

# Teil II

## Magnetostatik

## 4. Ampère'sches Kraftgesetz

---

### 4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln. Als elektrische Stromstärke definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt.

#### Stromdichte

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst Ladungsträger mit gleicher Ladung  $q$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Es sei  $\vec{a}$  der Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums, dessen Betrag  $a$  die Querschnittsfläche angibt und  $n$  die Dichte der Ladungsträger. In der Zeit  $\Delta t$  passieren dann die in dem Volumen  $\Delta V = (\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t$  befindlichen Ladungsträger den Leiterquerschnitt, nämlich  $n(\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t$  Ladungsträger. Damit folgt für die Stromstärke (berechnet als Ladungsdichte mal Volumen pro Zeit)

$$I(\mathbf{a}) = \frac{nq(\vec{a} \cdot \vec{v})\Delta t}{\Delta t} = nq(\vec{a} \cdot \vec{v}). \quad (4.1)$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit  $n_i$  Ladungsträger  $q_i$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$ , so wird:

$$I(\mathbf{a}) = \vec{a} \cdot \left( \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \right). \quad (4.2)$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) legen es nahe, die *Stromdichte* (oder *elektrische Flussdichte*)  $\vec{j}$  einzuführen, als

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i. \quad (4.3)$$

Die Stromdichte hat die Dimension

$$[\vec{j}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (4.4)$$

Sie lässt sich für  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}$  mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i \vec{v}_i \quad (4.5)$$

verknüpfen:

$$\vec{j} = n\mathbf{q}\langle \vec{v} \rangle = \rho\langle \vec{v} \rangle. \quad (4.6)$$

Gleichung (4.6) macht deutlich, dass hohe Absolutgeschwindigkeiten der Ladungsträger noch keinen hohen Strom bedeuten, da nur der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Ladungsträger wesentlich ist. Sind z.B. die Geschwindigkeiten der Ladungsträger gleichmäßig über alle Richtungen verteilt, so wird  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  und damit auch  $\vec{j} = 0$ . Im allgemeinen Fall ist  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle$  orts- und zeitabhängig, also

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t). \quad (4.7)$$

### Kontinuitätsgleichung

Den Erhaltungssatz der Ladung können wir mit den Begriffen der Ladungs- und Stromdichte wie folgt formulieren: Wir betrachten ein beliebiges endliches Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $F$ . Die darin enthaltene Ladungsmenge sei  $Q = Q(t)$ . Wenn  $V$  nicht von der Zeit abhängt, so ergibt sich für die Änderung der in  $V$  enthaltenen Ladungsmenge pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet werden kann, muss die Abnahme (Zunahme) der in  $V$  enthaltenen Ladung gleich der (im betrachteten Zeitraum) durch  $F$  hinaus (hinein)-strömenden Ladungsmenge sein:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} dI \quad (4.9)$$

Die  $dI$  sind die Ströme durch die Flächenelemente  $d\mathbf{f}$  der Oberfläche  $\partial V$ .  $dI > 0$  soll bedeuten, dass Strom in Normalenrichtung fließt, d.h. für positive Ladung nach außen oder für negative Ladung nach innen; entsprechend

für  $dI < 0$ . Das begründet das negative Vorzeichen: Falls Beiträge mit  $dI > 0$  überwiegen, bedeutet das einen Verlust von (positiver) Ladung. Die rechte Seite lässt sich durch das Oberflächenintegral der Stromdichte ausdrücken, das nach dem Gaußschen Integralsatz in ein Volumenintegral umgeformt werden kann:

$$\oint_{\partial V} dI = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j}. \quad (4.10)$$

Damit lautet die Ladungsbilanz:

$$-\int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j} \quad (4.11)$$

oder, da  $V$  beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.} \quad (4.12)$$

Während Gl. (4.9) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet Gl. (4.12) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

### Spezialfälle

(i) Elektrostatik: stationäre Ladungen

$$\vec{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \rho(\vec{x}) \quad (4.13)$$

(ii) Magnetostatik: stationäre Ströme

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.14)$$

Für einen stationären Strom ist nämlich  $\nabla \cdot \vec{j}$  zeitlich konstant, und diese Konstante muss überall null sein, da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet wird.

## 4.2 Lorentzkraft und magnetische Induktion

Gegeben sei eine stationäre Stromverteilung  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x})$ . Um elektrostatische Effekte zu eliminieren, wollen wir annehmen, dass die Dichte der bewegten Ladungsträger, die den Strom aufbauen, kompensiert wird durch ruhende

Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens (z.B. bewegte Leitungselektronen und ruhende Gitterionen im metallischen Leiter). Auf eine bewegte Probeladung  $q$  wirkt dann in der Umgebung des stromdurchflossenen Leiters eine Kraft, für die man experimentell findet, die sogenannte *Lorentzkraft*:

$$\vec{K} = q \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (4.15)$$

mit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \Gamma_m \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.16)$$

als der *magnetischen Induktion* (auch *magnetische Flussdichte* oder etwas ungenau *Magnetfeld* genannt).  $\vec{B}$  ist die Flächendichte des magnetischen Flusses, der durch ein Flächenelement hindurchtritt. Die Gleichungen (4.15) und (4.16) sind als Grundlagen der Magnetostatik ebenso experimentell gesichert wie

$$\vec{K} = q \vec{E} \quad (4.17)$$

mit

$$\vec{E}(\vec{x}) = \Gamma_e \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.18)$$

in der Elektrostatik! So wie wir Gl. (4.17) als Messvorschrift für das elektrostatische Feld  $\vec{E}$  auffassen können, so stellt Gl. (4.15) eine Messvorschrift für die magnetische Induktion  $\vec{B}$  dar.

### Maßsysteme

Hat man  $\Gamma_e$  festgelegt, d.h. hat man die Einheitsladung definiert, siehe Abschnitt 1.2, so sind in Gl. (4.15) und (4.16) alle auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert.  $\Gamma_m$  kann also nicht mehr frei gewählt werden:

(ii) Gaußsches cgs-System:

$$\Gamma_e = 1, \quad \Gamma_m = \frac{1}{c^2} \quad (4.19)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

(i) SI-System:

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \Gamma_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (4.20)$$

mit

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{m kg}}{\text{C}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}. \quad (4.21)$$

$\mu_0$  ist die *magnetischen Permeabilität*.

### Relativistische Invarianz

Unabhängig vom Maßsystem ist das Verhältnis  $\Gamma_m/\Gamma_e$  eine Konstante, da das Verhältnis von Ausdruck (4.15) zu (4.17) dimensionslos ist. Die Dimension des Verhältnisses

$$\left[ \frac{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \right] = [\text{Geschwindigkeit}] \quad (4.22)$$

ist Geschwindigkeit, und daher

$$\left[ \frac{\vec{v} \times \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}{\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \right] = [\text{Geschwindigkeit}^2] \quad (4.23)$$

Somit hat das Verhältnis von  $\Gamma_m/\Gamma_e = \epsilon_0 \mu_0$  die Dimension einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat.

Mit Gl. (4.20) und (4.19) erhalten wir die Beziehung

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}. \quad (4.24)$$

Dieser fundamentale Zusammenhang verweist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie. In der Tat kann man mit Hilfe einer Lorentz-Transformation Gl. (4.15) und (4.16) in Gl. (4.20) und (4.19) überführen.

Schließlich folgt für die Dimension der magnetischen Induktion

$$[\vec{B}] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung} \cdot \text{Geschwindigkeit}} = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T (Tesla)}. \quad (4.25)$$

Der Zusammenhang mit der veralteten Einheit Gauß ist  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ .

### Superpositionsprinzip

Gleichung (4.16) enthält - wie in (4.18) - das Superpositionsprinzip: Die Felder zweier Stromverteilungen  $\vec{j}_1$  und  $\vec{j}_2$  überlagern sich linear, da  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$  die resultierende Stromverteilung ist.

### 4.3 Das Biot-Savart-Gesetz

Im folgenden soll das Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden. In der Regel haben wir es mit Strömen  $I$  in drahtförmigen Leitern zu tun.

Für einen *dünnen* Leiter können wir sofort über den Leitungsquerschnitt  $f$  integrieren, wobei wir die Stromstärke

$$I = \int_f \vec{j} \cdot d\vec{f}' \quad (4.26)$$

eingeführen (siehe Abb. 4.1), und erhalten statt des Volumenintegrals (4.16) ein Linienintegral. Dieselbe Umformung des Integrals erreichen wir durch folgende Argumentation: Wir betrachten ein Volumenelement  $d^3x'$ , das ein Stück  $d\vec{x}'$  eines drahtförmigen Leiters  $L'$  enthalten soll;  $d\vec{x}'$  ist also ein Linienelement entlang des Leiters  $L'$ . Durch den Leiter soll der Strom

$$I' = \frac{dq'}{dt}$$

fließen. Die Ladungsträger sollen mit einer mittleren Geschwindigkeit  $\vec{v}'$  unterwegs sein, für die

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt}$$

gilt. Dann ist

$$\vec{j}(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')\vec{v}'.$$

Mit der Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}')$  ist

$$dq' = d^3x' \rho(\vec{x}')$$

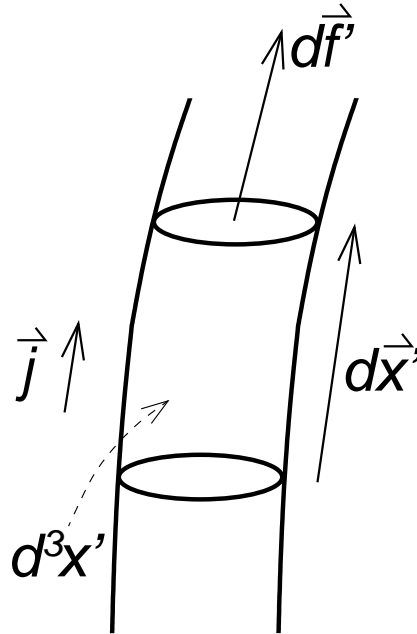
die elektrische Ladung im Volumenelement  $d^3x'$ . Dann können wir schreiben

$$d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = d^3x' \rho(\vec{x}')\vec{v}' = dq' \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{dq'}{dt} d\vec{x}' = I' d\vec{x}' \quad (4.27)$$

Einsetzen in die Definition der magnetischen Flussdichte ergibt

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (4.28)$$

Dieses Konzept des infinitesimal dünnen stromführenden Leiters, des *Stromfadens*, entspricht dem Konzept der Punktladung in der Elektrostatik und ist ebenso nützlich.



**Abbildung 4.1:**  
Geometrie eines Volumenelementes  $d^3x'$  eines dünnen Leiters  $L'$ .

### Unendlich langer, gerader Draht

Für einen unendlich langen, dünnen Leiter können wir die Integration in Gl. (4.28) ausführen. Dazu stellen wir fest, dass wir in dieser Anordnung Rotationssymmetrie um den Draht als Achse als auch Translationsinvarianz entlang des Drahtes ausnutzen können. Dazu wählen wir den Ursprung  $O$  des  $\vec{x}'$ -Systems auf dem Draht; der Draht soll dann parallel zu  $z'$  verlaufen. Wegen der Translationssymmetrie können wir den Vektor  $\vec{x}$  zum Beobachtungspunkt  $P$  senkrecht zum Draht wählen (siehe Abb. 4.2). Dann gilt

$$d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}') = |d\vec{x}'| |\vec{x} - \vec{x}'| \sin \vartheta \vec{e}_\varphi = dz' r \vec{e}_\varphi$$

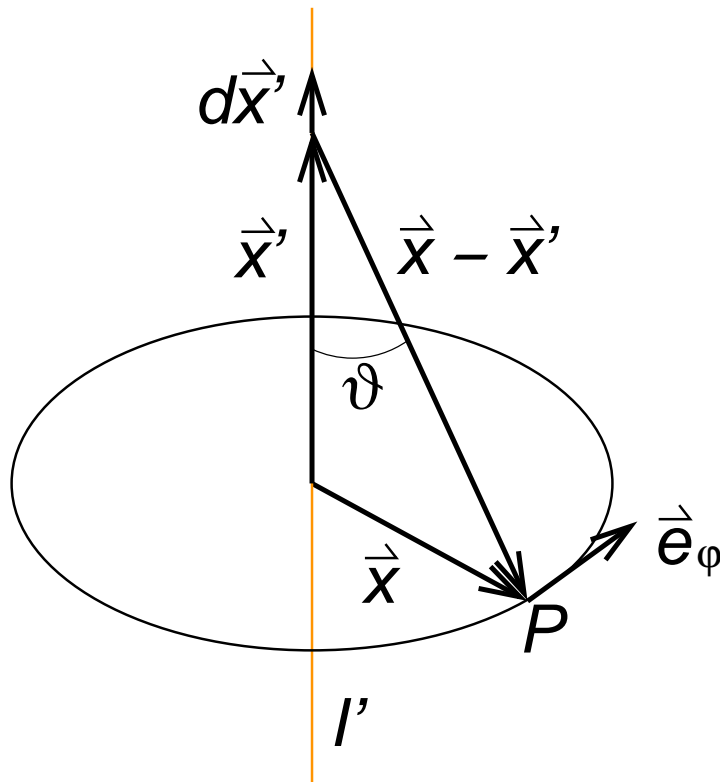
mit

$$dz' = |d\vec{x}'| \quad \text{und} \quad |\vec{x}| = r = |\vec{x} - \vec{x}'| \sin \vartheta$$

$\vec{e}_\varphi$  ist der Einheitsvektor in azimuthaler Richtung. Außerdem gilt (nach Pythagoras)

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + z'^2}$$





**Abbildung 4.2:**  
Geometrie für die Bestimmung der magnetischen Induktion eines geraden, dünnen, unendlich langen Leiters  $L'$ , durch den ein Strom  $I'$  fließt.

Damit wird das Linienintegral zu einem eindimensionalen gewöhnlichen Integral:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I' r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\varphi \quad (4.29)$$

Dieses berechnen wir mit der Substitution

$$z' = r \sinh \xi \quad dz' = r \cosh \xi d\xi \quad r^2 + z'^2 = r^2 (1 + \sinh^2 \xi) = r^2 \cosh^2 \xi$$

wegen  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ . Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \cosh \xi d\xi}{r^3 \cosh^3 \xi} = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2 \xi} = \frac{1}{r^2} [\tanh \xi]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{r^2}$$

Das Ergebnis für die magnetische Induktion im Punkt  $P$  ist also

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \vec{e}_\varphi, \quad (4.30)$$

wobei  $r$  der senkrechte Abstand des Punktes  $P$  vom Draht ist. Dies ist die Formel von Biot und Savart für einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter. Es bedeutet, dass die Feldlinien von  $\vec{B}$  konzentrisch um den Leiter verlaufen und umgekehrt proportional zu  $r$  schwächer werden.

## 4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Ausgehend von der Kraft, die eine Ladung  $q_i$  erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  im Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegt,

$$\vec{K}_i = q_i \left[ \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right], \quad (4.31)$$

erhält man mit der Umrechnung von Gl. (4.27) für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte  $\vec{j}$ :

$$\vec{K} = \sum_i q_i \left[ \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right] = \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}); \quad (4.32)$$

das Volumen  $V$  ist so zu wählen, dass es den Strom vollständig erfasst.

**Beispiel:** Für einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das  $\vec{B}$ -Feld nicht (wesentlich) ändert, können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in Gl. (4.32) ausführen:

$$\vec{K} = I \int_L d\vec{x} \times \vec{B}. \quad (4.33)$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters  $L$  lässt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn  $\vec{B}$  sich längs  $L$  nicht ändert:

$$\vec{K} = (\vec{I} \times \vec{B})L, \quad (4.34)$$

wo  $L$  die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum  $\vec{B}$ -Feld; sie ist maximal, wenn  $\vec{I}$  senkrecht zu  $\vec{B}$  verläuft und verschwindet, wenn  $\vec{I}$  parallel zu  $\vec{B}$  ist.

### Drehmoment

Auf die Ladung  $q_i$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  im Feld  $\vec{B}$  wirkt das Drehmoment

$$\vec{N}_i = \vec{x}_i \times \left[ q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right]; \quad (4.35)$$

entsprechend auf den Strom der Stromdichte  $\vec{j}$  (Umrechnung wieder nach Gl. (4.27)):

$$\vec{N} = \sum_i \vec{x}_i \times \left[ q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right] = \int_V d^3x \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}). \quad (4.36)$$

Einfache Beispiele sind (rechteckige oder kreisförmige) Stromschleifen im homogenen  $\vec{B}$ -Feld.

Für die praktische Auswertung von Gl. (4.36) ist es zweckmäßig, mit der Identität („bac-cab-Regel“)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (4.37)$$

umzuformen:

$$\vec{N} = \int_V d^3x \left[ (\vec{x} \cdot \vec{B})\vec{j} - (\vec{x} \cdot \vec{j})\vec{B} \right]. \quad (4.38)$$

### Stationärer Strom

Für einen stationären, räumlich begrenzten Strom im homogenen  $\vec{B}$ -Feld verschwindet der zweite Term in Gl. (4.38). Um dies zu zeigen, berücksichtigen wir, dass in der Magnetostatik wegen  $\dot{\rho} = 0$  auch  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  gilt, und verwenden ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ )

$$\nabla(\chi_{\alpha}\vec{j}) = \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma}(\chi_{\alpha}\vec{j}) = \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\alpha\gamma} \vec{j} + \chi_{\alpha} \nabla \vec{j} = \vec{e}_{\alpha} \vec{j} = j_{\alpha} \quad (4.39)$$

sowie

$$\begin{aligned} \nabla(\chi_{\beta}\chi_{\alpha}\vec{j}) &= \left( \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma} \chi_{\beta} \right) \chi_{\alpha} \vec{j} + \left( \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \partial_{\gamma} \chi_{\alpha} \right) \chi_{\beta} \vec{j} \\ &= \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\beta\gamma} \chi_{\alpha} \vec{j} + \sum_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \delta_{\alpha\gamma} \chi_{\beta} \vec{j} = \chi_{\alpha} j_{\beta} + \chi_{\beta} j_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \chi_{\beta} j_{\alpha} &= \int_V d^3x \chi_{\beta} \nabla \cdot (\chi_{\alpha} \vec{j}) = \int_V d^3x \nabla \cdot (\chi_{\beta} \chi_{\alpha} \vec{j}) - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \chi_{\beta} \chi_{\alpha} \vec{j} - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} = - \int_V d^3x \chi_{\alpha} j_{\beta} \end{aligned} \quad (4.41)$$

unter Ausnutzung des Gaußschen Integralsatzes und des Verschwindens von  $\vec{j}$  auf der Oberfläche  $\partial V$  von  $V$ . Für  $\alpha = \beta$  folgt aus Gl. (4.41)

$$\int_V d^3x (\vec{x} \cdot \vec{j}) = 0, \quad (4.42)$$

so dass für ein homogenes (bzw. ein schwach veränderliches) Feld in Gl. (4.38) der zweite Term exakt (bzw. näherungsweise) verschwindet.

### Magnetisches Dipolmoment

Entsprechend folgt aus Gl. (4.41) für  $\alpha \neq \beta$ :

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \vec{\mathbf{j}} = - \int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \vec{\mathbf{x}}, \quad (4.43)$$

also:

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{j}} = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{x} [(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{j}} - (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{j}}) \vec{\mathbf{x}}] = -\frac{1}{2} \vec{\mathbf{B}} \times \int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{j}}) \quad (4.44)$$

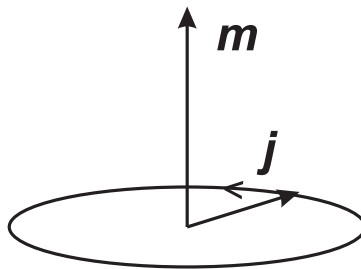
mit Formel (4.37). Ergebnis:

$$\boxed{\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{B}}} \quad (4.45)$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\boxed{\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{x} (\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{j}})}. \quad (4.46)$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht  $\vec{\mathbf{m}}$  senkrecht zur Stromebene:



Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir nach Integration über den Leiterquerschnitt:

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{I}{2} \oint_L (\vec{\mathbf{x}} \times d\vec{\mathbf{x}}), \quad (4.47)$$

und für den Betrag  $m$ :

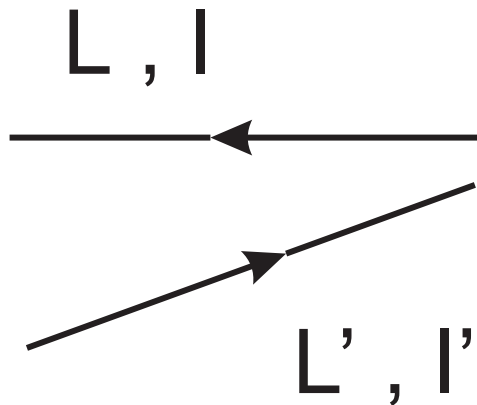
$$m = IF, \quad (4.48)$$

wobei  $I$  die Stromstärke und  $F$  die vom Strom eingeschlossene Fläche ist (vgl. hierzu den Flächensatz für die Bewegung eines Massenpunktes im Zentralfeld!).

## Anwendungen

Strommessung bzw. Elektromotor.

### 4.5 Kräfte zwischen Strömen



Mit den Gleichungen (4.28) und (4.33) lässt sich die Kraft eines Stromes  $I'$  auf einen Strom  $I$  bei dünnen Leitern schreiben als:

$$\vec{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \underbrace{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')] }_{[d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{x}' - [d\vec{x} \cdot d\vec{x}'] (\vec{x} - \vec{x}')} . \quad (4.49)$$

Das ist das *Ampèresche Kraftgesetz*, das die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden beschreibt. Gleichung (4.49) kann mit Hilfe von (4.37) symmetrisiert werden:

$$\vec{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (4.50)$$

denn der erste der zwei Terme aus der „bac-cab-Regel“ enthält eine totale Ableitung, mit

$$\int_L \frac{d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = - \int_L d\vec{x} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = 0 \quad (4.51)$$

für geschlossene (Linienintegral über einen Gradienten) oder unendlich lange Leiterkreise. Gleichung (4.50) ändert bei Vertauschung der beiden

Ströme, d.h. von  $I$  und  $I'$  sowie von  $\vec{\chi}$  und  $\vec{\chi}'$ , das Vorzeichen. Darin spiegelt sich das Actio-Reactio-Prinzip wider, das für elektrostatische wie für magnetostatische Wechselwirkungen gilt. Es wird allerdings durchbrochen bei beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Ladungsverteilungen (siehe Kap. 6).