

## 7. Die elektromagnetischen Potentiale

### 7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Statt die gekoppelten Differentialgleichungen (6.30) - (6.33), die Maxwell'schen Gleichungen, für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  direkt zu lösen, ist es meist bequemer - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.

Da generell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.1)$$

gilt, können wir ein Vektorpotential  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  über die Beziehung

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.2)$$

einführen. Für  $\dot{\vec{B}}$  finden wir damit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dann schreibt sich das Induktionsgesetz (6.31)  $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$  als

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (7.3)$$

d.h. die Vektorfunktion  $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$  ist wirbelfrei, und lässt sich als Gradient einer skalaren Funktion  $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$  darstellen:

$$\left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \Phi, \quad (7.4)$$

oder

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (7.5)$$

Damit sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das skalare Potential  $\Phi$  zurückgeführt.

### Gleichungen für $\vec{A}$ und $\Phi$

Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen  $\vec{A}$  und  $\Phi$  berechnet werden können, wenn  $\rho$  und  $\vec{j}$  vorgegeben sind. Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.32) und (6.33). Aus dem Gauß'schen Gesetz (6.32) folgt mit  $\vec{E}$  aus Gl. (7.5):

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot \nabla \Phi$$

und damit

$$\Delta \Phi + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

Indem man den Term  $-\mu_0 \epsilon_0 \ddot{\Phi}$  beidseitig ergänzt, kann man diese Gleichung auch schreiben als

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (7.7)$$

Weiterhin folgt aus dem Ampère-Maxwellschen Gesetz (6.33) mit den Beziehungen (7.2) und (7.5)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

und damit

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}. \quad (7.8)$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = -\Delta \vec{a} + \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) \quad (7.9)$$

geht (7.8) über in:

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (7.10)$$

Damit haben wir die acht Maxwell-Gleichungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  überführt in vier Gleichungen (7.6) oder (7.7) und (7.10) für die Potentiale  $\vec{A}$  und  $\Phi$ , die jedoch untereinander gekoppelt sind. Diese Kopplung werden wir durch geeignete Eichtransformationen beseitigen können.

### Eichinvarianz

Zur Entkopplung von Gl. (7.6) und (7.10) machen wir davon Gebrauch, dass die Maxwell-Gleichungen unter den Eichtransformationen

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\chi, \quad (7.11)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (7.12)$$

invariant sind. Hierbei ist  $\chi(\vec{x}, t)$  eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion. Diese Behauptung weisen wir nach, indem wir zeigen, dass die Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \quad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi$$

unter den Transformationen invariant sind:

$$\nabla \cdot \vec{B} \equiv \nabla \cdot [\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi)] = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) + \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla\chi)}_{=0}$$

$$= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} \equiv \nabla \cdot (-\dot{\vec{A}} - \nabla\chi - \nabla\Phi + \nabla\dot{\chi}) = \nabla \cdot (-\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi) = \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \equiv \nabla \times [\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi)] - \mu_0 \epsilon_0 (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\dot{\Phi} + \nabla\dot{\chi})$$

$$= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \mu_0 \epsilon_0 (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\Phi}) = \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} \equiv \nabla \times (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\dot{\Phi} + \nabla\dot{\chi}) + \nabla \times (\dot{\vec{A}} + \nabla\dot{\chi})$$

$$= \nabla \times (-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\Phi}) + \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}}$$

### 7.2 Lorenz-Eichung

Die Gleichungen (7.7) und (7.10) legen es nahe,  $\chi$  so zu wählen, dass

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad (7.13)$$

was der *Lorentz-Konvention* entspricht. Man erhält dann aus Gl. (7.10) und (7.7) entkoppelte Gleichungen:

$$\Delta\vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (7.14)$$

$$\Delta\Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.15)$$

die jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.40) und (5.25) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorenz-Eichung (7.13) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  benutzt, da diese Eichung Lorenz-invariant (invariant unter Lorentztransformationen) ist.

### Konstruktion von $\chi$

Falls

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0 \quad (7.16)$$

wäre, so führen wir eine Eichtransformation durch und fordern:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta\chi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (7.17)$$

d.h.  $\Delta\chi$  und  $\ddot{\chi}$  sollen die unerwünschten Terme kompensieren. Gleichung (7.17) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\Delta\chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = f(\vec{x}, t). \quad (7.18)$$

Bei gegebener Inhomogenität

$$f(\vec{x}, t) = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (7.19)$$

ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.18) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.20)$$

addiert werden kann, d.h. Gl. (7.18) legt  $\chi(\vec{x}, t)$  nur bis auf Lösungen der homogenen Wellengleichung (7.20) fest.

### 7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird  $\chi$  meist so gewählt, dass

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (7.21)$$

Dann geht (7.6) über in

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.22)$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}; \quad (7.23)$$

aus (7.10) wird

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi \epsilon_0} \nabla \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\frac{\partial \rho(\vec{x}', t)}{\partial t} (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{(\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)) (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung  $-\dot{\rho} = \nabla \cdot \vec{j}$  verwendet haben. Diese Eichung ist nicht Lorentz-invariant, d.h. Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen eichen anders.

### Elektromagnetische Wellen

In quellenfreien Gebieten mit

$$\rho = 0; \quad \vec{j} = 0 \quad (7.25)$$

reduzieren sich (7.23) und (7.24) dann auf:

$$\Phi = 0; \quad \Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.26)$$

Die Lösungen von (7.26) sind elektromagnetische Wellen, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Kap. IV).

### Konstruktion von $\chi$

Erfüllt die Lösung  $\vec{A}$  von (7.10) nicht die Eichbedingung (7.21), so führen wir die Transformation (7.11), (7.12) durch und fordern

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta \chi = 0, \quad (7.27)$$

oder

$$\Delta \chi = -\nabla \cdot \vec{A}. \quad (7.28)$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.18) mit  $-\nabla \cdot \vec{A}$  als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von  $\chi$ : Zu jeder Lösung von (7.28) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung (Laplacegleichung)

$$\Delta \chi = 0 \quad (7.29)$$

addieren.