

### 3. Randwertprobleme der Elektrostatik

#### 3.0 Grundproblem der Elektrostatik

Die Aufgabe der Elektrostatik besteht in der Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

für eine gegebene Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$ . Die Poisson-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung erst eindeutig wird, wenn Randbedingungen vorgegeben werden. Besonders einfach: Das Potential  $\Phi(\vec{x})$  soll im Unendlichen verschwinden:

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Die beiden Gleichungen (3.1) und (3.2) zusammen heißen Randwertproblem. Für dieses Randwertproblem ist die Lösung bereits bekannt:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.3)$$

Es gibt sehr viele verschiedenen Typen von Randwertproblemen, besonders im Endlichen, und hier werden nur einige ausgewählte typischen Situationen behandelt.

#### 3.1 Eindeutigkeitstheorem

Wir wollen im folgenden zeigen, dass die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der folgenden Randbedingungen gilt:

##### (i) Dirichlet - Bedingung

$$\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } \partial V, \text{ oder} \quad (3.4)$$

##### (ii) von Neumann-Bedingung

$$\nabla\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } \partial V, \quad (3.5)$$

#### Beweis

Wir nehmen an, dass es 2 Lösungen  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  von

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

mit den gleichen Randbedingungen, (3.4) oder (3.5), gibt. Dann gilt für die Differenz  $U = \Phi_1 - \Phi_2$ :

$$\Delta U = 0 \quad (3.7)$$

in dem von  $\partial V$  umschlossenen Volumen  $V$ . Weiter ist wegen der Randbedingungen

$$U = 0 \quad \text{auf } \partial V \quad (3.8)$$

oder

$$\nabla U = 0 \quad \text{auf } \partial V. \quad (3.9)$$

Wir suchen jetzt nach einer Aussage über  $\nabla U$  im ganzen Gebiet  $V$ . Mit der Identität

$$\underbrace{\nabla \cdot (U \nabla U)}_{\text{div}} = \underbrace{(\nabla U)^2}_{\text{grad}} + \underbrace{U \Delta U}_{\text{Laplace}} \quad (3.10)$$

und (3.7) wird:

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = \int_V \left( \nabla \cdot (U \nabla U) - \underbrace{U \Delta U}_{=0} \right) dV = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underbrace{U \nabla U}_{=0} = 0 \quad (3.11)$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, falls eine der beiden Bedingungen (3.8) oder (3.9) gilt. Also:

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = 0, \quad (3.12)$$

d.h. es ist im ganzen Gebiet  $V$ :

$$\nabla U = 0, \quad (3.13)$$

da  $(\nabla U)^2 \geq 0$ . Damit wird

$$U = \text{const} \quad (3.14)$$

und  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  unterscheiden sich höchstens um eine (physikalisch unwesentliche) Konstante.

### Sonderfall $V \rightarrow \infty$

Wenn  $V$  der gesamte  $\mathbb{R}_3$  ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls  $\rho$  auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und  $\Phi(\vec{r})$  asymptotisch so schnell abfällt, dass

$$r^2 \Phi(\vec{r}) \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

wo  $\partial \Phi / \partial n \equiv \vec{n} \cdot \nabla$  die Normalen-Ableitung von  $\Phi$  bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, dass die Oberfläche bei festem Rauminhalt wie  $r^2$  wächst.

### 3.2 Spiegelladungsmethode

Diese Methode zur Lösung des Randwertproblems besteht darin, außerhalb des zu untersuchenden Bereichs sogenannte *Spiegel-Ladungen* geeigneter Größe so anzubringen, dass mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung addieren darf (vgl. Abschnitt 2.4). Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die zusammen mit der gewählten speziellen Lösung der Poisson-Gleichung die geforderten Randbedingungen erfüllt.

#### Punktladung vor leitender Ebene

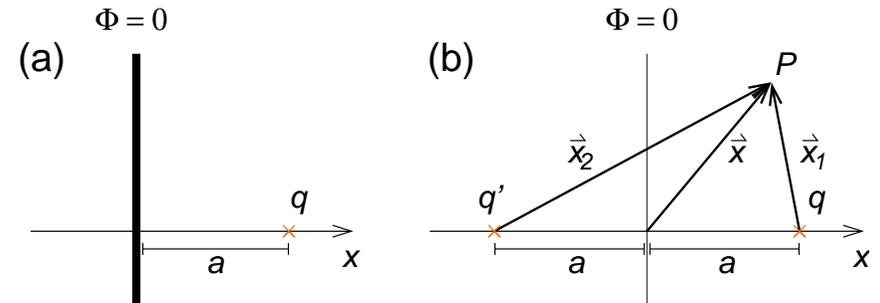
Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Punktladung  $q$  im Abstand  $a$  von einer leitenden Ebene, die geerdet sei (d.h.  $\Phi = 0$  auf der Ebene). Die Spiegelladung  $q'$  denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu  $q$  angebracht (Skizze).

Dann beträgt das Potential im Punkt  $P$ :

$$(4\pi\epsilon_0) \Phi(P) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \quad (3.16)$$

mit  $\vec{x}_1 = (a, 0, 0)$ ,  $\vec{x}_2 = (-a, 0, 0)$ , und wir erhalten wie gefordert  $\Phi = 0$  für alle Punkte der leitenden Ebene,  $x = 0$ , wenn wir wählen:

$$q' = -q. \quad (3.17)$$



**Abbildung 3.1:** (a) Physikalische Situation: Ladung  $q$  im rechten Halbraum vor geerdeter leitender Ebene bei  $x = 0$ . (b) Spiegelladung  $q'$ , symmetrisch zu  $q$  im linken Halbraum angebracht.

In dem (uns interessierenden) Bereich  $x > 0$  ist  $q/(4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_1|)$  eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung,  $q'/(4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_2|)$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, dass für  $x = 0$  die geforderte Randbedingung gilt.

#### Elektrisches Feld und Flächenladungsdichte

Für die Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  erhält man aus (3.16) und (3.17):

$$\begin{aligned} E_x(P) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x - a}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{x + a}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right), \\ E_y(P) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right), \\ E_z(P) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

also gilt für die Ebene  $x = 0$  wegen  $|\vec{x} - \vec{x}_1| = |\vec{x} - \vec{x}_2|$ , dass  $E_y(x = 0) = E_z(x = 0) = 0$  und

$$E_x(x = 0) = -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.19)$$

Wir sehen also, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Ebene  $x = 0$  steht (andernfalls würde ein Strom in der Ebenenoberfläche fließen bzw.

das Potential auf der Fläche nicht konstant sein). Gleichung (3.19) bedeutet nach dem Gauß'schen Gesetz (vgl. Kap. 2.3, Gl. (2.25); hier ist  $\vec{E} = 0$  für  $x < 0$ ), dass in der Ebene  $x = 0$  eine Ladung mit der (ortsabhängigen) Flächendichte  $\sigma = \epsilon_0 \vec{n} \vec{E}$ , also

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x(x=0) = -\frac{qa}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.20)$$

durch die Anwesenheit der Punktladung  $q$  *influenziert* wird. Für die gesamte influenzierte Ladung findet man

$$q_{\text{inf}} = \int df \sigma(y, z) = -\frac{qa}{2\pi} \int_0^\infty dr' \frac{2\pi r'}{(a^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = qa \left[ (a^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^\infty = -q,$$

wobei wir in der Ebene die Substitution  $r'^2 = y^2 + z^2$ ,  $df = 2\pi r' dr'$  verwendet haben.

### 3.3 Inversionsmethode

Ein weiterer Kunstgriff, um Lösungen der Poisson-Gleichung mit den richtigen Randbedingungen zu finden, beruht darauf, dass man eine bereits bekannte Lösung der Poisson-Gleichung ausnutzt, um eine weitere mit skalierten Ladungen und Ladungspositionen zu gewinnen.

Es sei  $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$  das Potential, das durch Punktladungen  $q_i$  am Ort  $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$  erzeugt wird:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\gamma_i}}; \quad (3.21)$$

hier bezeichnen  $(r_i, \vartheta_i, \varphi_i)$  die Orte der Punktladungen  $q_i$  und  $\gamma_i$  den Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}_i$ . Dann ist

$$\bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a}{r} \Phi\left(\frac{a^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) \quad (3.22)$$

das Potential, das die Punktladungen

$$\bar{q}_i = \frac{aq_i}{r_i} \quad (3.23)$$

bei  $\vec{r}_i = (a^2/r_i, \vartheta_i, \varphi_i)$  am Ort  $(r, \vartheta, \varphi)$  erzeugen (d.h. eben eine weitere Lösung der Poisson-Gleichung für eine andere Ladungskonfiguration). Es

ist zu beachten, dass drei neue Größen im Spiel sind: Neue Beträge der Ladungen  $\bar{q}_i$  an neuen Orten  $\vec{r}_i$  erzeugen ein neues Potential  $\bar{\Phi}$ .

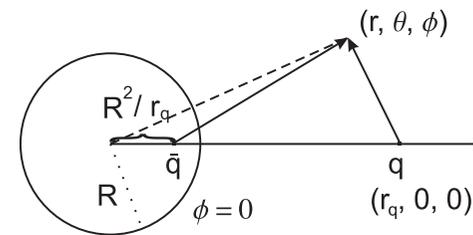
**Beweis:** Wir kombinieren Gleichungen (3.22) und (3.21) zu

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{\frac{a^4}{r^2} + r_i^2 - 2\frac{a^2}{r} r_i \cos\gamma_i}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\frac{aq_i}{r_i}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r_i^2} - 2r\frac{a^2}{r_i} \cos\gamma_i}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### Punktladung vor leitender, geerdeter Kugel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir eine Punktladung gegenüber einer leitenden Kugel, die sich auf dem Potential  $\Phi = 0$  befinden soll. Wir erfüllen die Randbedingung auf der Kugel durch eine Punktladung  $\bar{q}$ , deren Größe und Position so zu wählen sind, dass das resultierende Potential von  $q$  und  $\bar{q}$  auf der Kugeloberfläche gerade verschwindet. Das von der Punktladung  $q$ , lokalisiert am Ort  $(r_q, 0, 0)$ , im Punkt  $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$  erzeugte Potential werde mit  $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$  bezeichnet. Setzt man nun die Ladung  $\bar{q} = -Rq/r_q$  an den Ort  $(R^2/r_q, 0, 0)$  (vgl. Abb. 3.2) so ist das von  $\bar{q}$  am Ort  $(r, \vartheta, \varphi)$  erzeugte Potential nach (3.22):

$$\bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{R}{r} \Phi\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right). \quad (3.25)$$



**Abbildung 3.2:** Ladung vor geerdeter leitender Kugel: Positionierung der Spiegelladung nach der Inversionsmethode.

Auf der Kugeloberfläche,  $r = R$ , wird:

$$\bar{\Phi}(R, \vartheta, \varphi) = -\Phi(R, \vartheta, \varphi), \quad (3.26)$$

also wie gefordert

$$\bar{\Phi}(R, \vartheta, \varphi) + \Phi(R, \vartheta, \varphi) = 0. \quad (3.27)$$

Die gesuchte Lösung der Poisson-Gleichung außerhalb der leitenden Kugel ist dann:

$$\bar{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) + \Phi(r, \vartheta, \varphi) \quad (3.28)$$

mit

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|}. \quad (3.29)$$

### 3.4 Trennung der Variablen

Eine weitere Lösungsmethode für die Poissongleichung  $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$  besteht darin, durch einen Produktansatz  $\Phi(\vec{x}) = f(x)g(y)h(z)$  die partielle Differentialgleichung in mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen zu verwandeln, die in der Regel leichter zu lösen sind.

Als einfaches Beispiel wenden wir diese Methode auf die Suche nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.30)$$

an und nehmen dabei der Einfachheit halber an, dass wir ein in  $z$  translationsinvariantes Problem haben, d.h. dass  $\Phi$  von  $z$  nicht abhängt,

$$\Phi = \Phi(x, y). \quad (3.31)$$

Dann vereinfacht sich (3.30) in kartesischen Koordinaten zu:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = 0 \quad (3.32)$$

Da (3.32) keinen *Mischterm*  $\partial^2\Phi/\partial x\partial y$  enthält, liegt es nahe, folgenden *Separationsansatz* zu machen:

$$\Phi(x, y) = f(x)g(y); \quad (3.33)$$

dann geht (3.32) über in:

$$g(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + f(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) = 0. \quad (3.34)$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von  $f$  und  $g$  können wir die Gleichung durch  $\Phi(x, y)$  teilen, und (3.34) ist dann äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0. \quad (3.35)$$

Der erste Term in (3.35) hängt nur von  $x$ , der zweite nur von  $y$  ab; da  $x$  und  $y$  unabhängige Variablen sind, muss jeder der beiden Terme für sich konstant sein, und es folgt aus (3.35):

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{const} = -\frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \quad (3.36)$$

Wählen wir die Konstante in (3.36) z.B. positiv reell ( $= k^2$ ), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) = 0 \quad (3.37)$$

mit den Lösungen:

$$f(x) = a \exp(kx) + b \exp(-kx); \quad g(y) = c \sin(ky) + d \cos(ky). \quad (3.38)$$

Die Integrationskonstanten  $a, b, c, d$  und die Separationskonstante  $k$  werden durch Randbedingungen festgelegt.

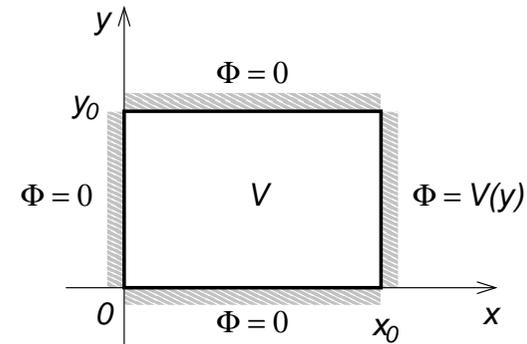


Abbildung 3.3: Blick auf den Querschnitt des Rechteckzylinders.

### Rechteck-Zylinder

Als Beispiel betrachten wir einen in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Rechteck-Zylinder (mit den Kantenlängen  $x_0$  und  $y_0$ ) mit den Randbedingungen (siehe Abb. 3.3):

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, y_0) = 0. \quad (3.39)$$

Daraus folgt

$$d = 0; \quad (\sin(ky_0) = 0) \rightarrow \left( k = \frac{n\pi}{y_0} = k_n \right). \quad (3.40)$$

Weiterhin seien die Randbedingungen

$$\Phi(0, \mathbf{y}) = 0; \quad \Phi(x_0, \mathbf{y}) = V(\mathbf{y}), \quad (3.41)$$

gegeben, wobei  $V(\mathbf{y})$  irgendeine vorgegebene Funktion ist. Aus (3.41) folgt zunächst  $f(0) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$ , d.h.

$$\left( \mathbf{a} = -\mathbf{b} \right) \rightarrow \left( f = \mathbf{a} \{ \exp(k_n x) - \exp(-k_n x) \} \right). \quad (3.42)$$

Um die Bedingung (3.41) auch noch zu erfüllen, entwickeln wir nach Fourier:

$$\Phi(x, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n \mathbf{y}) \sinh(k_n x), \quad (3.43)$$

und bestimmen die Koeffizienten  $A_n$  aus der Forderung

$$\Phi(x_0, \mathbf{y}) = V(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n \mathbf{y}) \sinh(k_n x_0). \quad (3.44)$$

Dazu multiplizieren wir Gl. (3.44) mit  $\sin(k_m \mathbf{y})$  und integrieren von 0 bis  $y_0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{y_0} d\mathbf{y} V(\mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_n x_0) \int_0^{y_0} d\mathbf{y} \sin(k_n \mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_n x_0) \frac{y_0}{2} \delta_{mn} = \frac{y_0}{2} A_m \sinh(k_m x_0), \end{aligned} \quad (3.45)$$

wobei wir die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-y_0}^{y_0} d\mathbf{y} \frac{1}{y_0} \sin(k_n \mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}) = \delta_{mn} \quad (3.46)$$

verwendet haben. Damit finden wir die Koeffizienten

$$A_m = \frac{2}{y_0 \sinh(k_m x_0)} \int_0^{y_0} d\mathbf{y} V(\mathbf{y}) \sin(k_m \mathbf{y}). \quad (3.47)$$

Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung lösen durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten; entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

### 3.5 Allgemeine Lösung der Potentialgleichung mit Randbedingungen

Mithilfe der Diracschen Deltafunktion schreiben wir die Feldgleichung für eine Punktladung als

$$\nabla \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) \quad (3.48)$$

bzw. mit  $\vec{E} = -\nabla \Phi(\vec{x})$

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) \quad (3.49)$$

Die Deltafunktion hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}) &= 0 \quad \text{in } \vec{x} \neq 0 \\ \int_V d^3x \delta(\vec{x}) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Wichtig ist die Beziehung

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta(\vec{x}) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \quad (3.51)$$

Es ist zu beachten, dass es sich bei der Diracschen Deltafunktion um eine Distribution, also eigentlich nicht um eine Funktion handelt. Man kann mit ihr aber weitgehend wie mit einer Funktion rechnen (unter Berücksichtigung der Regeln), weil sie sich als Grenzwert diverser Folgen gewöhnlicher Funktionen darstellen läßt. Allerdings ist die Diracschen Deltafunktion in der Regel nur dann sinnvoll eingesetzt, wenn über sie integriert wird.

Mit dem bekannten Potential einer Punktladung im Ursprung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} \quad (3.52)$$

finden wir

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta(\vec{x}) \quad (3.53)$$

Wir führen jetzt durch

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}_0) = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{mit} \quad G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (3.54)$$

die Greensche Funktion des Problems ein. Allerdings ist sie durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt; dazu müssen noch die Dirichlet- oder von Neumann-Randbedingungen berücksichtigt werden; das wollen wir jetzt tun.

### Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

Im freien Raum ist die allgemeine Lösung (Fundamentallösung) der Poisson-Gleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi_0(\vec{x}) \quad (3.55)$$

wobei  $\Phi_0(\vec{x})$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, d.h. eine sogenannte *harmonische Funktion* ist. (Beispiel für eine harmonische Funktion im  $\mathbb{R}^3$ :  $\Phi_0(\vec{x}) = \prod_{i=1}^3 (\alpha_i x_i + \beta_i)$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ .) Das gilt, weil  $G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$  gerade  $\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y})$  erfüllt, denn dann ist

$$\begin{aligned} \Delta_x \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) + \Delta_x \Phi_0(\vec{x}) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Da  $\Phi(\vec{x}) \rightarrow 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , ist  $\Phi_0 = 0$  die eindeutige Lösung.

### Allgemeine Lösung mit Dirichlet-Randbedingungen

Wir suchen jetzt die allgemeine Lösung für den Fall, dass Dirichlet-Randbedingungen auf dem Rand eines Gebietes  $V$  vorgegeben sind. Dazu betrachten wir zunächst das Potential  $\Phi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$  einer „Einheitsladung“ (d.h. einer Ladung  $q$ , sodass  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = 1$ ) bei  $\vec{y}$ , wenn der Rand von  $V$  ein geerdeter Leiter ist. Dieses Potential nennen wir Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen; sie ist charakterisiert durch

$$\Delta_x G_D(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{falls } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.57)$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \text{falls } \vec{x} \in \partial V \quad (3.58)$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = G_D(\vec{y}, \vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.59)$$

Die Symmetrie von  $G_D$  folgt aus den ersten beiden Eigenschaften. Um das zu zeigen, verwenden wir die zweite Green'sche Formel

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi), \quad (3.60)$$

die man erhält, wenn man den Gaußschen Integralsatz auf  $\vec{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$  anwendet. Wir setzen  $\varphi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$  und  $\psi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}, \vec{y}')$  und erhalten

$$\begin{aligned} &-4\pi \int_V d^3\mathbf{x} [G_D(\vec{x}, \vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}') - G_D(\vec{x}, \vec{y}') \delta(\vec{x} - \vec{y})] \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{x}) \cdot [G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_x G_D(\vec{x}, \vec{y}') - G_D(\vec{x}, \vec{y}') \nabla_x G_D(\vec{x}, \vec{y})] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wegen Gl. (3.58) verschwindet die rechte Seite, und es folgt daher

$$G_D(\vec{y}', \vec{y}) = G_D(\vec{y}, \vec{y}') \quad (3.62)$$

d.h. die dritte Bedingung, Gl. (3.59).

Sei nun die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  im Gebiet  $V$  gegeben, sowie das Potential  $\Phi(\vec{x})$  auf der Oberfläche  $\partial V$ . Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung mit der vorgegebenen Randbedingung soll  $\Phi(\vec{x})$  heißen. Dann ist

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V d^3\mathbf{y} \Phi(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{y} \Phi(\vec{y}) \Delta_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.63)$$

wobei wir Gl. (3.57) verwendet haben. Mit der zweiten Greenschen Formel (3.60) und  $\varphi(\vec{y}) = \Phi(\vec{y})$ ,  $\psi(\vec{y}) = G_D(\vec{x}, \vec{y})$

$$\begin{aligned} &\int_V d^3\mathbf{y} [\Phi(\vec{y}) \Delta_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y \Phi(\vec{y})] \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot [\Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_y \Phi(\vec{y})] \end{aligned} \quad (3.64)$$

sowie mit  $\Delta_y \Phi(\vec{y}) = -\frac{\rho(\vec{y})}{\epsilon_0}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot [\Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_y \Phi(\vec{y})] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Wegen Gl. (3.58) verschwindet der letzte Term, und die Lösung der Poisson-Gleichung mit der richtigen Randbedingung ist

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{y} \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \Phi(\vec{y}) \nabla_y G_D(\vec{x}, \vec{y})$$

$$(3.66)$$

Die Bedeutung dieses Ergebnisses liegt darin, dass wir nur noch die Greensche Funktion für eine Punktladung mit den richtigen Randbedingungen, Gl. (3.57)-(3.59), finden müssen, um beliebige Ladungsverteilungen  $\rho(\vec{y})$  zu behandeln.

### Allgemeine Lösung mit von Neumann-Randbedingungen

Die Konstruktion im Fall der von Neumannschen Randbedingungen ist etwas komplizierter, denn der naheliegende Ersatz für die Bedingung (3.58),

$$\vec{n}\nabla_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) = \partial_{n(\vec{y})} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \text{falls } \vec{y} \in \partial V \quad (3.67)$$

mit Normalableitung  $\partial_{n(\vec{y})} = \vec{n}\nabla_y$ ,  $\vec{n}(\vec{y})$  Normaleneinheitsvektor auf  $\partial V$  führt zu einem Widerspruch: wegen des Divergenztheorems gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} G_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \nabla_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) \\ &= \int_V d^3\vec{y} \Delta_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi \int_V d^3\vec{y} \delta(\vec{x} - \vec{y}) = -4\pi \end{aligned} \quad (3.68)$$

und nicht 0. Der naheliegende Ansatz ist daher  $\partial_{n(\vec{y})} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{-4\pi}{|\partial V|}$  falls  $\vec{y} \in \partial V$  wobei  $|\partial V|$  die Gesamtfläche von  $\partial V$  ist. Die Gleichungen für die Greensfunktion mit von Neumann-Randbedingungen lauten also

$$\Delta_x G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{falls } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.69)$$

$$\partial_{n(\vec{y})} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{-4\pi}{|\partial V|} \quad \text{falls } \vec{x} \in \partial V \quad (3.70)$$

$$G_N(\vec{x}, \vec{y}) = G_N(\vec{y}, \vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (3.71)$$

Mit derselben Rechnung wie vorher erhalten wir die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{y} \rho(\vec{y}) G_N(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot G_N(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_y \Phi(\vec{y}) \quad (3.72)$$

wobei

$$\langle \Phi \rangle_{\partial V} = \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \Phi(\vec{y}) \quad (3.73)$$

der Mittelwert des Potentials auf der Randfläche  $\partial V$  ist. Diese Konstante hat auf das elektrische Feld keinen Einfluss.

Die Möglichkeit, alle Dirichletschen und von Neumannschen Randwertprobleme auf zwei Typen von Greenschen Funktionen  $G_D$  und  $G_N$  zu reduzieren, beruht wesentlich auf der Linearität der Poisson-Gleichung.

### 3.6 Übersicht Elektrostatik

1.) Basis: *Coulomb-Gesetz*

$$\vec{K} = q\vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

2.) *Feldgleichungen:*

a) integral:

$$\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0; \quad \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

b) differentiell:

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.) *Elektrostatistisches Potential:*

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) *Feldenergie:*

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \rightarrow \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x} \rho\Phi \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\vec{x} E^2$$

Potentielle Energie der Punktladungen  $\rightarrow$  elektrostatische Feldenergie

