (5.32) zeigt, dass  $\vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  die Dichte des makroskopischen magnetischen Dipolmoments zukommt. Es entsteht dadurch, dass entweder *permanente* magnetische Dipole im Feld ausgerichtet werden oder durch das Feld *induziert* werden, wie im Fall der elektrischen Dipole.

## 14. Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes

---

In Kap. 8 haben wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

### 14.1 Energie

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} = \int d^3x \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (14.1)$$

Grundlage von Gl. (14.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung  $q$ :

$$\vec{K} = q \left( \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right), \quad (14.2)$$

deren magnetischer Anteil zu Gl. (14.1) keinen Beitrag liefert. Aus Gl. (14.2) erhält man mit Gl. (13.1) für die vom makroskopischen Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  auf eine mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Probeladung  $q$  ausgeübte (mittlere) Kraft:

$$\vec{K} = q \left( \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right). \quad (14.3)$$

### Arbeit der freien Ladungen

Die an den freien Ladungen der Dichte  $\rho_f$  vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist dann analog Gl. (14.1):

$$\frac{dW_M}{dt} = \int d^3x \vec{j}_f \cdot \vec{E}. \quad (14.4)$$

Die rechte Seite von Gl. (14.4) können wir mit Gl. (13.24) zu

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int d^3x \left( \vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) \quad (14.5)$$

umformen. Wie in Kap. 8 können wir Gl. (14.5) symmetrisieren, mit Hilfe der Identität

$$\nabla \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{a}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{b}}) \quad (14.6)$$

und Gl. (13.23),

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \quad (14.7)$$

Man erhält:

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = - \int d^3x \left\{ \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right\}. \quad (14.8)$$

Der Vergleich mit Gl. (8.7) zeigt, dass

$$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}} \quad (14.9)$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist.

### Lineare, isotrope Medien

Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung linearer, isotroper Medien:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}; \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}. \quad (14.10)$$

Nur in diesem einfachen Fall lassen sich die Terme als Zeitableitung einer Energiedichte schreiben:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \quad (14.11)$$

und wir können analog Gl. (8.10) die Größe

$$\boxed{\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}})} \quad (14.12)$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren.

## 14.2 Impuls, Drehimpuls

Nach Gl. (14.3) ist

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = q \left( \vec{\mathcal{E}} + (\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}) \right) \quad (14.13)$$

die Änderung des Impulses der Probeladung  $q$  im Feld  $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ . Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch  $\rho_f, \vec{j}_f$  im Feld  $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$  folgt:

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \left( \rho_f \vec{\mathcal{E}} + (\vec{j}_f \times \vec{\mathcal{B}}) \right). \quad (14.14)$$

Analog zu Abschnitt 8.2 formen wir Gl. (14.14) mit

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j}_f \quad (14.15)$$

um zu

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \left\{ \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} \right\}. \quad (14.16)$$

Wir symmetrisieren Gl. (14.16) mit Hilfe von

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad (14.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \left\{ \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{H}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} \right. \\ \left. + (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \times \vec{\mathcal{D}} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) \right\}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Wie in Kap. 8 lässt sich dann

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}} \quad (14.19)$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. Gl. (8.41)). Die Übertragung von Gl. (8.42), der Drehimpulsdichte, auf den Fall des makroskopischen Feldes ist dann trivial.

### 14.3 Die Kirchhoffschen Regeln

Die Theorie der elektrischen Schaltkreise beruht auf folgenden Regeln:

#### 1. Kirchhoffscher Satz (*Knotenregel*)

An einer Stromverzweigung gilt für stationäre und quasistationäre Ströme

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (14.20)$$

#### Beweis

Für stationäre und quasistationäre Ströme darf in Gl. (13.19)

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f$$

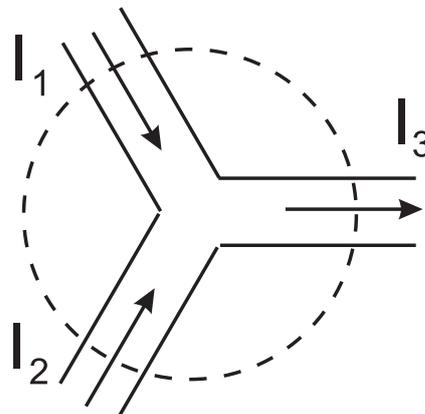
der Term  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  vernachlässigt werden. Damit gilt

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0. \quad (14.21)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt

$$\int_{\mathbb{F}} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f = \sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (14.22)$$

**Abbildung 14.1:**  
Illustration der Integrationsoberfläche  $\mathbb{F}$  bei der Kirchhoffschen Knotenregel.



#### 2. Kirchhoffsche Regel (*Maschenregel*)

Die Summe der Spannungsabfälle längs eines geschlossenen Weges in einem Schaltkreis (*Masche*) verschwindet,

$$\sum_j U_j = 0. \quad (14.23)$$

Dabei kann  $U_j$  für eine Batteriespannung stehen, oder für

i) Ohmschen Spannungsabfall (*Widerstand R*)

$$U_R = IR, \quad (14.24)$$

ii) Kondensatorspannung (*Kapazität C*)

$$U_C = \frac{1}{C} \int dt I, \quad (14.25)$$

iii) induzierte Spannung (*Induktivität L*)

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (14.26)$$

### Beweis

Aus

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (14.27)$$

folgt mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_F d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{B}}. \quad (14.28)$$

Die rechte Seite von Gl. (14.28) verschwindet, wenn durch die Masche kein zeitlich veränderliches Magnetfeld dringt.

### Bemerkung

Grundlage der 2. Kirchhoffschen Regel ist das Induktionsgesetz oder der Energiesatz. Führt man nämlich eine Ladung  $q$  auf einem geschlossenen Weg durch den Schaltkreis, so ist Gl. (14.23) nach Multiplikation mit  $q$  gerade die Energiebilanz.

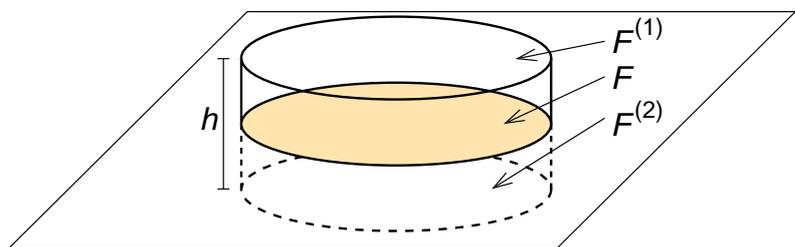
# 15. Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

## 15.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften. Im Allgemeinen sind die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  an Grenzflächen unstetig. Stetigkeitsbedingungen folgen aber für bestimmte Komponenten unter der Annahme, dass die Felder und die zeitlichen Ableitungen beschränkt sind. Der Einfachheit halber sei im folgenden angenommen, dass die Grenzfläche eben sei.

### Abbildung 15.1:

Volumen zur Anwendung des Divergenzsatzes an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.



### 1.) Normalkomponenten von $\vec{B}$ und $\vec{D}$

Wir betrachten

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (15.1)$$

und wenden den Gaußschen Integralsatz auf das symmetrisch an der Grenzfläche angebrachtes Volumen (siehe Fig. 15.1) an: Die Deckflächen  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  eines *Kästchen* (Zylinders) mit Volumen  $V$  und Oberfläche  $\partial V$  mögen symmetrisch zur Grenzfläche liegen; Größe und Gestalt der Deckflächen seien beliebig. Mit dem Divergenzsatz finden wir

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{B} + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{B} + \mathcal{O}(h) = 0 \quad (15.2)$$

wobei die letzte Gleichheit aus Gl. (15.1) folgt. Der Term  $\mathcal{O}(\mathbf{h})$  beschreibt den Beitrag von der Mantelfläche des Zylinders. Macht man die Höhe  $\mathbf{h}$  des Kästchen beliebig klein, so verschwinden im Grenzwert  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  die Mantelbeiträge, und die Stirnflächen  $F^{(1)}, F^{(2)}$  gehen gegen die Grenzfläche  $F$ :

$$\int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = \int_F d\mathbf{f} \vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0. \quad (15.3)$$

Das Vorzeichen kommt ins Spiel, weil die Flächennormalen der oberen und unteren Stirnflächen entgegengesetzt sind:  $\vec{n}^{(1)} = \vec{n} = -\vec{n}^{(2)}$ .  $\vec{\mathcal{B}}^{(1)}$  und  $\vec{\mathcal{B}}^{(2)}$  sind die  $\vec{\mathcal{B}}$ -Felder unmittelbar oberhalb und unterhalb der Grenzfläche  $F$ . Da die Schnittfläche  $F$  beliebig gewählt werden kann, muss für den Integranden selbst gelten:

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0} \quad (15.4)$$

Diese Gleichung besagt, dass die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{B}}$  stetig durch die Grenzfläche hindurchgehen muss; da es nur eine Normalkomponente gibt, lässt sich diese Gleichung auch als  $\mathcal{B}_n^{(1)} = \mathcal{B}_n^{(2)}$  schreiben.

Analog folgt aus

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f \quad (15.5)$$

mit dem Divergenzsatz

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \mathcal{O}(\mathbf{h}) = \int_V d^3x \rho_f \quad (15.6)$$

und im Grenzwert  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  wird

$$\int_V d^3x \rho_f \rightarrow \int_F d\mathbf{f} \gamma_f,$$

wobei  $\gamma_f$  die freie Ladung pro Fläche auf der Grenzfläche ist. Wenn die räumliche Ladungsdichte  $\rho_f$  der Ladung überall stetig ist, wird  $\gamma_f = 0$ . Ein  $\gamma_f \neq 0$  kann nur auftreten, wenn  $\rho_f$  auf der Grenzfläche singularär ist und dort einen endlichen Wert pro Fläche besitzt. Für die dielektrische Verschiebung gilt also

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}^{(2)}) = \gamma_f} \quad (15.7)$$

oder auch  $\mathcal{D}_n^{(1)} - \mathcal{D}_n^{(2)} = \gamma_f$ . Für Dielektrika mit  $\gamma_f = 0$  ist die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{D}}$  stetig; dagegen springt  $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{D}}$  beim Übergang von Leiter zu Nichtleiter um  $\gamma_f$  um den Wert der Ladung pro Grenzfläche.

## 2.) Tangentialkomponenten von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\mathcal{H}$

Wir benutzen die Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f. \quad (15.8)$$

Wir verwenden jetzt eine andere Version des Gaußschen Satzes, die wir auf dasselbe Zylindervolumen von Fig. 15.1 anwenden können. Man findet diese Version wie folgt; es gilt

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{b}(\vec{x}) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{b}(\vec{x})$$

mit Volumen  $V$ , Oberfläche  $\partial V$  und differenzierbarem Vektorfeld  $\vec{b}(\vec{x})$ . Sei nun  $\vec{b}(\vec{x}) = \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x})$  mit beliebigem konstantem Vektor  $\vec{c}$ :

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) \quad (15.9)$$

Im Integranden der linken Seite ist (mit Summenkonvention)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) &= \partial_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} c_\beta a_\gamma(\vec{x}) = -c_\beta \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial_\alpha a_\gamma(\vec{x}) \\ &= -\vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{a}(\vec{x})) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von Gl. (15.9) hingegen gilt für das Spatprodukt

$$d\vec{f} \cdot \vec{c} \times \vec{a}(\vec{x}) = \vec{c} \cdot (\vec{a}(\vec{x}) \times d\vec{f}) = -\vec{c} \cdot (d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x}))$$

Einsetzen in Gl. (15.9) ergibt

$$\vec{c} \cdot \int_V d^3x \nabla \times \vec{a}(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \oint_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x})$$

und weil  $\vec{c}$  beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\int_V d^3x \nabla \times \vec{a}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{x}) \quad (15.10)$$

Mit dieser Form des Gaußschen Integralsatzes erhalten wir aus Gl. (15.8) und mit dem Grenzwert  $h \rightarrow 0$

$$\int_V \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \int_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{\mathcal{E}} = \int_F d\vec{f} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = \int_F d\vec{f} \vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)})$$

(15.11)

Wir nehmen an, dass das  $\vec{\mathcal{B}}$ -Feld und seine zeitliche Ableitung auf der Grenzfläche beschränkt ist, sodass

$$\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

und damit

$$\int_{\mathcal{F}} df \vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0.$$

Da die Schnittfläche  $\mathcal{F}$  beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0}, \quad (15.12)$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{E}}$  bezüglich der Schnittfläche ist stetig. Bei der zweiten Gleichung von (15.8) tritt zusätzlich  $\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \vec{j}_f$  auf. Wiederum verschwindet das Integral, wenn die Flussdichte auf der Grenzfläche stetig ist; die Grenzfläche kann aber eine singuläre Flächenstromdichte tragen; dann schreiben wir  $d^3\mathbf{x} = df dz$  mit der  $z$ -Koordinate in Normalenrichtung, und damit

$$\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \vec{j}_f = \int_{\mathcal{F}} df \int_{-h/2}^{h/2} dz \vec{j}_f \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}} df \vec{\eta}_f \quad \text{mit} \quad \vec{\eta}_f = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} dz \vec{j}_f$$

$\vec{\eta}_f$  ist dadurch definiert, dass  $dQ = |\vec{\eta}_f| d\mathbf{l}_n dt$  die Ladung ist, die während der Zeit  $dt$  innerhalb der Grenzfläche in  $\vec{\eta}_f$ -Richtung durch ein Linienelement  $d\mathbf{l}_n$  senkrecht zu  $\vec{\eta}_f$  transportiert wird.

Unter Annahme der Beschränktheit von  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  an der Grenzfläche erhalten wir

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = \vec{\eta}_f} \quad (15.13)$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{H}}$  springt an der Grenzfläche um die Flächenstromdichte  $\vec{\eta}_f$  in der Grenzfläche senkrecht zu  $\vec{n} \times \vec{\mathcal{H}}$ .

## 15.2 Lineare, isotrope Medien

In linearen, isotropen Medien gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen  $\vec{\mathcal{H}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  sowie zwischen  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{D}}$ :

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (15.14)$$

Dann findet man aus (15.4), (15.12), (15.7) und (15.13):

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(2)}) = 0 \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{n} \cdot (\mu_1 \vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \mu_2 \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = 0} \quad (15.15)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}^{(2)}) = \gamma_f \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{n} \cdot (\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = \gamma_f} \quad (15.16)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0 \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{\mathcal{D}}^{(1)}}{\epsilon_1} - \frac{\vec{\mathcal{D}}^{(2)}}{\epsilon_2} \right) = 0} \quad (15.17)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = \vec{\eta}_f \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{\mathcal{B}}^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\vec{\mathcal{B}}^{(2)}}{\mu_2} \right) = \vec{\eta}_f} \quad (15.18)$$

### Grenzfläche zwischen Metallen

Gilt das Ohmsche Gesetz,

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}}, \quad (15.19)$$

mit *Leitfähigkeit*  $\sigma$ , so folgt aus Gl. (15.12) für die Tangentialkomponente von  $\vec{j}_f$ :

$$\boxed{\vec{n} \times \left( \frac{\vec{j}_f^{(1)}}{\sigma_1} - \frac{\vec{j}_f^{(2)}}{\sigma_2} \right) = 0}. \quad (15.20)$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (15.21)$$

bei Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (wie unter 1.)

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j}_f = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f = \int_{F^{(1)}} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f + \int_{F^{(2)}} d\vec{f} \cdot \vec{j}_f + \mathcal{O}(h) = - \int_V d^3x \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

und damit im Grenzwert  $h \rightarrow 0$

$$\int_F d\vec{f} \vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = - \int_F d\vec{f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial t}$$

Wegen freier Wahl von F folgt

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = - \frac{\partial \gamma_f}{\partial t}}. \quad (15.22)$$

Speziell für stationäre Ströme folgt aus

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0 \quad (15.23)$$

die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = 0. \quad (15.24)$$

### Übergang Leiter - Nichtleiter

Wir betrachten ein leitfähiges Medium auf Seite (1) und ein nichtleitendes auf Seite (2). Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, gilt mit Gl. (15.24)

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_f^{(1)} - \vec{j}_f^{(2)}) = 0, \quad (15.25)$$

und über das Ohmsche Gesetz Gl. (15.19) folgt, dass

$$\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = 0, \quad (15.26)$$

da  $\sigma_1 \neq 0$ . Dagegen folgt für  $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(2)}$  aus Gl. (15.16):

$$\epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(2)} = -\gamma_f. \quad (15.27)$$

Insbesondere für die Elektrostatik ist, wegen  $\vec{j}_f = 0$ , auch

$$\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = 0; \quad (15.28)$$

dann fordert (15.12)

$$\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}^{(2)} = 0, \quad (15.29)$$

also steht das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters.

### 15.3 Reflexion und Brechung von Licht

In Abwesenheit freier Ladungen  $\rho_f = 0$ ,  $\vec{j}_f = 0$  lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0 \quad (15.30)$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \quad (15.31)$$

Sie vereinfachen sich mit der Annahme linearer, isotroper Medien

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}, \quad (15.32)$$

zu

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (15.33)$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (15.34)$$

Wie in Kap. 9 lassen sich die Gleichungen (15.34) unter Beachtung von (15.33) entkoppeln, z.B.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}})}_{=0} - \Delta \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2}, \quad (15.35)$$

und man erhält die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0, \quad (15.36)$$

wobei  $c'$  die Phasengeschwindigkeit im Medium ist (vgl. Abschnitt 9.3):

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} = \epsilon \mu}. \quad (15.37)$$

### Ebene Wellen

Da wir im folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir Lösungen von (15.36) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (15.38)$$

wobei zwischen  $\omega$  und  $\vec{k}$  die Beziehung

$$\omega = c' k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (15.39)$$

gelten muss. Wie in Kap. 9 findet man, dass  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  und  $\vec{k}$  senkrecht zueinander stehen; aus  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  folgt  $\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{k} = 0$ , und es gilt

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad \leadsto \quad \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \mu\omega \vec{\mathcal{E}}$$

und damit

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mu c'} \vec{e} \times \vec{\mathcal{E}} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c'} \vec{e}.$$

Gleichung (15.39) unterscheidet sich von (9.25) dadurch, dass dort  $c$  eine Konstante ist, während  $c'$  von  $\omega$  abhängt, da im Allgemeinen  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ . Die Komponenten verschiedener Frequenz  $\omega$  in einem Wellenpaket laufen also mit verschiedener Geschwindigkeit  $c' = c'(\omega)$ , das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (*Zerfließen* von Wellenpaketen; vgl. hierzu Abschnitt 10.3).

### Phasen- versus Gruppengeschwindigkeit

Je nach Verlauf von  $\epsilon(\omega)$  kann  $c' > c$  werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit*  $v_{ph} = c'$  nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*

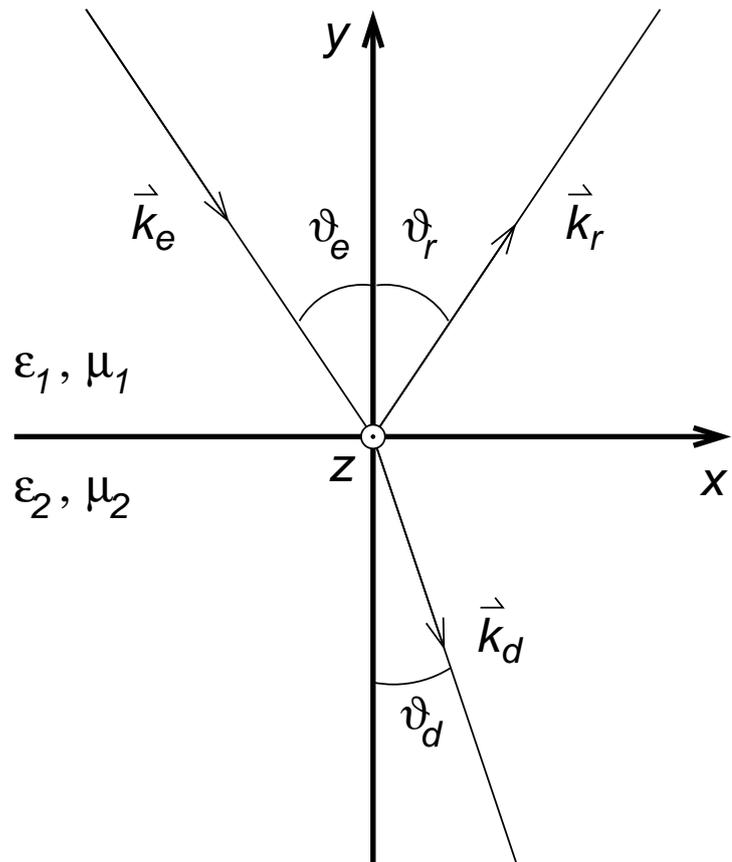
$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \tag{15.40}$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl  $k_0$  konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch  $v_g$  und nicht durch  $v_{ph}$  bestimmt.

### Randbedingungen für jede stetige Komponente von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (15.38), an einer ebenen Grenzfläche (siehe Fig. 15.2). O.B.d.A. wählen wir den Ursprung des Koordinatensystems in der Grenzfläche, und wir orientieren das Koordinatensystem, dass der Einfallswellenvektor  $\vec{k}_e$  mit der Grenzflächennormale  $\vec{n}$  die  $xy$ -Ebene definiert. Die Grenzfläche  $F$  ist dann also die  $xz$ -Ebene. Für eine beliebige stetige Komponente, die wir  $A$  nennen, muss beim Übertritt von Medium 1 nach Medium 2 die Stetigkeit zwischen Welle oberhalb und Welle unterhalb der Grenze gelten, und zwar für alle Zeiten  $t$ :

$$A_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{x} - \omega t)} + A_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{x} - \omega t)} = A_d e^{i(\vec{k}_d \cdot \vec{x} - \omega t)} \tag{15.41}$$



**Abbildung 15.2:** Ebene Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}_e$  wird an einer Grenzfläche ( $xz$ -Ebene) reflektiert und gebrochen.

wobei  $\vec{x}$  für einen beliebigen Punkt in der Grenzfläche steht.  $A_e$ ,  $A_r$  und  $A_d$  sind die Amplituden der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Wellenkomponente.

Da Gl. (15.41) insbesondere auch für  $t = 0$  gelten muss, folgt die Forderung der Phasengleichheit

$$\vec{k}_e \cdot \vec{x} = \vec{k}_r \cdot \vec{x} = \vec{k}_d \cdot \vec{x} \quad (15.42)$$

für jeden Punkt  $\vec{x}$  aus der Grenzfläche, ohne die Gl. (15.41) nicht erfüllbar wäre. Diese Beziehung besagt, dass alle drei Wellenvektoren dieselbe Projektion auf die Grenzfläche  $F$  haben. Wählt man  $t = 0$  und  $\vec{x} = 0$ , so folgt aus Gl. (15.41) für die Amplituden

$$A_e + A_r = A_d. \quad (15.43)$$

Schließlich kann man Gl. (15.41) auch für  $\vec{x} = 0$ ,  $t \neq 0$  betrachten; daraus folgt die Erhaltung der Frequenz

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d. \quad (15.44)$$

Die Frequenz (Farbe) des Lichts ändert sich also bei Reflexion und Brechung nicht.

## Koplanarität

Gl. (15.42) bedeutet, dass die drei Wellenvektoren  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  in einer Ebene  $\vec{N}$  senkrecht zur Grenzfläche  $F$  liegen; das ist die Einfallsebene, gebildet aus  $\vec{k}_e$  und  $\vec{n}$ , im gewählten System die  $xy$ -Ebene. Diese *Koplanarität* von  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  macht man sich klar, indem man speziell  $\vec{x} = \vec{x}_0$  in der Grenzfläche so wählt, dass  $\vec{k}_e \cdot \vec{x}_0 = 0$ ; dann müssen gemäß Gl. (15.42) die 3 Vektoren  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  senkrecht zu  $\vec{x}_0$  sein, was nur möglich ist, wenn  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_d$  in einer Ebene liegen (koplanar sind).

## Reflexionsgesetz

Außerdem folgt aus der Gleichheit der Projektionen der Wellenvektoren auf die Grenzfläche, Gl. (15.42)

$$k_e \sin \vartheta_e = k_r \sin \vartheta_r = k_d \sin \vartheta_d. \quad (15.45)$$

Wegen der Gleichheit der Frequenzen (15.44)  $\omega_e = \omega_r$  gilt  $c_1 k_e = c_1 k_r$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_1$  im Medium 1. Also ist  $k_e = k_r$ , und es folgt das *Reflexionsgesetz*:

$$\vartheta_e = \vartheta_r. \quad (15.46)$$

Die Welle wird im selben Winkel reflektiert, in dem sie eingefallen ist.

## Brechungsgesetz

Aus (15.44) ergibt sich

$$\frac{k_e}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \omega = \frac{k_d}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \quad \text{mit} \quad c_1^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1}, \quad c_2^2 = \frac{1}{\epsilon_2 \mu_2},$$

also

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (15.47)$$

mit Brechungsindizes  $n_1 = c\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  und  $n_2 = c\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  der beiden Medien. Mit Gl. (15.45), also  $k_e \sin \vartheta_e = k_d \sin \vartheta_d$ , folgt das *Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \vartheta_e}{\sin \vartheta_d} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (15.48)$$

Man kann jetzt von der einen stetigen Komponente  $\mathbf{A}$  zu den kompletten Beziehungen für beliebige elektromagnetische Wellen gelangen, indem man

zwei Polarisationsfälle betrachtet:

a) Transversales elektrisches Feld  $\vec{\mathcal{E}} \perp \mathbf{N}$  (mit Einfallsebene  $\mathbf{N}$ ); dann hat  $\vec{\mathcal{E}}$  nur eine z-Komponente, die wegen  $\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}) = 0$  an der Grenzfläche stetig sein muss.

b) Transversales magnetisches Feld  $\vec{\mathcal{H}} \perp \mathbf{N}$ ; dann hat  $\vec{\mathcal{H}}$  nur eine z-Komponente, die wegen  $\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathcal{H}}^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}^{(2)}) = 0$  (Dielektrikum,  $\vec{\eta}_f = 0$ ) stetig sein muss.

Der allgemeine Fall lässt sich aus diesen beiden Polarisierungen zusammensetzen.

Wertet man dann die Beziehung (15.43) für die Amplituden  $\mathcal{E}_z$  und  $\mathcal{H}_z$  aus, so erhält man die *Fresnelschen Formeln*, das *Brewstersche Gesetz* (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die *Totalreflexion* (Faser-Optik).

### **Bemerkung**

Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon(\omega)$  im allgemeinen komplex, also auch  $\mathbf{k}$  komplex. Eine elektromagnetische Welle wird also im Medium geschwächt (Absorption).

## **15.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitendem Material**

Wir betrachten einen Ohmschen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit  $\sigma$ . Dafür lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (13.23) und (13.24):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \sigma \vec{\mathcal{E}} &= 0; \end{aligned} \quad (15.49)$$

Solange kein Ladungsstau auftritt, ist  $\rho_f = 0$  (vgl. Abschnitt 4.2) und es existiert eine stationäre Stromverteilung

$$\vec{\mathbf{j}}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}} \neq 0. \quad (15.50)$$

Als Lösung von Gl. (15.49) setzen wir

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)} \quad (15.51)$$

an, mit  $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  (folgt aus  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ ). Mit einem analogen Ansatz für  $\vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)} \quad (15.52)$$

finden wir aus Gl. (15.49):

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega}(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}); \quad \mathbf{i}(\vec{k} \times \vec{\mathcal{H}}) + \mathbf{i}\epsilon\omega \vec{\mathcal{E}} - \sigma\vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (15.53)$$

Benutzt man  $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}}\vec{k}^2 = -\vec{\mathcal{E}}\vec{k}^2$  und eliminiert man im letzten Ausdruck von Gl. (15.53)  $\vec{\mathcal{E}}$  oder  $\vec{\mathcal{H}}$ , so erhält man:

$$\frac{-\mathbf{i}k^2}{\mu\omega} + \mathbf{i}\epsilon\omega - \sigma = 0, \quad \curvearrowright \quad k^2 = \omega^2\mu\epsilon + \mathbf{i}\mu\omega\sigma. \quad (15.54)$$

### Komplexe Wellenzahlen

Setzt man den Wellenvektor komplex an (mit reellen  $\alpha$ ,  $\beta$ )

$$k = \alpha + \mathbf{i}\beta; \quad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\mathbf{i}\alpha\beta, \quad (15.55)$$

so kann man  $\alpha$  und  $\beta$  durch  $\mu$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega$  und  $\sigma$  ausdrücken; Koeffizientenvergleich zwischen Gl. (15.54) und (15.55) ergibt:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2; \quad 2\alpha\beta = \mu\omega\sigma. \quad (15.56)$$

Eliminiert man in der ersten Gleichung  $\alpha$  mit Hilfe der zweiten Gleichung, d.h. mit  $\alpha^2 = (\mu\omega\sigma)^2/(4\beta^2)$ , so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu\omega\sigma)^2 + \beta^2\mu\epsilon\omega^2 = 0. \quad (15.57)$$

Da  $\beta$  reell sein soll, kommt als Lösung nur

$$\beta^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right) \quad (15.58)$$

in Frage (für die andere Lösung wäre  $\beta^2 < 0$ ). Analog:

$$\alpha^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right). \quad (15.59)$$

Für verschwindende Leitfähigkeit  $\sigma \rightarrow 0$ , also im Grenzfall Nichtleiter (Dielektrikum), folgt:

$$\beta \rightarrow 0; \quad \alpha^2 \rightarrow \mu\epsilon\omega^2, \quad (15.60)$$

also  $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$  in Einklang mit Gl. (15.39). Da  $\mu\omega\sigma \geq 0$ , müssen  $\alpha$  und  $\beta$  nach Gl. (15.56) gleiches Vorzeichen haben. Für  $\beta \neq 0$  (d.h.  $\sigma \neq 0$ ) wird

eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver  $x$ -Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i(\alpha x-\omega t)} e^{-\beta x}, \quad (15.61)$$

wobei mit  $\alpha > 0$  auch  $\beta > 0$  sein muss.

### Grenzfälle

- 1.) Bei hoher Leitfähigkeit ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) wird die Lichtwelle praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe  $d \sim \beta^{-1} \sim \sigma^{-1/2}$  verschwindet.
- 2.) Für hohe Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty$ ) ist zu beachten, dass  $\sigma$  frequenzabhängig ist:  $\sigma$  wird für  $\omega \rightarrow \infty$  rein imaginär, also  $k^2$  in Gl. (15.54) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit *harter* Röntgenstrahlung nachweisen.

### Skin-Effekt

Als Folge der Dämpfung  $\beta$  können wegen Gl. (15.50) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch  $\beta^{-1}$  bestimmt ist (*Skin-Effekt*).

## Teil VII

# Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

# 16. Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

---

## 16.0 Die spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie wurde 1905 von Albert Einstein veröffentlicht. Sie ist heute ein Eckpfeiler der Physik, wie die Newtonsche Mechanik, die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik und die Schrödingergleichung der Quantenmechanik. Ihre Ursprünge liegen in der Elektrodynamik. Die Maxwellgleichungen mit ihrer Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Optik führen geradezu zwingend zur speziellen Relativitätstheorie. Diese beruht auf Pionierleistungen von Lorentz und Poincaré, aber die Verallgemeinerung und die Anwendung des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf alle Phänomene der Physik sind das Verdienst Einsteins. Zur Zeit Einsteins gab es keine experimentellen Beweise für die spezielle Relativitätstheorie; diese ist aber inzwischen vielfältig überprüft, und es gibt keine Anhaltspunkte, dass sie falsch sein könnte.

### Sinn der Lorentztransformation

Die Maxwellgleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen. Wellen breiten sich üblicherweise in einem Medium aus (zum Beispiel Wasser bei Wasserwellen, Luft bei Schallwellen usw.). Daher lag es vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie nahe, den sogenannten “Äther” als Medium für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen zu postulieren.

Dabei tritt jedoch folgendes Problem mit der Galileiinvarianz auf: Es ist bekannt, dass die Gesetze der klassischen Mechanik invariant unter Galileitransformationen sind, d.h. man kann ein Koordinatensystem  $\Sigma$  durch ein gleichförmig gegenüber  $\Sigma$  bewegtes System  $\Sigma'$  ersetzen, ohne dass sich die Form z.B. der Bewegungsgleichungen ändert:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad t' = t$$

bei geeigneter Wahl der Ursprünge der Koordinatensysteme. Allerdings

zeigt man leicht, dass die Wellengleichung nicht Galileiinvariant ist: Sei

$$\square \mathbf{u} = 0$$

für eine Auslenkung  $\mathbf{u}$  eines mechanischen Systems oder eine Komponente  $u$  von  $\vec{\mathbf{E}}$  oder  $\vec{\mathbf{B}}$ . Im transformierten Koordinatensystem  $\Sigma'$  erfüllt daher  $\mathbf{u}$  die Gleichung

$$\left( \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \mathbf{u} = 0.$$

Unter Verwendung der Transformationsgleichungen wird diese Gleichung im System  $\Sigma$  aber zu

$$\left( \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = 0.$$

Die Form der Wellengleichung ist also unter Galileitransformationen nicht invariant. Das ist für Wellen, die in einem Medium propagieren, kein Problem, denn durch das Medium gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem, und zwar das System, in dem das Medium ruht (z.B. die Luft für Schall). In diesem System gilt dann die übliche Form der Wellengleichung  $\square \mathbf{u} = 0$ . Für elektromagnetische Wellen ist das jedoch problematisch: Das hypothetische Medium Äther müsste dann das bevorzugte Bezugssystem festlegen als dasjenige, in dem der Äther ruht. Die Versuche, die Bewegung der Erde oder bewegter Bezugssysteme relativ zum Äther zu messen (insbesondere das Michelson-Morley-Experiment), misslangen. Lorentz und Poincaré zeigten, dass die Maxwellgleichungen und die Wellengleichung unter Lorentztransformationen (siehe unten) invariant sind.

Diese unbefriedigende Ätherhypothese war für Einstein der Anstoß zur Erkenntnis, dass die Forderung der Forminvarianz der Gleichungen der Physik unter Galileitransformationen problematisch war. Er schlug stattdessen vor, dass alle Gesetze der Physik der speziellen Relativitätstheorie genügen müssen, die auf den folgende Postulaten basiert:

**1. Relativitätsprinzip:** Die Naturgesetze sind unabhängig vom Koordinatensystem. Insbesondere haben alle Naturgesetze die gleiche Form in Koordinatensystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen (in Inertialsystemen).

**2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:** Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Quelle, d.h. Licht hat dieselbe Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen.

## 16.1 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Physik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz gegen die Lorentztransformation evident macht. Der erste Schritt führt dabei über die Einführung der *Viererschreibweise*.

### Ko- und Kontravariante Tensoren

Seien  $ct$ ,  $x$ ,  $y$  und  $z$  Koordinaten im Minkowski-Raum. Man definiert

$$\begin{aligned}x_\mu &:= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), & \mu = 0, 1, 2, 3 \\x^\mu &:= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)\end{aligned}$$

als *kovariante* ( $x_\mu$ ) bzw. *kontravariante* ( $x^\mu$ ) Vierervektoren. Allerdings ist nicht jedes 4-Tupel ein Vierervektor; nur wenn sich die Komponenten unter Lorentztransformation wie Koordinatendifferenzen verhalten,

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

handelt es sich um einen Vierervektor. Per Konvention steht ein griechischer Index für 0...3, ein lateinischer für 1...3. Die Einstein-Konvention, wie wir sie bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt: summiert wird nur noch über gleichnamige Indizes, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, d.h.

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = s^2, \quad x^i x_i = \sum_{i=1}^3 x^i x_i.$$

Die Beschaffenheit, d.h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Es gilt

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{16.1}$$

### Metrischer Tensor

Im euklidischen vierdimensionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Im Minkowski-Raum hat man dagegen

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

Mit dieser Metrik ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kovariante in kontravariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Es gilt

$$\mathbf{x}_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{x}^\nu \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{x}_\nu,$$

wobei  $\mathbf{g}^{\mu\nu}$  die zu  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$  inverse Metrik darstellt. Es gilt  $\mathbf{g}^{\mu\nu} = \mathbf{g}_{\mu\nu}$  und

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{g}_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases}$$

### Transformationseigenschaften

Wie transformieren sich nun allgemeine Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht überhaupt einen kovarianten Vektor aus? Man betrachte die ko- bzw. kontravarianten Vierervektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &= (\mathbf{A}^0, -\mathbf{A}^1, -\mathbf{A}^2, -\mathbf{A}^3) \\ \mathbf{A}^\mu &= (\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3). \end{aligned}$$

Das Vektorfeld  $\mathbf{A}_\mu$  hänge von den Kontinuumskoordinaten ab:  $\mathbf{A}^\mu = \mathbf{A}^\mu(\mathbf{x}^\mu)$ . Durch eine Lorentztransformation werde nun der Übergang zu neuen Koordinaten  $\mathbf{x}'^\mu$  vermittelt. Die ko- bzw. kontravariante Eigenschaft eines Vektors ist nun durch sein Transformationsverhalten in das neue System festgelegt

$$\begin{aligned} \text{kontravarianter Vektor} &: \mathbf{A}'^\mu = \frac{\partial \mathbf{x}'^\mu}{\partial \mathbf{x}^\nu} \mathbf{A}^\nu \\ \text{kovarianter Vektor} &: \mathbf{B}'_\mu = \frac{\partial \mathbf{x}^\nu}{\partial \mathbf{x}'^\mu} \mathbf{B}_\nu. \end{aligned}$$

### Invarianz des Skalarproduktes

Eine zentrale Forderung unseres Formalismus soll die Invarianz des Skalarproduktes  $B_\mu A^\mu$  gegen Lorentztransformation sein. Dies ist wegen

$$B'_\mu A'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} B_\nu A^\lambda = \delta^\nu_\lambda B_\nu A^\lambda = B_\nu A^\nu$$

erfüllt (die Stellung der Indizes am Kroneckersymbol wird später noch klar). Die Motivation für diese Forderung ist offensichtlich: Minkowski-Abstände sollen unabhängig vom Koordinatensystem sein.

### Transformation von Ableitungen

Den nächsten Schritt bildet die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Ableitungen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

also lässt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

*Die Ableitungen nach ko/kontra-varianten Koordinaten transformieren sich wie kontra/ko-variante Vektoren.*

Für die Formulierung von Ableitungen hat sich in der speziellen Relativitätstheorie eine abkürzende Schreibweise durchgesetzt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), & \text{mit } \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right), & \text{mit } -\nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir Vektorpfeile nur noch auf Vektoren im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  schreiben;  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}^\mu$  bedeuten einen Vierervektor.

### Wellengleichung

Nun ist es möglich, die *Viererdivergenz* zu definieren:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu := \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \quad (16.3)$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators bekommt man eine elegante Schreibweise für den d'Alembert-Operator:

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Damit ist die *Wellengleichung* Lorentz-invariant.

## Raum- und zeitartige Abstände

Ereignisse  $\vec{x}(t)$  werden durch Vektoren im Minkowski-Raum beschrieben. Zwei Ereignisse

$$\mathbf{x}^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mathbf{y}^\mu = (y^0, y^1, y^2, y^3)$$

nennt man *raumartig*, wenn sie sich nicht durch ein Lichtsignal verbinden lassen oder *zeitartig*, wenn sie sich durch ein Lichtsignal verbinden lassen, also

$$(\mathbf{x}^\mu - \mathbf{y}^\mu)(x_\mu - y_\mu) = \begin{cases} < 0 : & \text{raumartig} \\ > 0 : & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Ausgeschrieben ist der Zusammenhang mit der Laufzeit des Lichtsignals klarer:

$$\begin{array}{ll} \text{raumartig} & c^2(t - t')^2 \equiv (x^0 - y^0)^2 < (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \\ \text{zeitartig} & c^2(t - t')^2 \equiv (x^0 - y^0)^2 > (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \end{array}$$

mit  $ct = x^0$  und  $ct' = y^0$ . Zwei ‘gleichzeitige’ Ereignisse (im Laborsystem) mit  $x^0 = y^0$  sind also raumartig. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes ist die Raum- bzw. die Zeitartigkeit unabhängig vom Bezugssystem (nicht jedoch die ‘Gleichzeitigkeit’).

## Die Vierergeschwindigkeit

Aufgrund der Zeitdilatation ist es nicht so einfach, einen Ausdruck für eine Geschwindigkeit hinzuschreiben - nach welcher Zeit soll die Bahnlinie abgeleitet werden? Von besonderer Bedeutung ist hier der Begriff der *Eigenzeit*. Sie bezeichnet die Zeit  $\tau$ , die eine Uhr anzeigt, die mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, d.h. mit ihm bewegt wird. Mit  $\tau$  benennt man die Zeit im Ruhesystem des Beobachters. Es gilt  $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ , also

$$d\tau^2 = dt^2(1 - \beta^2) = \frac{1}{c^2} \left[ (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right] = \frac{ds^2}{c^2}, \quad (16.4)$$

und damit ist die Eigenzeit *invariant* unter Lorentztransformation, genau wie das Lorentz-invariante Linienelement  $ds$ . Man hat also eine Zeit, die zur Definition eines Geschwindigkeitsbegriffes geeignet ist. Somit definiert man die *Vierergeschwindigkeit*  $\mathbf{u}^\mu$  als

$$\boxed{\mathbf{u}^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}}, \quad \mathbf{u}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(c, \vec{v}),$$

also

$$u^0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^1 = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v_x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{etc.} \quad (16.5)$$

Es ist dann

$$u_\mu u^\mu = \frac{1}{1-\beta^2} [c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2] = \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = c^2. \quad (16.6)$$

### Die Viererbeschleunigung

Analog zur Vierergeschwindigkeit definiert man die *Viererbeschleunigung*

$$\mathbf{b}^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}.$$

Zwischen Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung besteht ein besonderer Zusammenhang. Es ist nämlich nach Gl. (16.6)

$$0 = \frac{d}{d\tau} \underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2} = \frac{du_\mu}{d\tau} u^\mu + u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau} u^\mu + u_\mu b^\mu = 2u_\mu b^\mu,$$

also  $\mathbf{b} \perp \mathbf{u}$  bezüglich der Minkowski-Metrik. Ein Teilchen bewege sich nun entlang der x-Richtung. Dann ist

$$\frac{u^0}{u^1} = \frac{c}{v_x} = \frac{cdt}{dx},$$

was bedeutet, dass der Vektor der Vierergeschwindigkeit immer *tangential* an der Weltlinie (der Kurve im  $\mathbb{R}^4$ , die jede Ebene  $x^0 = \text{konst}$  nur einmal schneidet) liegt und damit *zeitartig* ist. Hingegen ist im Ruhesystem des Teilchens

$$b^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

also ist  $\mathbf{b}^\mu$  ein *raumartiger Vektor*.

## 16.2 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts

Im letzten Abschnitt wurde der Übergang zu den Koordinaten eines neuen Inertialsystems  $x'^\mu$  vollzogen. Wie findet man aber die  $x'^\mu$ , wenn man

die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme kennt? Die volle Darstellung der Transformationsmatrix  $L^\mu_\nu$  als Funktion von sechs Parametern (drei Rotationswinkeln, drei Relativgeschwindigkeiten) ist in Kap. 8 der "Theoretischen Mechanik" dargestellt; hier wiederholen wir nur einige Gesichtspunkte. Die allgemeinste lineare Transformation in ein anderes Koordinatensystem wird durch

$$\boxed{x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu}$$

vermittelt. Wir suchen die Bedingungen, denen  $L^\mu_\nu$  genügt. Wegen der Invarianz des Minkowski-Abstandes unter Lorentztransformation ist

$$s^2 = s'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma,$$

also

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma, \quad \boxed{g_{\rho\sigma} = (L^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} L^\nu_\sigma}. \quad (16.7)$$

Hier erkennt man deutlich die Ähnlichkeit zu orthogonalen Transformationen. Weiterhin gilt

$$\underbrace{\det g}_{=-1} = \underbrace{\det L^T}_{=\det L} \det g \det L \quad \Rightarrow \quad \det L = \pm 1.$$

Man nennt Transformationen mit

$$\det L = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche Lorentztransformation} \\ -1 & \text{uneigentliche Lorentztransformation.} \end{cases}$$

Wir untersuchen im folgenden zwei konkrete Beispiele für  $L^\mu_\nu$ .

### Rotationen

Man setzt  $L^0_0 = 1$ ,  $L^0_i = L^i_0 = 0$ :

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathbf{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Die Untermatrix  $\mathbf{R}$  beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen dreidimensionalen Unterraum. Wie gewohnt redet man bei

$$\left\{ \begin{array}{l} \det L = \det \mathbf{R} = 1 \\ \det L = -1 \end{array} \right\} \text{ von } \left\{ \begin{array}{l} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{array} \right\} \text{ Rotationen.}$$

## Boosts

Die speziellen Lorentztransformationen werden auch als Boost bezeichnet. Die durch  $L_{\nu}^{\mu}$  vermittelte Transformation soll in ein mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  z.B. in  $x$ -Richtung bewegtes Inertialsystem führen. Laut den Gleichungen der Lorentztransformation ist

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad (16.8)$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

was zu

$$L_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

führt. Was ein solcher Boost bedeutet, macht man sich wie folgt klar: Der Ursprung von  $\Sigma'$  (d.h. der Punkt mit  $x'^1 = 0$ ,  $x'^2 = 0$ ,  $x'^3 = 0$ ) hat im Inertialsystem  $\Sigma$  die Koordinaten

$$x^1 = \beta x^0 \equiv vt, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0,$$

d.h. die Lorentztransformation bildet auf ein mit Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in  $x^1$ -Richtung bewegtes Koordinatensystem  $\Sigma'$  ab.

Im Grenzwert  $c \rightarrow \infty$  gehen die speziellen Lorentztransformationen in Galileitransformationen über; z.B. für Gl. (16.8):

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

Für *kovariante* Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'_{\mu} = L_{\mu}^{\nu} x_{\nu}, \quad \text{mit} \quad L_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} L^{\rho}_{\lambda} g^{\lambda\nu},$$

was zu

$$L_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16.10)$$

führt. Drei Rotationen um und drei Boosts entlang der Raumachsen ergeben sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer Lorentztransformation. Man sieht das auch auf eine alternative Weise. Die 16 Transformationsgleichungen

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu$$

sind nicht alle unabhängig. Wegen der Symmetrie von  $g_{\mu\nu}$  hat man nur zehn unabhängige Gleichungen und damit sechs freie Parameter.

### Gruppeneigenschaften

Einige weitere Eigenschaften der Lorentztransformation sind die folgenden:

1.) Die Lorentztransformationen bilden eine Gruppe

Bei der Hintereinanderausführung zweier Lorentztransformationen ergibt sich wieder eine Lorentztransformation. Diese Gruppe ist aber *nicht kommutativ*, da es sich ja um Matrix-Multiplikationen handelt. Die nächsten beiden Eigenschaften sind Folgen dieser Gruppen-Eigenschaft.

2.) Die Identität ist eine Lorentztransformation

Das ist klar, da sich ein Boost für  $\beta = 0$  in die Identität verwandelt.

3.) Zu jeder Lorentztransformation existiert eine Inverse

Die Hintereinanderausführung einer Lorentztransformation und ihrer Inversen führt also zur Identität. Man kann die Inverse direkt angeben. Wie oben gezeigt, gilt

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu.$$

Damit ist

$$\delta^\lambda{}_\nu = g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \underbrace{g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^\sigma{}_\mu}_{=: L_\sigma{}^\lambda} L^\rho{}_\nu = L_\sigma{}^\lambda L^\sigma{}_\nu.$$

Die gesuchte (Inverse)<sup>T</sup> lautet also  $L_\sigma{}^\lambda = g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu$ .

### 16.3 Gaußsches cgs-System

Für die relativistische Formulierung ist es vorteilhaft, nicht das bisher verwendete SI-System für die elektromagnetischen Einheiten zu benutzen, son-

dern das Gaußsche cgs-System. Die Maxwell-Gleichungen haben im Gaußschen cgs-System (im Vakuum) die Form:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (16.11)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \qquad (16.12)$$

Die Lorentz-Kraft lautet im Gaußschen cgs-System:  $\mathbf{q} \left( \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \right)$ .

Aus den Potentialen  $\vec{A}$  und  $\phi$  gewinnt man die physikalischen Felder im cgs-System via

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \qquad (16.13)$$

die Lorenz-Eichung hat die Form

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \qquad (16.14)$$

## 16.4 Ströme, Dichten, Potentiale

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine extrem leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, dass sie unter Lorentztransformation forminvariant bleiben.

### 1.) Die Kontinuitätsgleichung

Die Viererdivergenz (16.3) legt einen Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung nahe. Setzt man

$$\mathbf{j}^\mu := (c\rho, \vec{j}),$$

für die *Viererstromdichte*, so wird die Kontinuitätsgleichung einfach zu

$$\boxed{\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0}, \qquad (16.15)$$

Da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant. Man unterscheide zwischen *Forminvarianz* unter Lorentztransformation (das ist das eigentliche Ziel der kovarianten Formulierung) und *Lorentz-Invarianten*, die ihren Wert unter Lorentztransformation beibehalten, so wie die linke Seite von Gl. (16.15). Hier ist das beides

aufgrund der skalaren Eigenschaft von  $\partial_\mu \mathbf{j}^\mu$  der Fall. Eine Lorentztransformation, z.B. ein Boost, mischt die Ladungs- und Stromdichten.

Diese Eigenschaft ist von nun an für *jede* physikalische Gleichung zu fordern. Die Frage ist hier speziell, ob  $\mathbf{j}^\mu$  wirklich ein Vierervektor ist. Dazu muss sich seine nullte Komponente  $c\rho$  als zeitartige Variable transformieren. Die im Volumenelement  $d^3\mathbf{x}$  eingeschlossene Ladung ist  $\rho d^3\mathbf{x}$ . Das Minkowski-Volumenelement  $d^4\mathbf{x}$  transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4\mathbf{x}' = \underbrace{\left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^4)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^4)} \right|}_{=|\det L|=1} d^4\mathbf{x} = d^4\mathbf{x},$$

also ist  $d^4\mathbf{x}$  eine Lorentz-Invariante. Dabei ist die Jakobideterminante

$$\left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^4)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^4)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{x^0} & \frac{\partial x'^1}{x^0} & \frac{\partial x'^2}{x^0} & \frac{\partial x'^3}{x^0} \\ \frac{\partial x'^0}{x^1} & \frac{\partial x'^1}{x^1} & \frac{\partial x'^2}{x^1} & \frac{\partial x'^3}{x^1} \\ \frac{\partial x'^0}{x^2} & \frac{\partial x'^1}{x^2} & \frac{\partial x'^2}{x^2} & \frac{\partial x'^3}{x^2} \\ \frac{\partial x'^0}{x^3} & \frac{\partial x'^1}{x^3} & \frac{\partial x'^2}{x^3} & \frac{\partial x'^3}{x^3} \end{vmatrix}$$

gerade die Determinante der Transformationmatrix  $L$  der Lorentztransformation.

Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho' d^3\mathbf{x}' = \rho d^3\mathbf{x}. \quad (16.16)$$

Damit ist gezeigt, dass  $\rho$  eine zeitartige Variable ist: Sie transformiert sich wie  $dx^0$ .

## 2.) Die Lorenz-Eichung

Die Lorenz-Eichbedingung lautet

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0.$$

Mit der Definition des *Viererpotentials*

$$A^\mu := \left( \phi, \vec{A} \right) \quad (16.17)$$

wird dies zu

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (16.18)$$

Auch das ist als Skalar wieder invariant unter Lorentztransformation. Das gilt offensichtlich nicht für die Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ .

### 3.) Vektor- und Skalarpotential in Lorenz-Eichung

Die Feldgleichungen für die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$  können nun kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}. \quad (16.19)$$

### 4.) Die $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder

Mit  $\partial^\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$  ergibt sich beispielsweise für die x-Komponenten

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \quad (16.20)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \quad (16.21)$$

## 16.5 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie

Wir definieren zunächst den antisymmetrischen *Feldstärketensor* (auch Feldtensor)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.22)$$

Seine kovariante Form erhält man durch

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\lambda} g_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.23)$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten *dualen* Feldstärketensor  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  über

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.24)$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (16.25)$$

Man sieht, dass man von  $F^{\mu\nu}$  direkt nach  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  gelangt, wenn man  $\vec{B}$  für  $\vec{E}$  und  $-\vec{E}$  für  $\vec{B}$  einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden. Wir trennen in inhomogene und homogene Gleichungen.

### 1.) Die inhomogenen Gleichungen

Sie lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}, \quad (16.26)$$

und diese Formulierung ist, wie man leicht zeigen kann, *Lorentz-invariant*. Also gilt in jedem anderen Inertialsystem  $K'$  die Gleichung

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu .$$

### 2.) Die homogenen Gleichungen

Sie haben die Form

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0}, \quad (16.27)$$

wobei  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  hier der duale Feldstärketensor ist. Wie sich zeigen lässt, kann man die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors  $F^{\mu\nu}$  schreiben:

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 . \quad (16.28)$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Definition (16.22)). Da aber die Null auf der rechten Seite ganz automatisch allein durch die Definition von  $F^{\mu\nu}$  herauskommt, sind die homogenen Gleichungen ohne jede weitere Annahme automatisch erfüllt!

Mit anderen Worten: Schreibt man Gl. (16.22) hin, so sind die homogenen Gleichungen bereits impliziert und damit *trivial!*

Beispielsweise bekommt man dann für  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$  und  $\lambda = 2$  die z-Komponente der Induktionsgleichung wieder:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x = - \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \nabla \times \vec{E} \right]_z = 0.$$

Für  $\mu = 1$ ,  $\nu = 2$ , und  $\lambda = 3$  ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

## 16.6 Transformation der Felder

Wenn man schon die Elektrodynamik kovariant formuliert, dann stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu_\lambda L^\nu_\rho F^{\lambda\rho}.$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  entlang der x-Richtung. Die zwischen  $K$  und  $K'$  vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (16.9) und bewirkt, dass im gestrichenen System die Felder folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= (E_y - \beta B_z) / \sqrt{1 - \beta^2}, & B'_y &= (B_y + \beta E_z) / \sqrt{1 - \beta^2} \\ E'_z &= (E_z + \beta B_y) / \sqrt{1 - \beta^2}, & B'_z &= (B_z - \beta E_y) / \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (16.29)$$

Spätestens hier wird klar, dass elektrisches und magnetisches Feld untrennbar verknüpft sind. Der Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$ , nicht die getrennten Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. Die korrekte Verallgemeinerung von Gl. (16.29) für allgemeine Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  lautet

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \gamma \vec{B} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \frac{\gamma}{c} (\vec{v} \times \vec{E}) \\ \vec{E}' &= \gamma \vec{E} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \frac{\gamma}{c} (\vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

mit

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Zu beachten ist, dass zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In  $K'$  müssen also die Felder als  $\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{x}', t')$  und  $\vec{B}' = \vec{B}'(\vec{x}', t')$  ausgedrückt werden. In den Formeln (16.29) wird diese Tatsache noch nicht berücksichtigt. Die obigen Formeln machen deutlich, dass beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich elektrische Feldkomponenten auf! Das darf aber nicht zu der Annahme verführen, die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_l = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

erwache rein aus der Transformation des Magnetfeldes in das Bezugssystem eines bewegten Teilchens. Wie man sich mit Hilfe von Gl. (16.29) leicht überzeugt, gilt diese Aussage nur in niedrigster Ordnung in  $v/c$ .