

2. Grundlagen der Elektrostatik

2.0 Wichtige Integralsätze

Im folgenden werden wir wiederholt die folgenden beiden Integralsätze im \mathbb{R}^3 benötigen (in der Vektoranalysis werden sie in allgemeinerer Form bzw. für den \mathbb{R}^n bewiesen).

Stokesscher Integralsatz (Rotationssatz)

Der Rotationssatz setzt das Flächenintegral über eine Ableitung einer Funktion mit dem Linienintegral dieser Funktion über den Rand der Fläche in Beziehung.

Sei \vec{A} ein C^1 -Vektorfeld auf einer abgeschlossenen, stetig partiell differenzierbaren Fläche F im \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand ∂F . Dann gilt:

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_F d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

Gaußscher Integralsatz (Divergenzsatz)

Der Divergenzsatz setzt das Volumenintegral über eine Ableitung einer Funktion zum Integral der Funktion über die geschlossene Fläche, die das Volumen einschließt, in Beziehung.

Sei \vec{A} ein C^1 -Vektorfeld im abgeschlossenen Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$, dessen Rand von einer geschlossenen, stetig partiell differenzierbaren Fläche ∂V gebildet wird. Dann gilt:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_V d^3r \text{div } \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

wobei $d\vec{f} = \vec{n}df$ mit nach außen zeigender Flächennormale \vec{n} .

Wegen dieser Integralsätze kann man viele physikalische Gesetze sowohl in einer differentiellen als auch in einer integralen Form schreiben.

2.1 Fluss eines Vektor-Feldes

Wir wollen im folgenden nach äquivalenten Formulierungen des Coulomb'schen Gesetzes suchen. Dazu führen wir den Begriff des Flusses eines Vektor-Feldes ein.

Ein Vektor-Feld $\vec{A}(\vec{r})$ sei auf einer Fläche F definiert. F sei *messbar* und *zweiseitig*, d.h. F möge einen endlichen Flächeninhalt besitzen und *Ober-* und *Unterseite* von F seien (durch die Flächennormale \vec{n}) wohl definiert.

Gegenbeispiel: das Möbius'sche Band.

Den Fluss ϕ des Vektor-Feldes \vec{A} durch die Fläche F definieren wir dann durch das Oberflächenintegral

$$\phi = \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F A_n df, \quad (2.3)$$

wobei $A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$ die Komponente von \vec{A} in Richtung der Flächennormalen \vec{n} ist. Das gerichtete Flächenelement $d\vec{f}$ ist parallel zu \vec{n} , $d\vec{f} = |d\vec{f}|$.

Zur Interpretation von (2.3) betrachten wir eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ und der Dichte $\rho(\vec{r})$. Wählen wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

so bedeutet

$$\int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \quad (2.5)$$

die pro Zeiteinheit durch F fließende Menge Flüssigkeit. (2.5) zeigt, dass nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam wird.

2.2 Gaußsches Gesetz

Wir wählen nun für \vec{A} das elektrostatische Feld \vec{E} und für F eine geschlossene Fläche mit den oben erwähnten Eigenschaften. Dann ist der *elektrische Fluss*

$$\phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_F E_N df \quad (2.6)$$

mit der in dem Volumen V enthaltenen Gesamtladung Q verknüpft durch das *Gaußsche Gesetz*:

$$\phi = \oint_F d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

In Worten: Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche ist proportional zur im Innern dieser Oberfläche enthaltenen Ladung.

Für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ lautet das Gaußsche Gesetz: Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Volumen und $\vec{E}(\vec{x})$ ein elektrisches Feld, das auf dem Rand ∂V von V wohldefiniert ist, dann gilt:

$$\oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \quad (2.8)$$

wobei $\rho(\vec{x})$ die Ladungsdichte ist, die $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$ erzeugt, und $d\vec{f}(\vec{y})$ ist das gerichtete Flächenelement auf ∂V ; $d\vec{f}(\vec{y})$ ist ein Vektor, der normal zur Tangentenebene bei \vec{y} ist und dessen Länge proportional zum Flächenelement df ist.

Beweis des Gaußschen Gesetzes

Das Gaußsche Gesetz ist eine Konsequenz des Coulombgesetzes. Wegen des Superpositionsprinzips genügt es, das Gaußsche Gesetz für eine Punktladung q abzuleiten. O.B.d.A. legen wir diese Punktladung in den Ursprung $\vec{0}$. Dann ist zu zeigen:

$$\int_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{falls } \vec{0} \in V \\ 0 & \text{falls } \vec{0} \notin V \end{cases} \quad (2.9)$$

mit $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$.

Wir beginnen mit dem

2. Fall: $\vec{0} \notin V$. Dann ist $\vec{E}(\vec{x})$ überall im Innern von V definiert, und wir können den Divergenzsatz anwenden. Dazu berechnen wir:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{1}{r} = 0, \quad (2.10)$$

denn (mit Summenkonvention)

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} &= -\partial_\alpha \left(\frac{x_\alpha}{r^3} \right) = -\frac{(\partial_\alpha x_\alpha)}{r^3} - x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3} \\
 \partial_\alpha x_\alpha &= \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3 \\
 \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{3}{r^4} \frac{x_\alpha}{r} = -\frac{3x_\alpha}{r^5} \\
 x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= -\frac{3x_\alpha x_\alpha}{r^5} = -\frac{3}{r^3} \\
 \curvearrowright \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Damit ist

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{0} \tag{2.12}$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz (Gl. (2.2)) folgt also

$$\int_V d^3x \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{0} \notin V, \tag{2.13}$$

was den zweiten Fall von Gl. (2.9) beweist.

1. Fall: $\vec{0} \in V$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit V durch eine kleine Kugel mit Zentrum $\vec{0}$ und Radius R ersetzen, da wir mit dem 2. Fall beliebige leere Volumina V erledigt haben. Dann ist in jedem Punkt der Kugeloberfläche \vec{E} parallel zur (äußeren) Flächennormale \vec{n} (siehe Fig. 2.1).

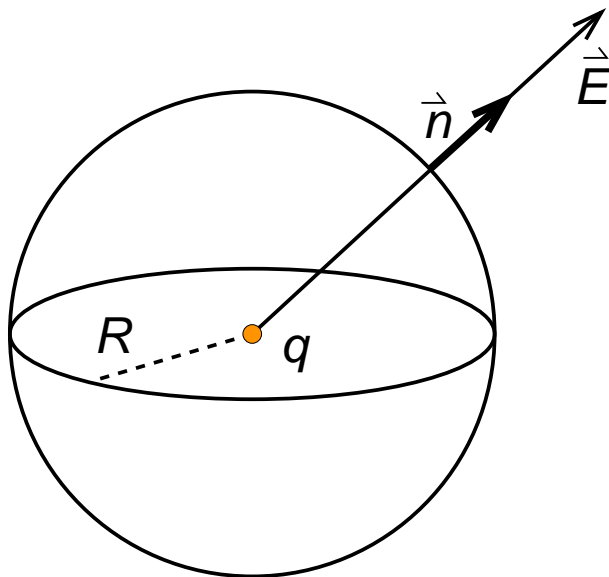


Abbildung 2.1:

Punktladung q in einer kleinen Kugel mit Radius R : Das elektrische Feld \vec{E} ist in jedem Punkt der Kugeloberfläche parallel zum Normalenvektor \vec{n} .

Für die Integration bei der Berechnung des Flusses wählen wir Kugelkoordinaten

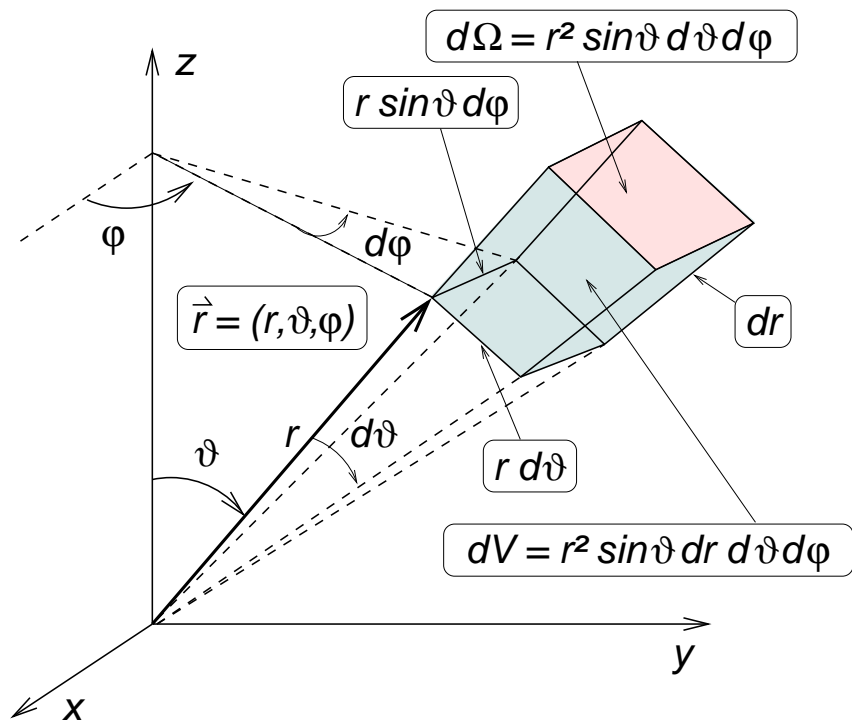
$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad x_3 = r \cos \vartheta \quad (2.14)$$

und haben deshalb das Flächenelement (siehe Fig. 2.2)

$$df = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.15)$$

und $d\vec{f}(\vec{r}) = df \vec{e}_r$.

Abbildung 2.2:
Geometrische Bestimmung des Raumwinkelelementes $d\Omega$ und des Volumenelementes dV in Kugelkoordinaten.



Der Fluss ist damit

$$\oint_{\partial V} d\vec{f}(\vec{y}) \cdot \vec{E}(\vec{y}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \frac{1}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

wobei wir $\vec{E} \parallel \vec{n}$ im Skalarprodukt benutzt haben. Damit haben wir auch den 1. Fall von Gl. (2.9) mit $\vec{0} \in V$ bewiesen.

2.3 Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet Gl. (2.7) die Möglichkeit, die Feldstärke \vec{E} mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten zwei Beispiele:

1.) Feld einer homogen-raumgeladenen Kugel

Sei

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) \quad \text{für } r \leq R, \quad \rho(\vec{r}) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (2.17)$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ radial gerichtet, so dass für den Fluss Φ gilt

$$\Phi = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = E(r) \int_{\partial V} df = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0}, \quad (2.18)$$

wobei $Q_r = \int_V d^3r \rho(\vec{r})$ die in einer konzentrischen Kugel V mit Radius r enthaltene Ladung ist.

Für Punkte mit $r \geq R$ ist $Q_r = Q$ die Gesamtladung und es folgt aus (2.18):

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r \geq R. \quad (2.19)$$

Für $r \leq R$ hängt das Ergebnis von der speziellen Form von $\rho(r)$ ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const}, \quad (2.20)$$

dann wird:

$$Q_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad (2.21)$$

also wie in (1.20):

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r. \quad (2.22)$$

Man vergleiche den Rechenaufwand hier mit dem, den Gleichung (1.15) erfordert!

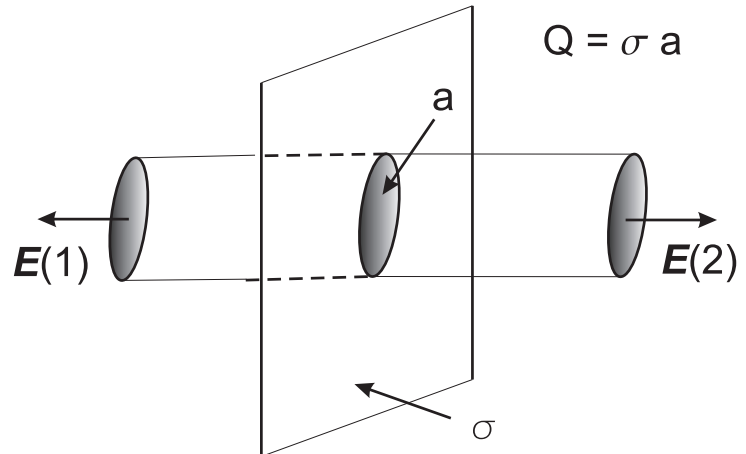
2.) Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene

Aus Symmetriegründen steht \vec{E} senkrecht zur Ebene, der Betrag E ist gleich für die Punkte 1 und 2, die von der Ebene den Abstand r haben mögen. Das Gauß'sche Gesetz ergibt dann:

$$\Phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = aE(1) + aE(2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}, \quad (2.23)$$

Abbildung 2.3:

Illustration des zur geladenen Ebene symmetrischen, zylinderförmigen Integrationsvolumens.



wenn \mathbf{a} die Zylindergrundfläche ist und σ die Flächenladungsdichte (siehe Abb. 2.3). Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da \vec{E} keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Wir erhalten für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.24)$$

unabhängig von r . Da das elektrische Feld auf beiden Seiten von der Flächenladung wegzeigt, bedeutet das Ergebnis, dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes (hier die einzige von Null verschiedene Komponente) an der Flächenladung um den Betrag σ/ϵ_0 springt. Wir erhalten also für das elektrische Feld (mit $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_3$)

$$\vec{E}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{\alpha\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 > 0 \\ \frac{(\alpha-1)\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

mit konstantem α . Das zugehörige Potential ist

$$\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{cases} -\frac{\alpha\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{x}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 > 0 \\ \frac{(1-\alpha)\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{x}_3 & \text{für } \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

und damit für jede Wahl von α stetig. α wird durch die Randbedingungen bei $\mathbf{x}_3 = \pm\infty$ festgelegt (die natürliche Wahl, dass das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet, ist hier nicht mit den Feldgleichungen vereinbar).

Etwas besser sieht das beim Plattenkondensator aus, den wir (idealisiert) als zwei parallele, geladene, unendlich ausgedehnte Ebenen beschreiben, eine bei $\mathbf{x}_3 = 0$ mit Ladungsdichte σ , eine bei $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}$ mit Ladungsdichte $-\sigma$. Das Superpositionsprinzip bedeutet, dass das elektrische Feld dieser

Konfiguration gerade die Summe (mit verschiedenen Vorzeichen) der obigen Lösungen ist. Die eindeutige Lösung, bei der das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet, ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{für } x_3 > 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_3 & \text{für } 0 < x_3 < b \\ \vec{0} & \text{für } x_3 > b \end{cases} \quad (2.27)$$

und das Potential ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} C & \text{für } x_3 > 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x_3 + C & \text{für } 0 < x_3 < b \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} b + C & \text{für } x_3 > b \end{cases} \quad (2.28)$$

Die Differenz des Potentials bei $x_3 = 0$ und $x_3 = b$ ist gerade $\sigma b / \epsilon_0$. Das entspricht der Arbeit $W = bE_3$, die eine Einheitsladung beim Durchgang durch den Kondensator leisten muss (oder aufnimmt).

2.4 Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential

Wir wollen das Gauß'sche Gesetz (2.7) in differentieller Form darstellen. Dazu formen wir das Flächenintegral um in ein Volumenintegral über das von F eingeschlossene Volumen V (Gaußscher Integralsatz):

$$\oint_F d\vec{f} \cdot \vec{E} = \int_V dV \nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (2.29)$$

Mit

$$Q = \int_V dV \rho(\vec{r}) \quad (2.30)$$

folgt dann:

$$\int_V dV \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0 . \quad (2.31)$$

Gleichung (2.31) muss für beliebige Volumina V gelten, kann also nur erfüllt sein, wenn der Integrand verschwindet:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} . \quad (2.32)$$

Dies ist eine der zwei Feldgleichungen der Elektrostatik. Gleichung (2.32) ändert sich nicht, wenn man zu \vec{E} eine beliebige divergenzfreie Vektorfunktion \vec{E}' addiert; Gleichung (2.32) reicht daher zur Bestimmung des elektrischen Feldes nicht aus.

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Eine weitere differenzielle Beziehung für \vec{E} erhalten wir aus (vgl. (1.11))

$$\vec{E} = -\nabla\Phi, \quad (2.33)$$

wobei Φ hier das elektrische Potential ist. Wir verwenden jetzt die Beziehung

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0, \quad (2.34)$$

die hier für das Potential geschrieben ist, aber allgemein gilt. Für jede der drei Komponenten ist

$$(\nabla \times \vec{E})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0 \quad (2.35)$$

wegen der Antisymmetrie von ϵ_{ijk} . Z.B. gilt

$$i = 1: \quad \epsilon_{1jk} \partial_j \partial_k = \underbrace{\epsilon_{123}}_{=+1} \partial_2 \partial_3 + \underbrace{\epsilon_{132}}_{=-1} \partial_3 \partial_2 = 0. \quad (2.36)$$

Gleichung (2.33) ist über die Vektoridentität Gl. (2.34) äquivalent zur *Wirbelfreiheit*

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \quad (2.37)$$

des elektrischen Feldes. Dies ist die zweite der Feldgleichungen der Elektrostatik. Sie besagt, dass das durch das elektrische Feld definierte Kraftfeld konservativ ist, d.h. dass

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad (2.38)$$

d.h. auf einem geschlossenen Weg wird keine Arbeit verrichtet. Das folgt aus dem Stokesschen Integralsatz

$$\oint_{\partial F} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_F d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}), \quad (2.39)$$

wobei F eine zweidimensionale Fläche mit eindimensionalem Rand ∂F ist. Aus (2.32) und (2.37) kann man bei gegebener Ladungsverteilung ρ die

Feldstärke des elektrostatischen Feldes bestimmen, was jedoch recht aufwendig ist.

Poisson'sche Gleichung

In der Praxis geht man noch einen Schritt weiter von der Feldstärke \vec{E} zum Potential Φ , aus dem sich durch Differentiation gemäß (2.33) \vec{E} gewinnen lässt. Setzt man (2.33) in (2.32) ein, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.40)$$

die *Poisson'sche Gleichung* mit der Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.41)$$

für den *Laplace-Operator* Δ . Die Poisson-Gleichung kann anstelle der beiden Feldgleichungen (2.32) und (2.37) gelöst werden.

Laplace Gleichung

Hat man eine Lösung von (2.40) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, der *Laplace-Gleichung*,

$$\Delta \Phi = 0 \quad (2.42)$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.40). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen!

2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Die Kraft, die eine Ladung im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{x})$ erfährt, ist $\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$. Das elektrische Feld ist seinerseits der negative Gradient des elektrischen Potentials $\Phi(\vec{x})$. Daher ist die elektrische Kraft, die die Probeladung q erfährt, gerade der negative Gradient von $q\Phi(\vec{x})$. Dies ist also die potentielle elektrische Energie, die die Probeladung im elektrischen Kraftfeld besitzt.

Insbesondere ist die Arbeit

$$W = - \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = q \int_A^B d\vec{l} \cdot \nabla \Phi(\vec{x}) = q\Phi(\vec{x}_B) - q\Phi(\vec{x}_A) \quad (2.43)$$

gerade die Differenz der potentiellen Energie an den Endpunkten. Mit dem Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \quad (2.44)$$

der Punktladung q_1 am Ort \vec{x}_1 ist die potentielle Energie, die man gewinnt (benötigt), um eine zweite Punktladung q_2 aus dem Unendlichen (wo das Potential verschwindet) auf den Abstand $r_{12} = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ heranzubringen

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (2.45)$$

Jetzt betrachten wir N Punktladungen q_i bei \vec{x}_i . Wir können die elektrostatische Energie dieser Konfiguration berechnen, indem wir die Punktladungen sukzessive aus dem Unendlichen ins Potential der vorhandenen Punktladungen einführen; wegen des Superpositionsprinzips ergibt das die Energie

$$U_N = U_{N-1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i q_N}{|\vec{x}_i - \vec{x}_N|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.46)$$

Der Faktor $1/2$ sorgt dafür, dass Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung $i \neq j$ schließt *Selbstenergien* der Punktladungen aus.

Punktladungen versus Feldenergie

Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man U als die *potentielle Energie* eines Systems von geladen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie U im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von *Feldenergie*. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

Energie des elektrischen Feldes

Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, gehen wir von den Punktladungen in Gl. (2.46) zunächst zu Ladungsdichten über (vergl. Kap. 1.4):

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.47)$$

Mit dem Potential, das eine Ladungsdichte ρ am Ort \vec{x} erzeugt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.48)$$

wird das zu

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}), \quad (2.49)$$

Gleichung (2.49) können wir mit Gl. (2.40) $\rho = -\epsilon_0 \Delta \Phi$ umschreiben zu:

$$\mathbf{U} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \Phi(\vec{x}) \Delta \Phi(\vec{x}). \quad (2.50)$$

Gleichung (2.50) beschreibt die Energie \mathbf{U} vollständig durch das Potential Φ , d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann \mathbf{U} statt durch das Potential Φ durch die Feldstärke \vec{E} ausdrücken, wenn man die Identität

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \Delta g \quad (2.51)$$

für $f = g = \Phi$ benutzt und den Gauß'schen Integralsatz anwendet, wonach

$$\int_V dV \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \Phi \nabla \Phi \quad (2.52)$$

Da wir in Gl. (2.50) über den ganzen \mathbb{R}^3 integriert haben, betrachten wir jetzt wachsende Volumina $V \rightarrow \infty$ mit entsprechend wachsenden Oberflächen ∂V :

$$\mathbf{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\nabla \Phi(\vec{x}))^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \Phi \nabla \Phi, \quad (2.53)$$

Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.53) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen V , da $\Phi \nabla \Phi$ mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie R^{-3} abfällt, während die Oberfläche nur mit R^2 anwächst. Im Limes $V \rightarrow \infty$ bleibt also:

$$\mathbf{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} (\nabla \Phi(\vec{x}))^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (2.54)$$

als die im elektrischen Feld gespeicherte Energie.

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{x})|^2}$$

ist somit die *Energiedichte* des elektrischen Feldes. Diese ist immer positiv, was etwas überrascht, da die potentielle Energie U_N aus Gl. (2.46) nicht immer positiv ist. Grund sind die bei U_N abgezogenen Selbstenergien, die in Gl. (2.54) enthalten sind und U für Punktladungen unendlich werden lassen.

2.6 Multipole im elektrischen Feld

Wenn eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in ein äußeres elektrostatisches Feld, gegeben durch sein Potential Φ_a , gebracht wird, so gilt (entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.5) für seine Energie

$$U = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi_a(\vec{x}), \quad (2.55)$$

wenn man annimmt, dass das äußere Feld durch ρ nicht (merklich) geändert wird und die das äußere Feld Φ_a hervorrufenden Ladungen sich außerhalb des Gebietes V befinden, auf das ρ beschränkt ist. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors $1/2$ in Gl. (2.55) verglichen mit Gl. (2.49). Weiter sei Φ_a in V langsam veränderlich, so dass wir Φ_a bzgl. des Ladungsschwerpunktes von $\rho(\vec{x})$ (den wir o.B.d.A. in den Ursprung des \vec{x} -Systems legen) in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\Phi_a(\vec{x}) = \Phi_a(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \Phi_a(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_a(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \quad (2.56)$$

Da im Gebiet V für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \vec{E}_a = 0 \quad (2.57)$$

nach Annahme gilt, können wir (vergl. Abschnitt 1.5) Gleichung (2.56) wie folgt umformen:

$$\Phi_a(\vec{x}) = \Phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots, \quad (2.58)$$

denn der ergänzte Term trägt nichts bei:

$$\sum_{i,j} (-r^2) \delta_{ij} \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j} = -r^2 \sum_i \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_i} = -r^2 \nabla \cdot \vec{E}_a = 0.$$

Kombination von Gl. (2.55) und Gl. (2.58) ergibt zusammen mit $Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{kl})$ (siehe (1.34))

$$\mathbf{U} = Q\Phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 d_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots \quad (2.59)$$

Gleichung (2.59) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung ρ mit einem äußeren Feld \vec{E}_a in Wechselwirkung treten:

- i) Wenn die Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ eine Gesamtladung $Q \neq 0$ besitzt, dann beschreibt der erste Term die potentielle Energie $\mathbf{U} = Q\Phi_a(0)$ einer Ladung Q im äußeren Potential $\Phi_a(0)$. Die Gesamtladung Q wechselwirkt also mit dem Potential Φ_a .
- ii) Wenn $Q = 0$ ist, dann ist der führende Term $\mathbf{U} = -\vec{d}\vec{E}_a(0)$ der Dipolterm. Das Dipolmoment \vec{d} wechselwirkt also mit der Feldstärke \vec{E}_a . Dieser Ausdruck wird oft auf einen ortsfesten Dipol \vec{d} am Ort $\vec{x} = \vec{0}$ angewendet, der aber seine Orientierung relativ zum Feld $\vec{E}_a(0)$ (bei $\mathbf{d} = |\vec{d}| = \text{const}$) ändern kann. Dann ist $\mathbf{U} = -dE_a(0) \cos \vartheta$ (mit Winkel ϑ zwischen \vec{d} und $\vec{E}_a(0)$). Minimale potentielle Energie stellt sich für $\vartheta = 0$ ein (wegen des Vorzeichen des Terms). Wenn das elektrische Feld homogen ist ($\vec{E}(\mathbf{x}) = \text{const}$), hat der Dipol an jeder Stelle des Feldes dieselbe potentielle Energie. Es ist also nur für ein inhomogenes äußeres Feld ein Dipolbeitrag zur Kraft auf eine Ladungsverteilung zu erwarten. (Auch im inhomogenen elektrischen Feld kann es ein Drehmoment geben.)
- iii) Wenn $Q = 0$ und $\vec{d} = 0$ sind, dann ist der führende Term der Quadrupolterm. Er leistet nur in inhomogenen Feldern $\partial_j E_{ia} \neq 0$ einen Beitrag. Der Quadrupoltensor Q_{ij} wechselwirkt also mit dem Feldgradienten $\partial E_{ia}/\partial x_j$. Wegen der Symmetrie des Quadrupolmomentes $Q_{ij} = Q_{ji}$ kann man den Quadrupolbeitrag zur Energie auch symmetrisiert schreiben:

$$-\frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \partial_j E_{ia}(0) = -\frac{1}{12} \sum_{ij} Q_{ij} (\partial_j E_{ia}(0) + \partial_i E_{ja}(0)) \quad (2.60)$$

Anwendungsbeispiele

Atomare Dipole im äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolmoments mit der Elektronenhülle.