7. Die elektromagnetischen Potentiale

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Statt die gekoppelten Differentialgleichungen (6.30) - (6.33), die Maxwellschen Gleichungen, für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ direkt zu lösen, ist es meist bequemer - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.
Da generell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{7.1}$$

gilt, können wir ein Vektorpotential $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$ über die Beziehung

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7.2}$$

einführen. Für $\dot{\vec{B}}$ finden wir damit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dann schreibt sich das Induktionsgesetz (6.31) $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ als

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0\,, \tag{7.3}$$

d.h. die Vektorfunktion $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ ist wirbelfrei, und lässt sich als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$ darstellen:

$$\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \Phi, \tag{7.4}$$

oder

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \tag{7.5}$$

Damit sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential Φ zurückgeführt.

Gleichungen für $\vec{A}$ und Φ

Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen $\vec{A}$ und Φ berechnet werden können, wenn ρ und $\vec{j}$ vorgegeben sind. Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.32) und (6.33). Aus dem Gaußschen Gesetz (6.32) folgt mit $\vec{E}$ aus Gl. (7.5):

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \nabla \cdot \nabla\Phi$$

und damit

$$\boxed{\Delta\Phi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{7.6}$$

Indem man den Term $-\mu_0\epsilon_0\ddot{\Phi}$ beidseitig ergänzt, kann man diese Gleichung auch schreiben als

$$\Delta\Phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{7.7}$$

Weiterhin folgt aus dem Ampère-Maxwellschen Gesetz (6.33) mit den Beziehungen (7.2) und (7.5)

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

und damit

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{j}. \tag{7.8}$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = -\Delta\vec{a} + \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) \tag{7.9}$$

geht (7.8) über in:

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)} \tag{7.10}$$

Damit haben wir die acht Maxwell-Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ überführt in vier Gleichungen (7.6) oder (7.7) und (7.10) für die Potentiale $\vec{A}$ und Φ, die jedoch untereinander gekoppelt sind. Diese Kopplung werden wir durch geeignete Eichtransformationen beseitigen können.

Eichinvarianz

Zur Entkopplung von Gl. (7.6) und (7.10) machen wir davon Gebrauch, dass die Maxwell-Gleichungen under den Eichtransformationen

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi, \tag{7.11}$$

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{7.12}$$

invariant sind. Hierbei ist $\chi(\vec{x}, t)$ eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion. Diese Behauptung weisen wir nach, indem wir zeigen, dass die Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\dot{\vec{E}} = \mu_0\vec{j} \qquad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi$$

unter den Transformationen invariant sind:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \tilde{\vec{B}} &\equiv \nabla \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{A} + \nabla\chi\right)\right] = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) + \nabla \cdot \big(\underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{=0}\big) \\
&= \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \cdot \vec{B} \\
\nabla \cdot \tilde{\vec{E}} &\equiv \nabla \cdot \left(-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\Phi + \nabla\dot{\chi}\right) = \nabla \cdot \left(-\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi\right) = \nabla \cdot \vec{E} \\
\nabla \times \tilde{\vec{B}} - \mu_0\epsilon_0\dot{\tilde{\vec{E}}} &\equiv \nabla \times \left[\nabla \times \left(\vec{A} + \nabla\chi\right)\right] - \mu_0\epsilon_0\left(-\ddot{\vec{A}} - \nabla\ddot{\chi} - \nabla\dot{\Phi} + \nabla\ddot{\chi}\right) \\
&= \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \mu_0\epsilon_0\left(-\ddot{\vec{A}} - \nabla\dot{\Phi}\right) = \nabla \times \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\dot{\vec{E}} \\
\nabla \times \tilde{\vec{E}} + \dot{\tilde{\vec{B}}} &\equiv \nabla \times \left(-\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\chi} - \nabla\Phi + \nabla\dot{\chi}\right) + \nabla \times \left(\dot{\vec{A}} + \nabla\dot{\chi}\right) \\
&= \nabla \times \left(-\dot{\vec{A}} - \nabla\Phi\right) + \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}}
\end{aligned}$$

7.2 Lorenz-Eichung

Die Gleichungen (7.7) und (7.10) legen es nahe, χ so zu wählen, dass

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \tag{7.13}$$

was der *Lorentz-Konvention* entspricht. Man erhält dann aus Gl. (7.10) und (7.7) entkoppelte Gleichungen:

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}. \tag{7.14}$$

$$\Delta\Phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.15}$$

die jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.40) und (5.25) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorenz-Eichung (7.13) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von $\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$ benutzt, da diese Eichung Lorentz-invariant (invariant unter Lorentztransformationen) ist.

Konstruktion von χ

Falls

$$\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0 \tag{7.16}$$

wäre, so führen wir eine Eichtransformation durch und fordern:

$$\nabla\cdot\vec{A} + \Delta\chi + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{7.17}$$

d.h. $\Delta\chi$ und $\ddot{\chi}$ sollen die unerwünschten Terme kompensieren. Gleichung (7.17) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\Delta\chi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = f(\vec{x},t). \tag{7.18}$$

Bei gegebener Inhomogenität

$$f(\vec{x},t) = -\nabla\cdot\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{7.19}$$

ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.18) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\chi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.20}$$

addiert werden kann, d.h. Gl. (7.18) legt $\chi(\vec{x},t)$ nur bis auf Lösungen der homogenen Wellengleichung (7.20) fest.

7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird χ meist so gewählt, dass

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \tag{7.21}$$

Dann geht (7.6) über in

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.22}$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\,; \tag{7.23}$$

aus (7.10) wird

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \epsilon_0\mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \\
&= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
&= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \, \frac{\frac{\partial\rho(\vec{x}', t)}{\partial t} (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\
&= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{\left(\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)\right)(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\,,
\end{aligned} \tag{7.24}$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung $-\dot{\rho} = \nabla \cdot \vec{j}$ verwendet haben. Diese Eichung ist nicht Lorentz-invariant, d.h. Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen eichen anders.

Elektromagnetische Wellen

In quellenfreien Gebieten mit

$$\rho = 0; \quad \vec{j} = 0 \tag{7.25}$$

reduzieren sich (7.23) und (7.24) dann auf:

$$\Phi = 0; \quad \Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{7.26}$$

Die Lösungen von (7.26) sind elektromagnetische Wellen, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Kap. IV).

Konstruktion von χ

Erfüllt die Lösung $\vec{A}$ von (7.10) nicht die Eichbedingung (7.21), so führen wir die Transformation (7.11), (7.12) durch und fordern

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta\chi = 0, \tag{7.27}$$

oder

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \vec{A}. \tag{7.28}$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.18) mit $-\nabla \cdot \vec{A}$ als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von χ: Zu jeder Lösung von (7.28) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung (Laplacegleichung)

$$\Delta\chi = 0 \tag{7.29}$$

addieren.