5. Grundgleichungen der Magnetostatik

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Wir bestimmen jetzt die Feldgleichungen der Magnetostatik, d.h. infinitesimale (lokale) Gleichungen für die magnetische Flussdichte, die zu den integralen Beziehungen aus Kap. 4 äquivalent sind. Die Gleichung (4.16)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

kann wegen

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

auch als

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

geschrieben werden. Den Integranden formen wir um (Komponente α des Vektorprodukts, mit Summenkonvention):

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{j}(\vec{x}') \times \left(\nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right\}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\beta(\vec{x}') \partial_\gamma \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma \frac{j_\beta(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \frac{j_\gamma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\left\{ \nabla_x \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}_\alpha \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir benutzt, dass $j_\beta(\vec{x}')$ unabhängig von $\vec{x}$ ist, sodass $\partial_\gamma j_\beta(\vec{x}') = 0$, und die Antisymmetrie $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta}$; im dritten Schritt haben wir Indizes $\beta \leftrightarrow \gamma$ umbenannt.
Damit finden wir:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int_V d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \tag{5.1}$$

Gemäß (5.1) kann also $\vec{B}$ in der Form

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.2}$$

dargestellt werden mit

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}. \tag{5.3}$$

Gl. (5.2) ist das vektorielle Analog der Gleichung $\vec{E} = -\nabla\Phi$, durch die das elektrische Feld mit dem elektrischen Potential in Beziehung gesetzt wird. $\vec{A}(\vec{x})$ nennt man das *Vektor-Potential*. Dann wird die Divergenz von $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \tag{5.4}$$

Gleichung (5.4) entspricht formal

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{5.5}$$

und zeigt, dass es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.4) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V d^3x \, \nabla \cdot \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0, \tag{5.6}$$

so sehen wir, dass der Fluss der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche F verschwindet. Der *magnetische Fluss* ist die über eine Fläche integrierte magnetische Flussdichte $\vec{B}$. Der Vergleich mit:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{5.7}$$

erklärt die obige Aussage.

5.2 Rotation der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$

In der Elektrostatik hatten wir für die Rotation des elektrischen Feldes gefunden

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{5.8}$$

oder gleichwertig ein Linienintegral entlang des geschlossenen Weges ∂F um eine Fläche F

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0 \tag{5.9}$$

nach der Formel von Stokes. Entsprechend wollen wir im folgenden das Linienintegral

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} \tag{5.10}$$

über einen geschlossenen Weg ∂F untersuchen und dann über die Formel von Stokes $\nabla \times \vec{B}$ berechnen.

Langer, dünner Leiter

Wir betrachten zunächst einen unendlich langen, dünnen, geraden Leiter. Dafür hatten wir in Abschnitt 4.3

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I\mu_0}{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi \tag{5.11}$$

gefunden, wobei r der Abstand vom Leiter ist, I die Stromstärke und $\vec{e}_\varphi$ die Richtung angibt: die Feldlinien laufen konzentrisch um den Leiter. Als Weg ∂F betrachten wir zunächst eine geschlossene (stückweise) glatte Kurve in der Ebene senkrecht zum Leiter, die den Leiter umfasst (siehe Fig. 5.1), den Rand der Fläche F.

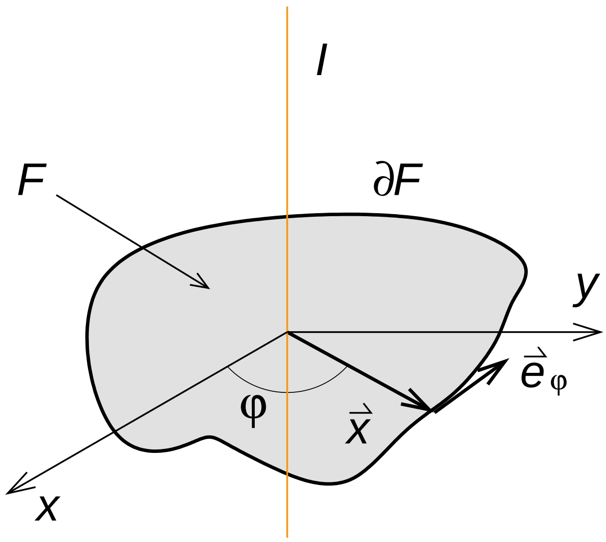

Abbildung 5.1: Geschlossene Kurve F in der xy-Ebene mit Rand ∂F.

Dann wird:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint_{\partial F} \frac{d\vec{x} \cdot \vec{e}_\varphi}{r} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint d\varphi = I\mu_0. \tag{5.12}$$

Wenn S den Strom nicht umfasst, so gilt:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.13}$$

Allgemeine Stromverteilung

Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern, indem man Ströme vom oben diskutierten Typ superponiert und geschlossene Raumkurven ∂F aus ebenen Wegstücken zusammensetzt. Ohne auf Beweis-Details einzugehen - was Aufgabe der Mathematik ist - halten wir als generelles Ergebnis fest:

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I}\,, \tag{5.14}$$

wobei I die Stromstärke des von ∂F umschlossenen Stromes ist. Dies ist als *Ampèresches (Durchflutungs-)Gesetz* bekannt.

Bemerkung

Umläuft der Weg des Linienintegrals den Strom n-fach, so ist I durch nI zu ersetzen.

Rotation von $\vec{B}$

Die zu Gl. (5.9) analoge integrale Aussage (5.14) können wir mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes (siehe Gl. 2.1) in eine differentielle Beziehung umwandeln. Der Satz von Stokes gestattet, das obige Linienintegral in ein Oberflächenintegral umzuformen:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \tag{5.15}$$

wobei F eine beliebige glatte, in den geschlossenen Weg ∂F eingespannte, orientierbare Fläche ist. F und ∂F liegen im Definitionsbereich des stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{B}$. Mit Gl. (5.15) ergibt sich aus (5.14):

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \mu_0 I = \mu_0 \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}\,, \tag{5.16}$$

oder, da F beliebig gewählt werden kann:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}\,. \tag{5.17}$$

Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld $\vec{E}$ mit $\nabla \times \vec{E} = 0$ ist also das $\vec{B}$-Feld *nicht wirbelfrei.*

5.3 Vektor-Potential und Eichung

Statt $\vec{B}$ bei gegebener Stromverteilung $\vec{j}$ aus Gl. (5.4) und (5.17) zu berechnen, wollen wir entsprechend der Poissongleichung für das elektrostatische

Potential Φ eine Differentialgleichung herleiten, aus der wir das Vektorpotential $\vec{A}$ bestimmen können; die magnetische Induktion kann daraus dann einfach durch Differenzieren gewonnen werden (Kap. 5.1):

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{5.18}$$

Aus der Differentialgleichung für das Vektor-Potential soll sich $\vec{A}$ bei gegebener Stromverteilung $\vec{j}$ berechnen lassen. Wir bilden zunächst die Rotation von $\vec{B}$ aus Gl. (5.18):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}. \tag{5.19}$$

Coulomb-Eichung

Der 1. Term auf der rechten Seite in (5.19) lässt sich mittels einer sog. *Eichtransformtion* beseitigen, indem man ausnutzt, dass $\vec{A}$ über (5.18) nicht eindeutig definiert ist. Das Feld $\vec{B}$ ändert sich nämlich nicht, wenn man die Eichtransformation

$$\boxed{\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi} \tag{5.20}$$

durchführt, wobei χ eine beliebige (mindestens zweimal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist. Denn:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla\chi)}_{=0} = \nabla \times \vec{A}\,, \tag{5.21}$$

da die Rotation eines Gradienten verschwindet. Ist nun die Divergenz von $\vec{A}$ ungleich null

$$\nabla \cdot \vec{A} \;\neq\; 0, \tag{5.22}$$

so wählen wir das *Eichpotential* χ so, dass die Divergenz des transformierten Vektorpotentials verschwindet:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla\chi) = 0. \tag{5.23}$$

Diese Wahl von χ nennt man die *Coulomb-Eichung*. Das gesuchte χ finden wir somit durch Lösen einer Differentialgleichung vom Typ der Poissongleichung (2.40):

$$\Delta\chi = \, - \nabla \cdot \vec{A}, \tag{5.24}$$

wo $-\nabla \cdot \vec{A}$ als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist. Es lässt sich also stets erreichen (ohne die Physik, d.h. das $\vec{B}$-Feld in irgendeiner Weise einzuschränken!) dass:

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}_{\text{Coulomb-Eichung}} \tag{5.25}$$

gilt. Die vektorielle Gleichung (5.25) zerfällt in ihre 3 Komponenten, die mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poissongleichung (2.40) sind.

5.4 Multipolentwicklung

Analog zu der in Abschnitt 1.5 besprochenen Multipolentwicklung für das elektrische Potential Φ interessiert man sich oft für das $\vec{B}$-Feld in großer Entfernung von der (räumlich lokalisiert angenommenen) Stromverteilung $\vec{j}$.

Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential $\vec{A}$ analog zu Φ in eine Taylorreihe zu entwickeln. Unter Verwendung von Gl. (5.3) und (1.28)

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{3\,(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots . \tag{5.26}$$

erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \dots\right) = \vec{A}_0(\vec{x}) + \vec{A}_1(\vec{x}) + \dots \tag{5.27}$$

mit dem

1.) Monopolanteil:

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}') \tag{5.28}$$

als 1. Term der Entwicklung von Gleichung (5.3). Nun ist für jede Komponente $\alpha = 1, 2, 3$ (mit der Beziehung (4.39))

$$\int_V d^3x'\, j_\alpha(\vec{x}') = \int_V d^3x'\,\nabla'\cdot(x'_\alpha\,\vec{j}(\vec{x}')) = \oint_F d\vec{f}'\cdot x'_\alpha\,\vec{j}(\vec{x}') = 0 \tag{5.29}$$

wegen $\nabla\cdot\vec{j} = 0$, dem Gaußschen Integralsatz und der Tatsache, dass $\vec{j}$ auf der Oberfläche von V verschwindet ($\vec{j} \neq 0$ nur innerhalb von V). Also folgt:

$$\vec{A}_0 = 0 \tag{5.30}$$

da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt, wenn man mit (1.30) vergleicht.

2.) Dipolanteil:

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_V d^3x' \left(\vec{x}\cdot\vec{x}'\right) \vec{j}(\vec{x}')\,. \tag{5.31}$$

Das Integral (5.31) formen wir gemäß (4.44) um:

$$\begin{aligned}\int_V d^3x' \,(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}') &= \frac{1}{2}\int_V d^3x' \left[(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}') - (\vec{x}\cdot\vec{j}(\vec{x}'))\,\vec{x}'\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_V d^3x' \left[\vec{x}\times(\vec{j}(\vec{x}')\times\vec{x}')\right].\end{aligned} \tag{5.32}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\vec{A}_1(\vec{x}) = \vec{m}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{x}}{r^3}\right)} \tag{5.33}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V d^3x \left(\vec{x}\times\vec{j}\right)$ von (4.46). Man vergleiche das Ergebnis mit (1.31)!

Magnetisches Moment versus Bahndrehimpuls

Für N Punktladungen q_i lautet $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,(\vec{x}_i\times\vec{v}_i)\;. \tag{5.34}$$

Weiterhin kann $\vec{m}$ in einen einfachen Zusammenhang mit dem Drehimpuls $\vec{L}$ der N geladenen Massenpunkte gebracht werden, wenn $M_i = M$ und $q_i = q$, denn dann ist:

$$\vec{m} = \frac{q}{2M}\sum_{i=1}^{N} M\,(\vec{x}_i\times\vec{v}_i) = \frac{q}{2M}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i\,, \tag{5.35}$$

mit den (Bahn-)Drehimpulsen $\vec{L}_i$ der geladenen Teilchen, und damit

$$\vec{m} = \frac{q}{2M}\vec{L}\,. \tag{5.36}$$

Mit dem Bahndrehimpuls $\vec{L}$ eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von $\vec{L}$ verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms.

Umgekehrt lässt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.36) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein *inneres* magnetisches Dipolmoment, das nicht mit dem Bahndrehimpuls, sondern mit dem *Spin* dieser Teilchen verknüpft ist durch:

$$\vec{m}_s = g \frac{q}{2M} \vec{s}, \tag{5.37}$$

wobei $\vec{s}$ der Spin-Vektor ist und g das *gyromagnetische Verhältnis*. Es ist $g \approx 2.0024$ für Elektronen, d.h. für den Spin („inneren Drehimpuls“) des Elektrons ist das magnetische Moment ca. doppelt so groß wie klassisch zu erwarten. Das wird erst in der relativistischen Theorie (Dirac-Theorie) des Elektrons aufgeklärt.

5.5 Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld

Wie auch für das elektrische Feld (vgl. Kap. 2.6.) betrachten wir jetzt den Fall, dass eine äßere magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x})$ auf eine räumlich begrenzte Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ einwirkt und bestimmen von dieser Wechselwirkung den fÃ¼hrenden Term:

$$\vec{K} = \int d^3x \left[\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\right]$$

$\vec{B}(\vec{x})$ soll sich jetzt in den Gebiet, in dem $\vec{j}(\vec{x}) \neq 0$ ist, nur schwach ändern; den Ursprung $\vec{x} = 0$ legen wir dann in das Gebiet mit $\vec{j}(\vec{x}) \neq 0$ und entwickeln $\vec{B}(\vec{x})$ um den Ursprung in eine Taylorreihe:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(0) + (\vec{x} \cdot \nabla)\vec{B}(\vec{x})\big|_{\vec{x}=0} + \dots \tag{5.38}$$

Für die Kraft folgt

$$\vec{K} = -\vec{B}(0) \times \underbrace{\int d^3x \, \vec{j}(\vec{x})}_{=0} + \int d^3x \left[\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{x} \cdot \nabla)\vec{B}(0)\right] + \dots \tag{5.39}$$

wobei der erste Term wegen Gl. (5.29) verschwindet.

Für die α-Komponente der Kraft finden wir (mit Summenkonvention)

$$
\begin{aligned}
\vec{K}_\alpha &\approx -\int d^3x \left[(\vec{x}\cdot\nabla)\vec{B}(0)\times\vec{j}(x)\right]_\alpha \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x\,(\vec{x}\cdot\nabla)B_\beta(0)j_\gamma(\vec{x}) \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x\,(x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_3\partial_3)B_\beta(0)j_\gamma(\vec{x}) \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x\left[\big(\partial_1 B_\beta(0)\big)x_1+\big(\partial_2 B_\beta(0)\big)x_2+\big(\partial_3 B_\beta(0)\big)x_3\right]j_\gamma(\vec{x}) \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x\left[\nabla B_\beta(0)\right]\cdot\vec{x}\,j_\gamma(\vec{x})
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Mit der Gleichung (4.44)

$$
\int d^3x\,(\vec{a}\vec{x})\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{a}\times\int_V d^3x\,\big(\vec{x}\times\vec{j}\big)\,, \tag{5.41}
$$

die wir für $\vec{a}=\vec{B}$ bewiesen haben, die aber für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ gilt, auf den das Integral nicht wirkt, können wir fortfahren, indem wir jetzt $\vec{a}=\nabla B_\beta$ setzen (wir haben die γ-Komponente der Gl. (5.41) vorliegen):

$$
\begin{aligned}
\vec{K}_\alpha &\approx -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big\{\left[\nabla B_\beta(0)\right]\times\int_V d^3x\left[\vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})\right]\Big\}_\gamma \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big\{\vec{m}\times\left[\nabla B_\beta(0)\right]\Big\}_\gamma \\
&= -\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big\{\vec{m}\times\nabla\Big\}_\gamma B_\beta(0) \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big\{\vec{m}\times\nabla\Big\}_\beta B_\gamma(0) = \Big[\big(\vec{m}\times\nabla\big)\times\vec{B}(0)\Big]_\alpha
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Damit ist

$$
\vec{K} \approx \big(\vec{m}\times\nabla\big)\times\vec{B}(0) \tag{5.43}
$$

der führende Term in der Entwicklung der Kraft auf eine Stromverteilung im $\vec{B}$-Feld. Das formen wir noch etwas um:

$$
\vec{K} \approx -\vec{m}\big[\nabla\cdot\vec{B}(0)\big]+\nabla\big[\vec{m}\cdot\vec{B}(0)\big] \tag{5.44}
$$

Wegen div$\vec{B} = 0$ folgt also für die Kraft auf einem magnetischen Dipol $\vec{m}$ in einem räumlich schwach veränderlichen Feld $\vec{B}$:

$$\vec{K} \approx \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{5.45}$$

Da die Kraft als negativer Gradient einer potentiellen Energie definiert ist, ergibt sich aus (5.45) für die potentielle Energie des magnetischen Dipols im $\vec{B}$-Feld:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \tag{5.46}$$

analog zu $U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$ als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld, Gl. (2.59). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

5.6 Übersicht über die Magnetostatik

1.) Basis: *Ampèresches Gesetz*

$$\vec{K} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

für stationäre Ströme, wobei $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

2.) *Feldgleichungen*: Aus

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

folgt

a) *differentiell*:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

b) *integral*

$$\oint_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0; \quad \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I$$

3.) *Vektor-Potential*:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \to \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

für $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung).