Teil III

Grundlagen der Elektrodynamik

6. Die Maxwellschen Gleichungen

6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Im folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und für das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x}, t)$ für den Fall beliebiger Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho = \rho(\vec{x}, t); \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t) \tag{6.1}$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir in Erweiterung der Gleichungen (1.8) und (4.15):

$$(\textit{Lorentz} - \textit{Kraft}) \qquad \vec{K} = q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right] . \tag{6.2}$$

Wir hatten in der Magnetostatik den magnetischen Teil dieser Kraft $\vec{K} = q\vec{v} \times \vec{B}$ separat betrachtet. Da nun aber ρ und $\vec{j}$ durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{6.3}$$

verknüpft sind, ist klar, dass elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die *Maxwellschen Gleichungen* sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

6.2 Faradaysches Induktionsgesetz

Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Wenn sich der magnetische Fluss (Abschnitt 5.1) durch einen geschlossenen Leiterkreis $L = \partial F$ ändert, wird längs des Leiterkreises ein (die Ladungsträger beschleunigendes) elektrisches Feld induziert, das im Leiter einen Induktionsstrom sowie eine induzierte Spannung der Grösse

$$-k \frac{d}{dt} \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E}' \tag{6.4}$$

hervorruft, wobei $\int_F d\vec{f} \cdot \vec{B}$ der magnetische Fluss durch die Fläche F und $\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E}'$ die *elektromotorische Kraft* ist, die die Ladungsträger in der Leiterschleife bewegt (ihre Einheit ist Volt). Hierbei gilt:

i) F ist eine beliebige in den Leiterkreis ∂F eingespannte Fläche (siehe unten);

ii) $\vec{E}'$ ist die induzierte elektrische Feldstärke bezogen auf ein mit dem Leiter ∂F mitbewegtes Koordinatensystem Σ' ist;

iii) k ist eine vom Maßsystem abhängige Konstante ist, und zwar:

$$k = 1 \quad \text{im } \textit{SI}\text{-System}; \quad k = \frac{1}{c} \qquad \text{im Gaußschen } \textit{cgs}\text{-System}\,. \tag{6.5}$$

Gleichung (6.2) bezieht sich auf das SI-System und ist im cgs-System zu ersetzen durch

$$\vec{K} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right) = q\left(\vec{E} + (\vec{\beta} \times \vec{B})\right) \tag{6.6}$$

mit $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. Alle folgenden Formeln beziehen sich auf das SI-System.

iv) Das Vorzeichen in Gl. (6.4) spiegelt die *Lenzsche Regel* wider: Der induzierte Strom produziert ein Feld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss als entscheidende Größe des Induktionsgesetzes (6.4) lässt sich mit Hilfe des Vektorpotentials wie folgt

$$\int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{A}$$

ausdrücken, wenn man den Satz von Stokes anwendet. Die rechte Seite zeigt explizit, dass der Fluss nur vom Weg (Leiterschleife) ∂F abhängt, nicht jedoch von der speziellen Form der in ∂F eingespannten Fläche F.

Quellenfreiheit von $\vec{B}$

Aus **i)** folgt, dass auch für zeitabhängige Felder wie in der Magnetostatik die Quellenfreiheit

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \tag{6.7}$$

der magnetischen Induktion. Sind nämlich F_1 und F_2 irgendwelche in $\partial F = \partial F_1 = \partial F_2$ eingespannte Flächen, so folgt aus i):

$$\int_{F_1} d\vec{f}_1 \cdot \vec{B} = \int_{F_2} d\vec{f}_2 \cdot \vec{B} \,. \tag{6.8}$$

Unter Beachtung der Orientierung der Flächen ergibt das Gaußsche Gesetz für das durch F_1 und F_2 definierte Volumen:

$$0 = \oint_{F_1} d\vec{f}_1 \cdot \vec{B} - \oint_{F_2} d\vec{f}_2 \cdot \vec{B} = \int_V d^3x \, \nabla \cdot \vec{B} \,, \tag{6.9}$$

was Gl. (6.7) beweist. Die universelle Gültigkeit von $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ war schon aufgrund der in Abschnitt 5.1 gegebenen Interpretation (Nicht-Existenz von magnetischen Monopolen) zu erwarten.

6.3 Diskussion des Induktionsgesetzes

Die totale Zeitableitung auf der linken Seite von Gl. (6.4) kann auf zwei Arten beitragen:
1) explizite zeitliche Änderung der magnetischen Induktion $\vec{B}$.
2) Posititionsänderung des Leiterkreises ∂F.

Fall 1: Zeitlich veränderliches $\vec{B}$-Feld bei ruhendem Leiterkreis ∂F

Dann ist $\vec{E}' = \vec{E}$ die induzierte Feldstärke im Laborsystem Σ und es folgt nach der Formel von Stokes:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,, \tag{6.10}$$

Im letzten Schritt haben wir berücksichtigt, dass der Leiterkreis $\vec{F}$ ruht und daher die Zeitableitung nur auf $\vec{B}$ wirkt, sodass man sie mit dem Integral vertauschen kann. Da die Fläche F beliebig gewählt werden kann, können wir aus Gl. (6.10) folgern:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.} \tag{6.11}$$

Gleichung (6.11) zeigt zum ersten Mal die erwartete Verknüpfung der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und stellt eine Erweiterung der elektrostatischen Feldgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ für ein zeitabhängiges $\vec{B}$-Feld dar.

Bemerkung:

Gleichung (6.11) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, er dient nur zum Nachweis des induzierten Feldes!

Anwendung:

Betatron: In dem von einem zeitlich veränderlichen $\vec{B}$-Feld induzierten ringförmigen elektrischen Feld $\vec{E}$ werden geladene Teilchen (z.B. Elektronen) beschleunigt.

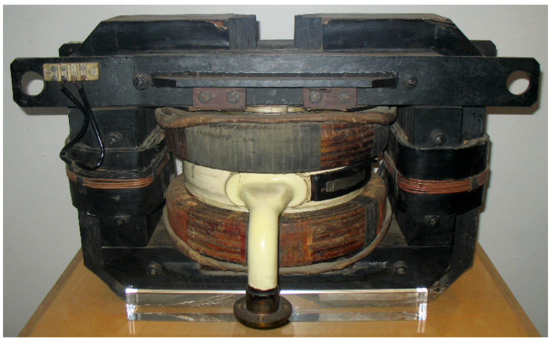

Abbildung 6.1: Historisches Betatron (6 MeV von 1942).
Quelle: wikipedia

Fall 2: Bewegter Leiterkreis S bei zeitlich konstantem $\vec{B}$-Feld

Wir betrachten (im Laborsystem) eine zeitunabhängige (aber räumlich variierende) magnetische Induktion $\vec{B}$ und bewegen eine Leiterschlife ∂F mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ durch dieses $\vec{B}$-Feld. Wir bezeichnen das Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht, als Σ' und ihre Koordinaten mit $\vec{x}'$. Dann gilt:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t$$

Nun betrachten wir eine Ladung q, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im $\vec{B}$-Feld bewegt. Im Laborsystem erfährt sie die Kraft

$$\vec{K} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{6.12}$$

Da sich Σ' mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zu Σ bewegt, erfährt die Ladung dieselbe Kraft $\vec{K}' = \vec{K}$ im Bezugssystem Σ' (keine Scheinkräfte). In Σ' ist ihre Geschwindigkeit jedoch nicht $\vec{v}$ sondern

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \,.$$

Wegen des klassischen Äquivalenzprinzips (Galileiinvarianz), d.h. des Prinzips, dass alle physikalischen Gesetze in beliebigen Inertialsystemen gleich lauten, muss $\vec{K}'$ dieselbe Gleichung erfüllen wie $\vec{K}$, d.h.

$$\vec{K}' = q\left(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'\right) = q\left(\vec{E}' - \vec{v}_0 \times \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{B}'\right) \tag{6.13}$$

Durch Vergleich mit Gl. (6.12) gilt daher, dass

$$\vec{B}'(\vec{x}') = \vec{B}(\vec{x}) \tag{6.14}$$

$$\vec{E}'(\vec{x}') = \vec{E}(\vec{x}) + \vec{v}_0 \times \vec{B}(\vec{x}) \tag{6.15}$$

Die elektromotorische Kraft (Ringspannung), die auf Ladungen in der Leiterschleife ∂F wirkt, ist also

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B}) \tag{6.16}$$

Die rechte Seite können wir mit dem Stokesschen Integralsatz als Flächenintegral schreiben:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \int_F d\vec{f} \cdot \underbrace{\nabla \times \big(\vec{E}}_{=0} + \vec{v}_0 \times \vec{B}\big) \tag{6.17}$$

wobei der erste Term wegen der statischen Feldgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ verschwindet. Weiter finden wir

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = \int_F d\vec{f} \cdot \big[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B}\big] = \int_F d\vec{f} \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B} \tag{6.18}$$

wegen $\mathrm{div}\vec{B} = 0$.
Das Magnetfeld $\vec{B}'$, das im Bezugssystem Σ' wirkt, ist zeitabhängig, da

$$\vec{B}'(\vec{x}', t) = \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t)$$

In Σ' gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_1(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \\ B_2(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \\ B_3(x_1 + v_{01}t, x_2 + v_{02}t, x_3 + v_{03}t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{01}\partial_1 B_1 + v_{02}\partial_2 B_1 + v_{03}\partial_3 B_1 \\ v_{01}\partial_1 B_2 + v_{02}\partial_2 B_2 + v_{03}\partial_3 B_2 \\ v_{01}\partial_1 B_3 + v_{02}\partial_2 B_3 + v_{03}\partial_3 B_3 \end{pmatrix} = (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Einsetzen in Gl. (6.18) ergibt also

$$\oint_{\partial F} d\vec{x}' \cdot \vec{E}' = -\int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_F d\vec{f}' \cdot \vec{B}' \tag{6.20}$$

denn die Leiterschleife ruht in Σ'.

Da diese Identität für beliebige Leiterschleifen (und in beliebige Inertialsystemen) gelten muß, können wir sie auch in infinitesimaler Form (ohne Striche) schreiben:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.21}$$

Diese Relation verknüpft in derselben Weise wie Gl. (6.11) das elektrische und das magnetische Feld; die Verallgemeinerung von $\nabla \times \vec{E} = 0$ für zeitabhängige Prozesse gilt also genauso für zeitabängige $\vec{B}$-Felder wie für Bewegungen von Leiterschleifen.

Anwendung:

Wechselstromgenerator

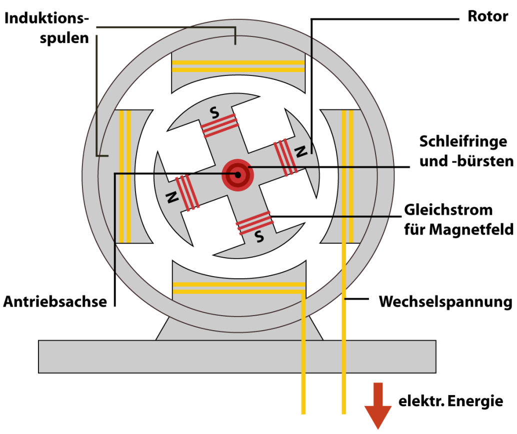

Abbildung 6.2: Schematischer Aufbau eines vierpoligen Wechselstromgenerators
Quelle: wikipedia

6.4 Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

Das Ampèresche Gesetz der Magnetostatik

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{6.22}$$

gilt nur für stationäre Ströme. Bildet man nämlich

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j}, \tag{6.23}$$

so erhält man wegen der Identität

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0, \tag{6.24}$$

gerade $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, d.h. stationäre Ströme. Allgemein gilt jedoch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{6.25}$$

so dass (6.22) für nichtstationäre Ströme modifiziert werden muss.
Wie diese Modifikation aussehen muss, wird sofort klar, wenn man das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik (Kapitel 2.4) beibehält:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}, \tag{6.26}$$

was durch die in Kapitel 1.1 aufgeführte Ladungsinvarianz gestützt wird. Daraus folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Kombiniert man dies nun mit der Kontinuitätsgleichung (6.25), so folgt:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0. \tag{6.27}$$

Ersetzt man daher

$$\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{6.28}$$

so hat man wieder einen Strom mit verschwindender Divergenz wie in der Magnetostatik. In Einklang mit der Ladungserhaltung erweitern wir also (6.22) wie folgt:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}. \tag{6.29}$$

Das Ampèresche Gesetz (6.29) findet seine experimentelle Bestätigung in der Existenz elektromagnetischer Wellen (s.u.).

Selbstinduktion

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung gemäß (6.29) ein magnetisches (und elektrisches) Feld. Ändert sich der Fluss dieses Magnetfeldes durch den Leiterkreis, so wird im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt (Selbstinduktion), der nach (6.4) dem primären Strom entgegen gerichtet ist (Lenzsche Regel).
Die Selbstinduktion hängt von der Geometrie des Leiters ab. Für eine quantitative Formulierung greift man zweckmäßigerweise auf die elektromagnetischen Potentiale zurück (Kap. 7).

6.5 Übersicht über die Maxwellschen Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{6.30}$$

was dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht.

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{6.31}$$

was dem Faradayschen Induktionsgesetz entspricht.

Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.32}$$

was dem Gaußschen Gesetz entspricht.

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}\,, \tag{6.33}$$

was dem Ampère-Maxwellschen Gesetz entspricht.

In (6.32) und (6.33) ist die Ladungserhaltung (6.25) schon implizit enthalten. (6.31) und (6.33) zeigen, dass ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\vec{B}$ ein elektrisches Feld $\vec{E}$ bedingt und umgekehrt. Die Gleichungen (6.30) – (6.33) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\vec{K} = q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right] . \tag{6.34}$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik.