Teil IV

Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

9. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

9.1 Homogene Wellengleichungen

Im Vakuum ($\rho = 0; \vec{j} = 0$) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{9.1}$$

Zur *Entkopplung* von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \\ = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

wobei wir drei der vier homogenen Maxwellgleichungen (9.1) verwendet haben. Das Resultat ist eine homogene Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0 \; ; \qquad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0. \tag{9.3}$$

Analog verfährt man mit dem $\vec{E}$-Feld:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \; = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \\ = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Mit der Abkürzung

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{9.5}$$

für den *d'Alembert-Operator* $\Box$ erhält man dann anstelle von (9.1)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Box \vec{B} = 0; & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \Box \vec{E} = 0; & \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array}} \tag{9.6}$$

Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kapitel 7:

$$\Box \vec{A} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{9.7}$$

$$\Phi = 0 \tag{9.8}$$

in der Coulomb-Eichung.
Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\Box f(\vec{x}, t) = 0 \tag{9.9}$$

zu lösen, wobei f für irgendeine Komponente von $\vec{E}, \vec{B}$ oder $\vec{A}$ steht. Die Lösungen für $\vec{E}, \vec{B}$ und $\vec{A}$ sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, dass die Divergenz verschwindet (Transversalitätsbedingung).

9.2 Ebene Wellen

Ebene Wellen in z-Richtung

Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nur in einer Raumrichtung, z.B. in z-Richtung, variieren, d.h. $f = f(z, t)$. Dann lautet die Wellengleichung (9.9)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(z, t) = 0\,. \tag{9.10}$$

Wir suchen Lösungen dieser Gleichung, indem wir die Substitution

$$\xi = z - ct \qquad \eta = z + ct$$

vornehmen, d.h.

$$z = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \qquad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)\,.$$

Damit lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \curvearrowright \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Wellengleichung also als

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0$$

schreiben. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f = f_+(\xi) + f_-(\eta)$$

und nach Rücktransformation auf die alten Variablen z und t

$$f(z, t) = f_+(z - ct) + f_-(z + ct)$$

worin f_+ und f_- beliebige, zweimal differenzierbare Funktionen sind. Die Lösung $f(z, t) = f_+(z - ct)$ bedeutet, dass ein beliebiger, zur Zeit $t = 0$ vorgegebener Funktionsverlauf $f_+(\xi)$ sich mit Geschwindigkeit c in positiver z-Richtung verschiebt (oder bei $f_-(z + ct)$ in negativer z-Richtung). Wegen der Linearität der Wellengleichung lassen sich die Lösungen überlagern. Das Argument $z \mp ct$ heißt die Phase der Lösung der Wellengleichung. Den Punkten z gleicher Phase sind dieselben Werte der Funktion $f_+(z - ct)$ (oder $f_-(z + ct)$), d.h. dieselben physikalischen Feldzustände, zugeordnet. Die Punkte gleicher Phase liegen auf den Ebenen $z = \pm ct$, die senkrecht auf dem Basisvektor $\vec{e}_z$ stehen und sich mit Geschwindigkeit $\pm c$ in Richtung $\vec{e}_z$ bewegen. Solche Lösungen der Wellengleichung heißen ebene Wellen. Beispiel:

$$f_\pm(z \mp ct) = \frac{f_0}{b} \exp\left[-\frac{(z \mp ct)^2}{2b^2}\right], \quad f_0 = \text{const}\,.$$

Das ist eine Welle in Form einer Gaußkurve der Breite b.

Allgemeine ebene Wellen

Die ebenen Wellen, die sich in z-Richtung bewegen, lassen sich leicht zu dem allgemeinen wichtigen Lösungstyp von (9.9) verallgemeinern:

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{x} \mp ct) \tag{9.11}$$

für beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktionen f und dem Einheitsvektor $\vec{n}$ in einer beliebigen Raumrichtung, mit $|\vec{n}| = 1$. Um zu zeigen, dass Gl. (9.11) eine Lösung der Wellengleichung ist, verwenden wir die Abkürzung

$$\xi = \vec{n} \cdot \vec{x} \mp ct \tag{9.12}$$

und bilden:

$$(\nabla f)_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \xi} n_\alpha \curvearrowright \nabla f = \vec{n}\,\frac{df}{d\xi}; \qquad \Delta f = \vec{n}^2\,\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\mp c) \curvearrowright \mp\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \tag{9.13}$$

und somit

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,. \tag{9.14}$$

Damit ist

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, f(\vec{x}, t) \tag{9.15}$$

Lösung von Gl. (9.3); analog für $\vec{E}$ und $\vec{A}$.

Eigenschaften der Lösungen

i) Ebene Wellen

Funktionen vom Typ (9.11) beschreiben ebene Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte $\vec{x}$, in denen $f(\vec{x}, t)$ zu einer festen Zeit t den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebene (Hesse'sche Normalform)

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const}\ , \tag{9.16}$$

die senkrecht zu $\vec{n}$ steht. Je nach Wahl des Vorzeichens in (9.11) erhält man Wellen, die in $\pm\vec{n}$-Richtung laufen.

ii) Transversalität der elektromagnetischen Wellen

Aus $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ folgt mit Gl. (9.15) $\vec{B} = \vec{B}_0\, f(\vec{x}, t)$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = B_{01}\frac{\partial f}{\partial \xi} n_1 + B_{02}\frac{\partial f}{\partial \xi} n_2 + B_{03}\frac{\partial f}{\partial \xi} n_3\,,$$

also

$$\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{n}\right)\frac{df}{d\xi} = 0\ , \tag{9.17}$$

d.h. da $\partial f/\partial\xi$ im allgemeinen nicht null ist,

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0\ ; \tag{9.18}$$

Entsprechende Orthogonalität zur Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ der Welle findet man für $\vec{E}$ und $\vec{A}$, wenn man $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (im Vakuum) und $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (wegen der Coulombeichung) berücksichtigt.

iii) Orthogonalität von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

Aus dem Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9.19}$$

folgt für die ebenen Wellenlösungen

$$\vec{E} = \vec{E}_0\ f(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct); \qquad \vec{B} = \vec{B}_0\ g(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) \tag{9.20}$$

wegen

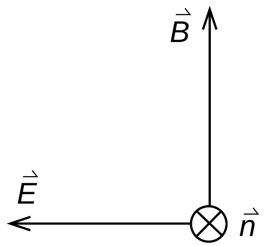
$$\left(\nabla \times \vec{E}\right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta E_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{0\gamma}\frac{\partial f}{\partial \xi} n_\beta = \left(\vec{n} \times \vec{E}_0\right)_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

die Beziehung

$$\left(\vec{n} \times \vec{E}_0\right)\frac{df}{d\xi} = c\vec{B}_0\frac{dg}{d\xi}, \tag{9.21}$$

also $\vec{E} \perp \vec{B}$ mit Gl. (9.18). $\vec{E}, \vec{B}$ und $\vec{n}$ bilden also ein orthogonales Dreibein (siehe Fig. 9.1).

Abbildung 9.1: $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{n}$ bilden ein Rechtssystem.



Bemerkungen

1.) Außer ebenen Wellen sind z.B. auch Kugelwellen Lösungen von Gl. (9.9); sie haben die Form:

$$\frac{f(r-ct)}{r}, \tag{9.22}$$

wobei f eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist. Der Beweis verläuft analog zu (9.13) in Kugelkoordinaten.

2.) Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen, γ-Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit der Relation $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E}/\partial t$ im Vakuum, die entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie stellt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.29) dar.

9.3 Monochromatische ebene Wellen

Eine spezielle Form der ebenen Welle ist die Wahl

$$f(\xi) = \exp\left(i\frac{\omega}{c}\xi\right)$$

mit der man z.B. die elektrische Feldstärke in der Form

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)) \tag{9.23}$$

erhält. Dabei ist

$$\vec{k} = k\vec{n}, \tag{9.24}$$

und ω und $\vec{k}$ hängen über die *Dispersionsrelation*

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \tag{9.25}$$

zusammen, wie man durch Einsetzen von Gl. (9.23) in die Wellengleichung (9.6) sofort sieht. Eine ebene Welle vom Typ (9.23) nennt man *monochromatisch*, da sie nur eine (Kreis-)Frequenz ω enthält. Entsprechende Lösungen findet man für $\vec{A}$ und $\vec{B}$.

Komplexe versus reelle Felder

$\vec{E}, \vec{A}$ und $\vec{B}$ sind als Messgrößen reelle Vektorfelder. Die komplexe Schreibweise in Gleichung (9.23) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, dass das physikalische Vektorfeld durch den Realteil von (9.23) beschrieben wird.

Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.
Bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte treten Produkte von Vektorfeldern auf. Bei diesen Problemen muss man von Anfang an reell rechnen. Zeitliche Mittelwerte $\langle \dots \rangle$ solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \vec{a}_0(\vec{x})\exp(-i\omega t); \qquad \vec{b}(\vec{x},t) = \vec{b}_0(\vec{x})\exp(-i\omega t) \tag{9.26}$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\langle (\mathrm{Re}\vec{a})\cdot(\mathrm{Re}\vec{b})\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{a}\cdot\vec{b}^*) , \tag{9.27}$$

denn in

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\vec{a})\cdot(\mathrm{Re}\vec{b}) &= \frac{1}{4}\big(\vec{a}_0\exp(-i\omega t) + \vec{a}_0^*\exp(i\omega t)\big)\big(\vec{b}_0\exp(-i\omega t) + \vec{b}_0^*\exp(i\omega t)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\vec{a}_0\vec{b}_0^* + \vec{a}_0^*\vec{b}_0 + \vec{a}_0\vec{b}_0\exp(-2i\omega t) + \vec{a}_0^*\vec{b}_0^*\exp(2i\omega t)\big)\end{aligned} \tag{9.28}$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren $\exp(\pm 2i\omega t)$ nach Zeitmittelung und es bleibt

$$\langle (\mathrm{Re}\vec{a})\cdot(\mathrm{Re}\vec{b})\rangle = \frac{1}{4}(\vec{a}\cdot\vec{b}^* + \vec{a}^*\cdot\vec{b}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{a}\cdot\vec{b}^*) . \tag{9.29}$$

Terminologie

Wellenvektor	$\vec{k}$	
Wellenzahl	k	$k = \lvert\vec{k}\rvert$
Kreisfrequenz	ω	$\omega = c\,k$
Frequenz	ν	$\nu = \omega/(2\pi)$
Wellenlänge	λ	$\lambda = (2\pi)/k = c/\nu$
Schwingungsdauer	T	$T = (2\pi)/\omega = 1/\nu$

Anhand von Gl. (9.23) sieht man, dass T die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort $\vec{x}$ beschreibt,

$$\exp(i\omega(t+T)) = \exp(i\omega t + 2\pi i) = \exp(i\omega t); \tag{9.30}$$

analog gibt die Wellenlänge λ die räumliche Periodizität an:

$$\exp(ik(z+\lambda)) = \exp(ikz + 2\pi i) = \exp(ikz) \tag{9.31}$$

für eine Welle in z-Richtung zu fester Zeit t.

Phasengeschwindigkeit

Die Größe

$$\phi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t \tag{9.32}$$

nennt man die *Phase* der Welle. Unter der Phasengeschwindigkeit v_{ph} versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um v_{ph} zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in z-Richtung und bilden das totale Differential von $\phi(z,t)$:

$$d\phi = k dz - \omega dt. \tag{9.33}$$

Für $\phi = \text{const.}$ folgt dann:

$$v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c; \tag{9.34}$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit c.

Energiedichte

Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu irgendwelchen *Hindernissen* (z.B. Spalte), durch die sie *gestört* werden kann.
Für monochromatische ebene Wellen gehen die Beziehungen

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}; \quad \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{9.35}$$

(wegen der Coulombeichung ist $\Phi = 0$) wegen

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{0\gamma}ik_\beta e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}\mp i\omega t} = i\left(\vec{k}\times\vec{A}\right)_\alpha$$

in der komplexen Darstellung über in

$$\vec{B} = i(\vec{k}\times\vec{A}); \quad \vec{E} = i\omega\vec{A}. \tag{9.36}$$

Mit Gl. (9.36) und (9.27) lassen sich Energie und Impuls der Welle leicht ausrechnen. Der zeitliche Mittelwert der Energiedichte (reelle Darstellung) ist:

$$\langle\omega_F\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \omega_F \, dt\,, \tag{9.37}$$

wobei die Energiedichte ω_F (mit $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$) durch

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right) \tag{9.38}$$

gegeben ist. Mit $\vec{A}\cdot\vec{k} = 0$, d.h. $\vec{A}\perp\vec{k}$, finden wir:

$$\begin{aligned}\langle\omega_F\rangle &= \frac{\epsilon_0}{2}\left(\langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle + c^2\langle\vec{B}\cdot\vec{B}\rangle\right)\\ &= \frac{\epsilon_0}{4}\mathrm{Re}(\omega^2\vec{A}\cdot\vec{A}^* + \underbrace{c^2k^2}_{=\omega^2}\vec{A}\cdot\vec{A}^*) = \frac{\epsilon_0}{2}\omega^2|\vec{A}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}_0|^2\,.\end{aligned} \tag{9.39}$$

Energiestromdichte

Entsprechend zu Gl. (9.39) gilt (mit $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$) für die Energiestromdichte (8.14)

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle = \frac{\omega}{2\mu_0}|\vec{A}_0|^2\,\vec{k} = \frac{\omega\vec{k}}{2\mu_0}\frac{|\vec{E}_0|^2}{\omega^2} = \frac{\vec{k}}{2\mu_0}\frac{|\vec{E}_0|^2}{ck} = \frac{\epsilon_0 c}{2}|\vec{E}_0|^2\,\vec{n} \tag{9.40}$$

und direkt über Gl. (8.33) für die Impulsdichte

$$\langle\vec{\pi}_F\rangle = \frac{\epsilon_0}{2c}|\vec{E}_0|^2\,\vec{n} = \frac{1}{c^2}\langle\vec{S}\rangle\,. \tag{9.41}$$

Vergleicht man Gl. (9.39) mit (9.40), so findet man

$$|\langle\vec{S}\rangle| = c\,\langle\omega_F\rangle; \qquad c\,|\langle\vec{\pi}_F\rangle| = \langle\omega_F\rangle\,.$$

Die Gleichung linker Hand zeigt, dass Energie des elektromagnetischen Feldes mit der Geschwindigkeit c transportiert wird, da es sich bei $\vec{S}$ um eine Energiestromdichte handelt, also dem Produkt einer Dichte und der Geschwindigkeit einer strömenden „Substanz“. Die Gleichung rechter Hand weist aufgrund der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c_2}, \qquad \left(E = cp\right)_{m_0=0}$$

auf Ruhemassen-lose Teilchen (Photonen) hin.

9.4 Polarisation

Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.23) beschreiben durch:

$$\vec{E} = \vec{e}_1 E_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)); \qquad \vec{B} = \vec{e}_2 B_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)) \quad (9.42)$$

mit

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}; \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{k} = 0. \quad (9.43)$$

Eine solche Welle nennt man linear polarisiert. Eine zu (9.42) *gleichberechtigte*, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor $\vec{k}$ erhält man, indem man $\vec{E}$ in $\vec{e}_2$-Richtung und $\vec{B}$ in $\vec{e}_1$-Richtung wählt. Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich dann nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \left(\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2\right) \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) \quad (9.44)$$

mit E_l ($l = 1{,}2$) als beliebigen komplexen Zahlen $E_l = |E_l| \exp(i\phi_l)$. Das reelle physikalische Feld ist dann

$$E_x = |E_1| \cos\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1\right) \qquad E_y = |E_2| \cos\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_2\right) \quad (9.45)$$

Gleichung (9.44) bzw. (9.45) beschreibt alle möglichen Polarisationszustände, die nach der relativen Phase $\phi_1 - \phi_2$ und den Beträgen $|E_1|$ und $|E_2|$ unterschieden werden können. Außerdem lässt sich Gleichung (9.44) als Überlagerung zweier linearer polarisierter Wellen auffassen; das zeigt, dass sich jede beliebig polarisierte Welle als Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen auffassen lässt.

1.) Lineare Polarisation liegt vor, wenn

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \pm\pi. \quad (9.46)$$

Das Feld ist dann

$$\vec{E} = \left(|E_1|\vec{e}_1 + |E_2|\vec{e}_2\right) \cos\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1\right), \quad (9.47)$$

mit einem orts- und zeitunabhängigen Koeffizienten; $\vec{E}$ schwingt in einer festen Richtung relativ zur Ausbreitungsrichtung. Richtung und Betrag von $\vec{E}$ sind gegeben durch (siehe Fig. 9.2)

$$\vartheta = \arctan\left(\pm\frac{|E_2|}{|E_1|}\right); \quad E = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2} \quad (9.48)$$

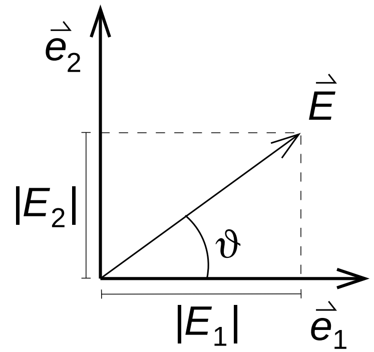


Abbildung 9.2: Richtung des elektrischen Feldes bei linearer Polarisation.

2.) Zirkulare Polarisation:

$$|E_1| = |E_2| = E_0; \quad \phi_1 - \phi_2 = \pm\frac{\pi}{2}; \quad (9.49)$$

dann wird nämlich

$$\vec{E} = E_0\left(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2\right) \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \phi_1)\right), \quad (9.50)$$

oder in reeller Darstellung

$$\vec{E} = E_0\left[\cos\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1\right)\vec{e}_1 \mp \sin\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \phi_1\right)\vec{e}_2\right]. \quad (9.51)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt für festgehaltenen Ort $\vec{x}$ die Parameterdarstellung des Einheitskreises dar. Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in Gl. (9.50) festgelegt; man erhält rechts- bzw. links-zirkulare Polarisation (vgl. Fig. 9.3).

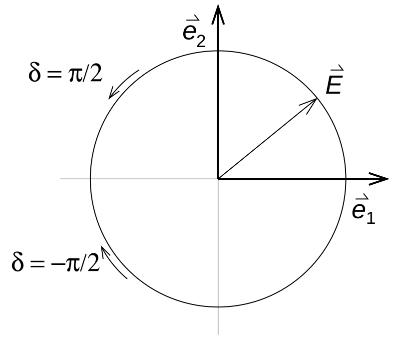


Abbildung 9.3: Drehsinn bei rechts- (links-) zirkularer Polarisation, Ausbreitungsrichtung aus der Papierebene heraus.

3.) Elliptische Polarisation tritt auf für

$$|\mathsf{E}_1| \neq |\mathsf{E}_2|; \quad \phi_1 - \phi_2 \neq 0. \tag{9.52}$$

$\vec{\mathsf{E}}$ beschreibt dann für festes $\vec{x}$ eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu $\vec{e}_1$ durch $\phi_1 - \phi_2$ und deren Hauptachsenverhältnis durch $|\mathsf{E}_1|/|\mathsf{E}_2|$ bestimmt ist.