

---

# Theoretische Elektrodynamik

---

**SS 2008**

Harald Jeschke, Universität des Saarlandes/Universität Frankfurt  
auf Grundlage eines Skripts von Claudius Gros, Universität Frankfurt

# Inhaltsverzeichnis

<b>0 Einführung in die Elektrodynamik</b>	<b>1</b>
0.1 Elektrische Ladung . . . . .	1
0.2 Elektrostatik . . . . .	1
0.3 Magnetostatik . . . . .	2
0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . . .	3
0.5 Maxwell'sche Gleichungen . . . . .	4
0.6 Materie im elektromagnetischen Feld . . . . .	4
0.7 Literatur . . . . .	6
<b>I Elektrostatik</b>	<b>7</b>
<b>1 Coulomb'sches Gesetz</b>	<b>8</b>
1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz . . . . .	8
1.2 Coulomb-Kraft . . . . .	9
1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen . . . . .	11
1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen . . . . .	12
1.5 Multipolentwicklung . . . . .	16
<b>2 Grundlagen der Elektrostatik</b>	<b>22</b>
2.0 Wichtige Integralsätze . . . . .	22
2.1 Fluss eines Vektor-Feldes . . . . .	23
2.2 Gaußsches Gesetz . . . . .	23
2.3 Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes . . . . .	26
2.4 Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential . . . . .	29
2.5 Energie des elektrostatischen Feldes . . . . .	31
2.6 Multipole im elektrischen Feld . . . . .	34
<b>3 Randwertprobleme der Elektrostatik</b>	<b>36</b>
3.0 Grundproblem der Elektrostatik . . . . .	36

3.1 Eindeutigkeitstheorem . . . . .	36
3.2 Spiegelladungsmethode . . . . .	38
3.3 Inversionsmethode . . . . .	40
3.4 Trennung der Variablen . . . . .	42
3.5 Allgemeine Lösung der Potentialgleichung mit Randbedingungen . . . . .	45
3.6 Übersicht Elektrostatik . . . . .	49

## II Magnetostatik **51**

### 4 Ampère'sches Kraftgesetz **52**

4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung . . . . .	52
4.2 Lorentzkraft und magnetische Induktion . . . . .	54
4.3 Das Biot-Savart-Gesetz . . . . .	57
4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld . . . . .	60
4.5 Kräfte zwischen Strömen . . . . .	63

### 5 Grundgleichungen der Magnetostatik **65**

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion . . . . .	65
5.2 Rotation der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ . . . . .	66
5.3 Vektor-Potential und Eichung . . . . .	68
5.4 Multipolentwicklung . . . . .	70
5.5 Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld . . . . .	72
5.6 Übersicht über die Magnetostatik . . . . .	74

## III Grundlagen der Elektrodynamik **75**

### 6 Die Maxwell'schen Gleichungen **76**

6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . . .	76
6.2 Faradaysches Induktionsgesetz . . . . .	76
6.3 Diskussion des Induktionsgesetzes . . . . .	78
6.4 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom . . . . .	81
6.5 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	83

### 7 Die elektromagnetischen Potentiale **84**

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential . . . . .	84
7.2 Lorenz-Eichung . . . . .	86

7.3	Coulomb-Eichung . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes</b>	<b>90</b>
8.1	Energie . . . . .	90
8.2	Impuls . . . . .	92
8.3	Drehimpuls . . . . .	97
8.4	Zusammenfassung . . . . .	98
<b>IV</b>	<b>Elektromagnetische Strahlung im Vakuum</b>	<b>99</b>
<b>9</b>	<b>Das elektromagnetische Feld im Vakuum</b>	<b>100</b>
9.1	Homogene Wellengleichungen . . . . .	100
9.2	Ebene Wellen . . . . .	101
9.3	Monochromatische ebene Wellen . . . . .	105
9.4	Polarisation . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Wellenpakete im Vakuum</b>	<b>112</b>
10.1	Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen . . . . .	112
10.2	Fourier-Reihen und Fourier-Integrale . . . . .	113
10.3	$\delta$ -Distribution . . . . .	116
10.4	Überlagerung monochromatischer ebenen Wellen . . . . .	117
10.5	Wellenpakete, Phasen und Gruppengeschwindigkeit . . . . .	119
<b>V</b>	<b>Quellen elektromagnetischer Strahlung</b>	<b>125</b>
<b>11</b>	<b>Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen</b>	<b>126</b>
11.1	Problemstellung . . . . .	126
11.2	Berechnung der Greenschen Funktion . . . . .	128
11.3	Retardierte Potentiale . . . . .	134
11.4	Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen . . . . .	139
<b>12</b>	<b>Multipolstrahlung</b>	<b>144</b>
12.1	Langwellen-Näherung . . . . .	144
12.2	Elektrische Dipol-Strahlung . . . . .	146
12.3	Magnetische Dipol-Strahlung . . . . .	149
12.4	Elektrische Quadrupol-Strahlung . . . . .	150

<b>VI</b>	<b>Das elektromagnetische Feld in Materie</b>	<b>155</b>
<b>13</b>	<b>Makroskopische Felder</b>	<b>156</b>
13.1	Makroskopische Mittelwerte . . . . .	156
13.2	Freie und gebundene Ladungsträger . . . . .	158
13.3	Mikroskopische Ströme . . . . .	159
13.4	Polarisation und Magnetisierung . . . . .	163
<b>14</b>	<b>Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes</b>	<b>165</b>
14.1	Energie . . . . .	165
14.2	Impuls, Drehimpuls . . . . .	167
14.3	Die Kirchhoffschen Regeln . . . . .	168
<b>15</b>	<b>Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen</b>	<b>170</b>
15.1	Allgemeine Stetigkeitsbedingungen . . . . .	170
15.2	Lineare, isotrope Medien . . . . .	173
15.3	Reflexion und Brechung von Licht . . . . .	175
15.4	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitendem Material	180
<b>VII</b>	<b>Relativistische Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>183</b>
<b>16</b>	<b>Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen</b>	<b>184</b>
16.0	Die spezielle Relativitätstheorie . . . . .	184
16.1	Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum . . . . .	186
16.2	Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts	190
16.3	Gaußsches cgs-System . . . . .	193
16.4	Ströme, Dichten, Potentiale . . . . .	194
16.5	Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie . . . . .	196
16.6	Transformation der Felder . . . . .	198

# 0. Einführung in die Elektrodynamik

## 0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:

- 1.) Es gibt 2 Sorten von *Ladungen*: positive und negative. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.
- 2.) Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die Ladung ist ein *Skalar*.
- 3.) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant und ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand des Systems.
- 4.) Ladung kommt nur als Vielfaches einer *Elementarladung*  $e$  (eines Elektrons) vor,

$$q = ne; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Klassischer Nachweis für die *Quantisierung* der Ladung ist der *Millikan-Versuch*. Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h.  $q = \pm(1/3)e$  bzw.  $q = \pm(2/3)e$ , jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

## 0.2 Elektrostatik

Das einfachste Problem der Elektrodynamik ist der Fall ruhender Ladungen, den wir mit *Elektrostatik* bezeichnen. Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung*

$q$ , so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft  $\vec{K}$ , die im allgemeinen vom Ort  $\vec{r}$  der Probeladung abhängt:

$$\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}) .$$

Ersetzt man  $q$  durch eine andere Probeladung  $q'$ , so findet man für die auf  $q'$  wirkende Kraft  $\vec{K}'$ :

$$\vec{K}'/q' = \vec{K}/q .$$

## Elektrisches Feld

Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \vec{K}(\vec{r})$$

einzuführen. Da die Testladung das Feld selbst ändert, ist der Grenzübergang verschwindender Testladung (d.h. Testladung muss hinreichend klein sein) erforderlich. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt  $\vec{r}$  ein Tripel reeller Zahlen zu, das sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang von Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  und elektrischem Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  zu finden und daraus bei gegebener Ladungsverteilung (z.B. einer homogenen räumlichen Kugel) das Feld zu berechnen.

## 0.3 Magnetostatik

Bewegte Ladungen in Form stationärer Ströme sind der Ursprung magnetostatischer Felder, die wir in Analogie zu den elektrostatischen Feldern einführen wollen. Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung  $q$ , so kann die auf  $q$  am Ort  $\vec{r}$  wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\vec{K}(\vec{r}) = q \left( \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right) .$$

Dabei ist  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit der Probeladung und  $\vec{B}(\vec{r})$  ein (von  $\vec{v}$  unabhängiges) Vektorfeld, der *magnetischen Induktion*, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer stationären Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  und dem magnetischen Feld  $\vec{B}(\vec{r})$  zu finden und daraus bei gegebener Stromverteilung (z.B. für einen stationären Kreisstrom) das Feld zu berechnen.

#### 0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, als seien das elektrische und das magnetische Feld von einander unabhängige Größen. Dass dies nicht der Fall ist, zeigen folgende einfache Überlegungen:

1.) Lorentz-Transformation. Wenn eine Punktladung  $Q$  in einem Inertialsystem  $\Sigma$  ruht, so misst (über die auf eine Probeladung  $q$  wirkende Kraft) ein Beobachter in  $\Sigma$  ein elektrisches Feld  $\vec{E} \neq 0$ , jedoch kein Magnetfeld.

Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber  $\Sigma$  bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in  $\Sigma'$  misst daher sowohl ein elektrisches Feld  $\vec{E}' \neq 0$  als auch ein magnetisches Feld  $\vec{B}' \neq 0$ . Die Wechselwirkung zwischen der betrachteten Ladung und einer Probeladung  $q$  würde also von einem Beobachter in  $\Sigma$  als *rein elektrische* Wechselwirkung (vermittelt durch das Feld  $\vec{E}$ ) beschrieben, während ein Beobachter in  $\Sigma'$  sowohl *elektrische* als auch *magnetische* Wechselwirkung feststellen würde (vermittelt durch die Felder  $\vec{E}'$  und  $\vec{B}'$ ). Diese Betrachtung zeigt, dass man elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen muss, als *elektromagnetisches* Feld.

**Anmerkung:** Für den in 0.3 diskutierten Fall eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters tritt kein elektrisches Feld auf, da bei einem stationären Strom im Leiter kein *Ladungsstau* auftritt, so dass sich die im Leiter befindlichen positiven und negativen Ladungsträger (Gitterbausteine und Leitungselektronen) nach außen hin kompensieren.

2.) Kontinuitätsgleichung. Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann die Verknüpfung von  $\rho$  und  $\vec{j}$  via der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 ,$$

da die Ladung in einem bestimmten Volumen  $V$  nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von  $V$  hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

#### 0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und den Ladungen (den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes) beschreiben die *Maxwell-Gleichungen*. Folgende Aufgabe ergibt sich:

- 1.) die Maxwell-Gleichungen zu formulieren und experimentell zu begründen,
- 2.) ihre Invarianzeigenschaften zu untersuchen, woraus sich direkt der Zugang zur speziellen Relativitätstheorie ergibt. Die Untersuchung wird zeigen, dass der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine *Lorentz-Transformation* beschrieben werden muss, d.h. dass für alle Inertialbeobachter die *gleiche Physik gilt*.
- 3.) Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld werden dazu führen, dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen. Daraus werden sich dann Begriffe wie *Strahlungsdruck* und die Einführung von *Photonen* ergeben.
- 4.) Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen. Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols.

#### 0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  vollständig, wenn die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  und die Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  bekannt sind. In der Praxis treten dabei folgende Probleme auf:

- 1.) Für ein System von  $N$  geladenen Massenpunkten müsste man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  *mikroskopisch* berechnen zu können. Für ein Stück Materie von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. das Dielektrikum zwischen den Platten eines

Kondensators oder dem Eisenkern einer stromdurchflossenen Spule) haben wir es mit  $10^{20} - 10^{25}$  Massenpunkten zu tun!

- 2.) Die mikroskopisch berechneten Funktionen  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen. Die Lösung von Maxwell-Gleichungen (mehrdimensionale Integrationen) wäre dann praktisch nicht durchführbar bzw. unökonomisch!

### Gemittelte Felder

Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet der folgende Kompromiss: Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen (Volumina von  $10^{-24} \text{ cm}^3$ , Zeiten von  $10^{-8} \text{ sec}$ ) und geben uns mit Mittelwerten ( $10^{-6} \text{ cm}^3$ ,  $10^{-3} \text{ sec}$ ) zufrieden. Anstelle von  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  treten dann Mittelwerte der Form

$$\langle \rho(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d^3x d\tau \rho(\vec{r} + \vec{x}, t + \tau)$$

und entsprechend für  $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle$ ,  $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$  und  $\langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle$ . Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld. Die darin auftretenden Verteilungen  $\langle \rho \rangle$  und  $\langle \vec{j} \rangle$  werden dann durch den experimentellen Aufbau definiert bzw. *eingestellt*.

### Fundamentale und makroskopische Felder

Für die Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zu den Mittelwerten der *fundamentalen* Felder,

*elektrische Feldstärke*  $\vec{E}$  und  
*magnetische Induktion*  $\vec{B}$ ,

noch zwei weitere Vektorfelder als Hilfsgrößen einzuführen:

*dielektrische Verschiebung*  $\vec{D}$  und  
*magnetische Feldstärke*  $\vec{H}$ .

Die dann zusätzlich benötigten Bestimmungsgleichungen gewinnt man durch Annahme eines linearen Zusammenhanges von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ , charakterisiert durch

*Dielektrizitätskonstante*  $\epsilon$  und *Permeabilität*  $\mu$ .

Häufig ist die makroskopische Stromverteilung nicht von außen vorgebar, sondern noch von den zu berechnenden Feldern abhängig. Im einfachsten Fall (Ohm'sches Gesetz) setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen makroskopischem Strom und elektrischer Feldstärke an, womit (als Proportionalitätskonstante) eine weitere Materialkonstante ins Spiel kommt: die

*elektrische Leitfähigkeit*  $\sigma$ .

Die Berechnung dieser Materialkonstanten ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) aus der atomaren Struktur der Materie gehört in den Bereich der Atom- und Festkörperphysik und benutzt Methoden der statistischen Mechanik.

Damit ergeben sich folgende **Aufgabenstellungen**:

- 1.) Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen.
- 2.) Einführung von Materialkonstanten und ihre Berechnung aus der atomaren Struktur der Materie für einfache Modelle.
- 3.) Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien.  
Beispiel: Das Reflexions- und Brechungs-Gesetz der Optik.

### 0.7 Literatur

An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. W. Nolting, *Elektrodynamik* (Grundkurs Theoretische Physik 3), Springer, Berlin.
2. J. Schnakenberg, *Elektrodynamik*, Wiley-VCH.
3. J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter.
4. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik* (Theoretische Physik, Band 3), Harri Deutsch.
5. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* (Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 2), Akademie-Verlag.
6. M. R. Gaberdiel, *Klassische Elektrodynamik*, ETH Zürich Vorlesungsskript.

# Teil I

## Elektrostatik

## 1. Coulomb'sches Gesetz

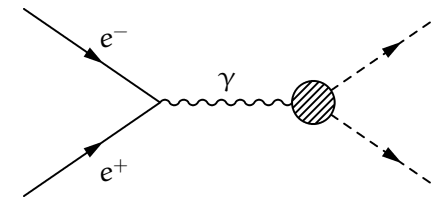
### 1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz

In der Einführung hatten wir die grundlegenden Eigenschaften der elektrischen Ladung kurz zusammengestellt. Zur experimentellen Prüfung dieser Eigenschaften benötigt man zunächst eine Messvorschrift für *Ladung*. Eine solche Messvorschrift wird im nächsten Unterkapitel nachgeliefert. Zuvor noch einige Ergänzungen zur Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz.

#### Paarerzeugung

Besonders eindrucksvolle Beweise für die Ladungserhaltung sind die Paarerzeugung und Paar-Vernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron ( $e^-$ ) und ein Positron ( $e^+$ ) in ein hochenergetisches *massives* Photon ( $\gamma$ -Quant), das ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-Erzeugung (z.B. in  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.

Die Ladungsinvarianz zeigt sich z.B. darin, dass Atome und Moleküle neutral sind, obwohl der Bewegungszustand von Photonen und Elektronen sehr unterschiedlich ist. Besonders klar ist das Beispiel des Helium-Atoms ( ${}^4\text{He}$ ) und des Deuterium-Moleküls ( $\text{D}_2$ ). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral, obwohl der Bewegungszustand der Protonen im Kern des Helium-Atoms



$$+e + (-e) = 0 \quad q = 0 \quad +e + (-e) = 0$$

Abbildung 1.1: Paar-Vernichtung und Paar-Erzeugung.

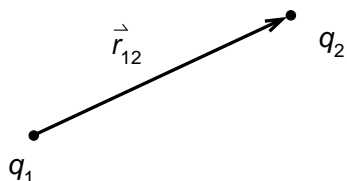
und des  $D_2$ -Moleküls sehr verschieden sind: das Verhältnis der kinetischen Energien ist etwa  $10^6$ , der mittlere Abstand der Protonen im  $D_2$ -Molekül in der Größenordnung von  $10^{-10}$  m, im He-Kern von  $10^{-15}$  m.

## 1.2 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das *Coulomb'sche* Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\vec{K}_{12} = \Gamma_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.1)$$

ist die von Ladung  $q_1$  auf Ladung  $q_2$  ausgeübte Kraft. Sie ist also umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den Ladungen. Hierbei ist  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  und  $\Gamma_e$  eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante.



**Abbildung 1.2:**

Verbindungsvektor  $\vec{r}_{12}$  zwischen zwei Ladungen.

### Eigenschaften:

- 1.) Anziehung (Abstoßung) für ungleichnamige (gleichnamige) Ladungen.
- 2.)  $\vec{K}_{12} = -\vec{K}_{21}$ : Actio = Reactio; also ist der Impuls der beiden Teilchen erhalten.
- 3.) Zentralkraft: da eine Punktladung (beschrieben durch die skalaren Größen  $m, q$ ) im Raum keine Richtung auszeichnet. ( $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung)

**Anmerkung:** Für (schnell) bewegte Ladungen gilt Gl. (1.1) nicht mehr. Das elektromagnetische Feld ist dann in die Impuls- und Drehimpulsbilanz einzubeziehen.

Gleichung (1.1) ist zu ergänzen durch das *Superpositionsprinzip*:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_{21} + \vec{K}_{31} \quad (1.2)$$

für die von 2 Punktladungen  $q_2$  und  $q_3$  auf  $q_1$  ausgeübte Kraft.

## Messvorschrift für Ladung

Vergleicht man 2 Ladungen  $q, q'$  am Ort  $\vec{r}_1$  anhand der von einer festen Ladung  $Q$  am Ort  $\vec{r}_2$  auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß Gl. (1.1):

$$\vec{K}_{12} = \Gamma_e \frac{qQ}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad \text{und} \quad \vec{K}'_{12} = \Gamma_e \frac{q'Q}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

und mit  $K = |\vec{K}_{12}|$ ,  $K' = |\vec{K}'_{12}|$

$$\frac{q}{q'} = \frac{K}{K'} \quad (1.3)$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer *Einheitsladung* (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

## Maßsysteme

Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten  $\Gamma_e$  gibt es 2 Möglichkeiten:

- i) Gauß'sches cgs-System: Hier wählt man  $\Gamma_e$  als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e = 1, \quad (1.4)$$

dann ist über Gl. (1.1) durch

$$[\text{Kraft}] = \frac{[\text{Ladung}]^2}{[\text{Länge}]^2}$$

die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] = \sqrt{[\text{Kraft}][\text{Länge}]} = \sqrt{\text{dyn} \times \text{cm}}, \quad (1.5)$$

wobei

$$1 \text{ dyn} = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2}.$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Das Gauß'sche cgs-System ist in der theoretischen Physik noch relativ verbreitet.



ii) SI-System (Système International d'Unités). Zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) wird die Ladungseinheit *Coulomb* = Ampère-Sekunde definiert. Ampère-Definition: Ein Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorrufen würde. Schreibt man

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

so nimmt die Konstante  $\epsilon_0$  (die *Dielektrizität des Vakuums*) den Wert

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2} \quad (1.7)$$

an. Alternativ kann man

$$\Gamma_e = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \text{mit} \quad c = 2.9979250 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

verwenden, d.h.  $\epsilon_0$  lässt sich durch die fundamentalere Konstante der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausdrücken. Das SI-System hat sich in der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) durchgesetzt, und wir werden im Wesentlichen mit diesem System arbeiten.

### 1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen

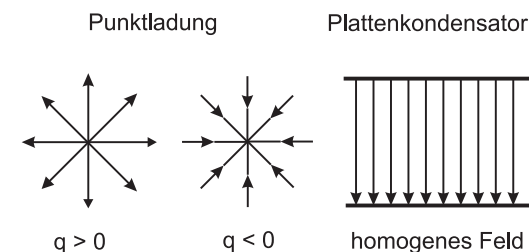
Die von  $N$  ruhenden Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$  auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  ausgeübte Kraft ist nach (1.1) und (1.2):

$$\vec{K} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = q \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.8)$$

wobei wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.9)$$

als (statisches) *elektrisches Feld* bezeichnen, das von den Punktladungen  $q_i$  am Ort  $\vec{r}$  erzeugt wird. Es ist gemäß (1.8) ein Vektorfeld, da  $q$  ein Skalar



**Abbildung 1.3:**  
Beispiele für von  
Ladungen erzeugte  
Felder.

ist. Bei vorgegebener Ladung  $q$  zeigt (1.8), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, dass die Probeladung so klein ist, dass man ihren Einfluss auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

### Elektrisches Potential

Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion  $\vec{E}(\vec{r})$  aus dem elektrischen Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1.10)$$

einer skalaren Funktion, durch Differentiation gewinnen:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.11)$$

Abb. 1.3 zeigt Beispiele für Gl. (1.11). Die (potentielle) Energie der ruhenden Massenpunkte mit den Ladungen  $q_i$  ist dann

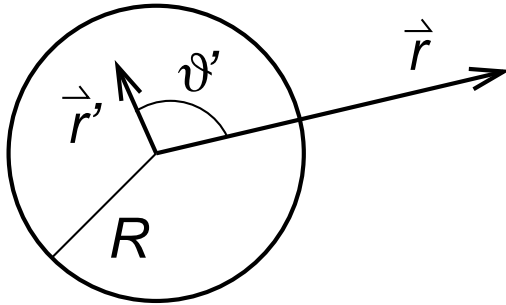
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\vec{r}_i), \quad (1.12)$$

wobei  $\Phi(\vec{r}_i)$  das Potential am Ort  $\vec{r}_i$  ist, das die Ladungen dort erzeugen. Der Faktor (1/2) auf der rechten Seite von (1.12) korrigierte die Doppelzählung der Beiträge in der Summe  $\sum_{i \neq j}$ . Bemerkung: In (1.12) muss streng genommen die *Selbstenergie* für  $i = j$  im rechten Ausdruck wieder abgezogen werden.

### 1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \dots \rightarrow \int dV \rho(\vec{r}) \dots, \quad (1.13)$$



**Abbildung 1.4:**  
Koordinatensystem  
für die Berechnung  
des Potentials der  
homogen geladenen  
Kugel.

wobei  $\rho(\vec{r})$  die Ladungsdichte am Ort  $\vec{r}$  ist, mit der Normierung

$$Q = \sum_i q_i = \int dV \rho(\vec{r}). \quad (1.14)$$

Damit tritt anstelle von (1.9), (1.10), (1.12):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.15)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.16)$$

und

$$U = \frac{1}{2} \int dV \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}). \quad (1.17)$$

### Beispiel: homogen geladene Kugel

Wir betrachten die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1.18)$$

und wählen ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Kugelmittelpunkt (siehe Fig. 1.4). Das Potential ist dann wegen  $(\vec{r} - \vec{r}')^2 = \vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\vec{r}' = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u = \cos \vartheta'$ ,  $du = -d\vartheta' \sin \vartheta'$  und der Tatsache, dass

$$\frac{d}{du} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} = \frac{-rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_1^{-1} (-du) \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \left[ \frac{1}{(-rr')} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r' \left( \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' \times \begin{cases} 2r'^2 & \text{für } r \geq r' \\ 2rr' & \text{für } r < r' \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Fallunterscheidung gilt für die Integrationsvariable; wir erhalten jetzt eine Lösung für eine Probeladung außerhalb der Kugel ( $r > R$ ), und eine zweite, gestückelte, für die Probeladung innerhalb der Kugel ( $r \leq R$ ):

$$\begin{aligned} r > R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R dr' r'^2 = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{R^3}{3} \\ r \leq R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \int_0^r dr' r'^2 + \int_r^R dr' rr' \right) = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{r^3}{3} + \frac{r}{2}(R^2 - r^2) \right) \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \end{aligned}$$

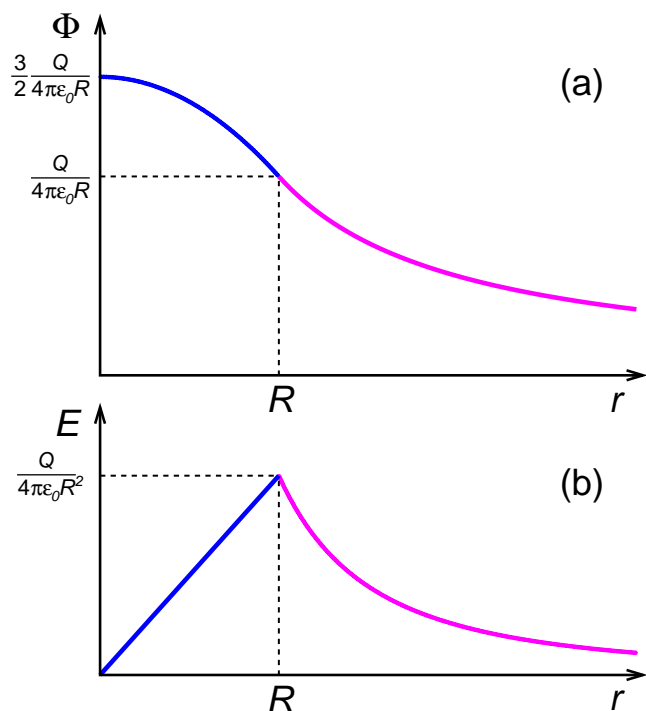
Mit der Dichte

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \leadsto \quad 4\pi\rho_0 = \frac{3Q}{R^3}$$

finden wir

$$\begin{aligned} r > R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r \leq R: \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dieses Potential ist in Fig. 1.5 (a) dargestellt.



**Abbildung 1.5:** Verlauf (a) des Potentials  $\Phi$  und (b) des Feldes  $|\vec{E}|$  der homogen geladenen Kugel für  $r \leq R$  und  $r > R$ .

Dann folgt für  $\vec{E}$  aus (1.11):

$$\begin{aligned} r > R: \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \\ r \leq R: \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Der Betrag des elektrischen Feldes ist in Fig. 1.5 (b) zu sehen. Für die Energie  $U$  findet man mit (1.17) und (1.19):

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_0}{2} \int dV \Phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^R dr r^2 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \\ &= \frac{4\pi\rho_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^R dr r^2 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) = \frac{2\pi\rho_0^2}{\epsilon_0} \left[ \frac{r^3 R^2}{6} - \frac{r^5}{30} \right]_0^R \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2}{\epsilon_0} \frac{2R^5}{15} = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \frac{2R^5}{15} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (1.21)$$

### Anwendung: Bestimmung des klassischen Elektronenradius

Nach (1.21) wird die *Selbstenergie* eines punktförmigen Teilchens ( $R \rightarrow 0$ ) unendlich. Nun ist nach der Relativitätstheorie die Energie eines ruhenden Teilchens, z. B. eines Elektrons, mit seiner Ruhemasse  $m_0$  verknüpft durch

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (1.22)$$

Ein streng punktförmiges (geladenes) Teilchen hätte also nach (1.21) eine unendlich große Ruhemasse! Führen wir andererseits die gesamte (endliche) Ruhemasse eines Elektrons auf seine elektrostatische Energie zurück, so müssen wir dem Elektron einen endlichen Radius  $R_0$ , den *klassischen Elektronenradius* zuordnen,

$$R_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \approx 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm} = 10^{-5} \text{ \AA}. \quad (1.23)$$

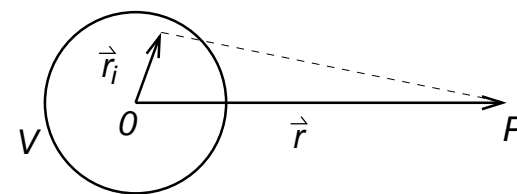
Für Dimensionen  $< 10^{-15} \text{ m}$  müssen wir also für Elektronen mit Abweichungen vom Coulomb'schen Gesetz rechnen.

### 1.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine auf ein endliches Volumen  $V$  begrenzte Ladungsverteilung (diskret oder kontinuierlich) und untersuchen ihr Potential  $\Phi$  in einem Punkt  $P$  weit außerhalb von  $V$ .

#### Abbildung 1.6:

Geometrie zur Berechnung des Potentials an einem Punkt  $P$  weit entfernt von den Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$ .



Der Koordinatenursprung  $0$  möge innerhalb von  $V$  liegen; wir können z.B.  $0$  als Ladungsschwerpunkt, definiert durch

$$\vec{r}_q = \frac{\sum_i |q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |q_i|} \quad (1.24)$$

wählen. Die Beträge sind dabei nötig, da es positive und negative Ladungen gibt. Solange  $r_i \ll r$ , können wir (1.10) durch eine Taylor-Reihe darstellen,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots, \quad (1.25)$$

wenn wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)/r^2}} \quad (1.26)$$

verwenden und in  $(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)/r^2$  entwickeln. Mit  $(1-x)^{-1/2} = 1+x/2+3x^2/8+O(x^3)$  ergibt sich:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{(2\vec{r} \cdot \vec{r}_i - r_i^2)^2}{r^5} + \dots \quad (1.27)$$

Wenn wir nun noch die Terme geeignet nach Potenzen von  $x_i/r$  etc. zusammenfassen, finden wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (1.28)$$

Für das elektrostatische Potential  $\Phi(\vec{r})$  finden wir somit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta}{r^5} + \dots \quad (1.29)$$

Die Terme bedeuten:

### 1.) Monopol-Anteil

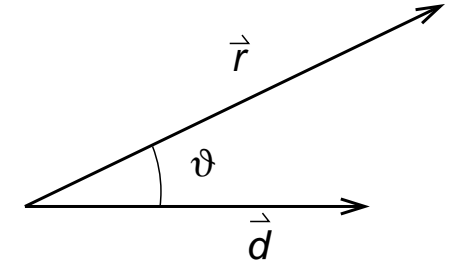
$$\Phi_0(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{mit} \quad \boxed{Q = \sum_i q_i} \quad (1.30)$$

Die Gesamtladung (oder *Monopolmoment*)  $Q$  erzeugt in 0. Näherung (nullter Näherung) der Taylor-Entwicklung ein Feld, das aus genügend großer Entfernung dem einer im Ursprung lokalisierten Punktladung entspricht.

### 2.) Dipol-Anteil

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i} \quad (1.31)$$

$\vec{d}$  ist das *Dipolmoment*. Der Winkel  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{d}$ .



**Abbildung 1.7:** Winkel zwischen Beobachtungspunkt  $\vec{r}$  und Dipolmoment  $\vec{d}$ .

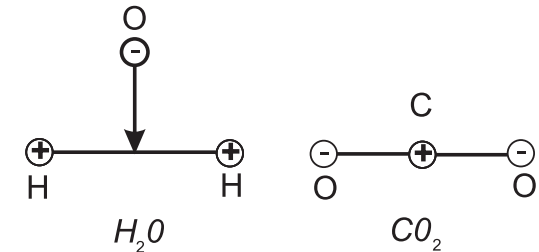
### Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung

Verschiebt man den Ursprung 0 um  $\vec{a}$ , so wird

$$\vec{d}' = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{a}) = \vec{d} - Q\vec{a} \quad (1.32)$$

Falls  $Q \neq 0$ , kann man  $\vec{a}$  so wählen, dass  $\vec{d}' = 0$  wird. Wenn dagegen  $Q = 0$  ist, so wird dagegen  $\vec{d} = \vec{d}'$  unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems.

**Konstruktionsanleitung:** Man bestimme die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladungsträger. Fallen diese zusammen, so ist  $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i = 0$ . Andernfalls gibt ihre Verbindungslinie die Richtung von  $\vec{d}$ ; ihr Abstand ist ein Maß für den Betrag von  $\vec{d}$ .



**Abbildung 1.8:** Beispiel der Bestimmung des Dipolmoments für zwei Moleküle, Wasser und Kohlendioxid.

### 3.) Quadrupol-Anteil.

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta}{r^5} \quad (1.33)$$

Aus  $r^\alpha Q_{\alpha\beta} r^\beta = \sum_i q_i [3(\vec{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 r^2]$  finden wir für die Elemente  $Q_{\alpha\beta}$  des *Quadrupoltensors*  $Q$ :

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i \left( 3r_i^\alpha r_i^\beta - \delta_{\alpha\beta} r_i^2 \right) \quad (1.34)$$

Hierbei sind die Indizes  $\alpha, \beta = x, y, z$  (mit  $\vec{r} = (r^x, r^y, r^z)$  und  $\vec{r}_i = (r_i^x, r_i^y, r_i^z)$ ) und die Einsteinsche Summenkonvention gilt in (1.33).

**Anmerkung:** Die Hoch- und Tiefstellung der Indizes bedeutet kontravariante ( $r^\alpha$ ) und kovariante ( $r_\alpha$ ) Vektorkomponenten (Tensorkomponenten). In strenger Form verlangt die Einsteinsche Summenkonvention Summation über Indizes, die im selben Term einmal hoch-, einmal tiefgestellt vorkommen. Allerdings bedeutet die Vorschrift

$$r_\alpha = g_{\alpha\beta} r^\beta$$

der Umrechnung von kontravarianten in kovariante Vektorkomponenten, dass man diese wegen der Metrik

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  nicht unterscheiden muss. Daher wird die Summenkonvention im  $\mathbb{R}^3$  häufig so verwendet, dass einfach über wiederholte Indizes summiert werden muss.

Eigenschaften des Quadrupoltensors: 1) Der Quadrupoltensor ist spurlos, denn

$$\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = \sum_\alpha \sum_i q_i (3r_i^\alpha r_i^\alpha - \delta_{\alpha\alpha} r_i^2) = \sum_i q_i (3r_i^2 - 3r_i^2) = 0$$

2) Der Quadrupol-Tensor ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden. Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik. 3) Die Zahl der unabhängigen Einträge des Quadrupoltensors ist 5, nach Rotation ins Hauptachsensystem 2.

Im Hauptachsensystem ist der Quadrupol-Tensor diagonal,  $Q_{\alpha\beta} = Q_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ . Wir finden

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_i q_i (3x_i^2 - r_i^2) = \sum_i q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) , \\ Q_y &= \sum_i q_i (2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2) , \\ Q_z &= \sum_i q_i (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2) . \end{aligned} \quad (1.35)$$

(1.35) zeigt, dass die Eigenwerte  $Q_\alpha$  die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen werden die folgenden Terme alle gleich:

$$\sum_i q_i x_i^2 = \sum_i q_i y_i^2 = \sum_i q_i z_i^2 \rightarrow Q_\alpha = 0. \quad (1.36)$$

Ein Element  $Q_\alpha \neq 0$  des Quadrupoltensors bedeutet also eine Abweichung von der sphärischen Symmetrie der Ladungsverteilung.

### Spezialfall: Axialsymmetrie

Wir betrachten Rotationsinvarianz um die z-Achse. Dann wird

$$Q_x = Q_y = \sum_i q_i (x_i^2 - z_i^2) = -\frac{1}{2} \sum_i q_i (2z_i^2 - 2x_i^2) = -\frac{1}{2} Q_z. \quad (1.37)$$

d.h. der Quadrupol-Anteil  $\Phi_2(\vec{r})$  ist durch eine Zahl, das *Quadrupolmoment*  $Q_0 \equiv Q_z/2$ , zu kennzeichnen. Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von  $\Phi_2$  leicht anzugeben (wir verwenden  $Q_z = 2Q_0$ ,  $Q_x = Q_y = -Q_0$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_z z^2}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{2r^3}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

wobei  $\vartheta = \arccos(z/r)$  dem Winkel zwischen dem Vektor  $\vec{r}$  und der Symmetrieachse (der z-Achse) entspricht. Gleichung (1.38) zeigt die für den Quadrupol-Anteil charakteristische r-Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich verschieden von der des Dipol-Terms (1.31).

### Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Analog zu Abschnitt 1.4 erhalten wir für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung das Dipolmoment:

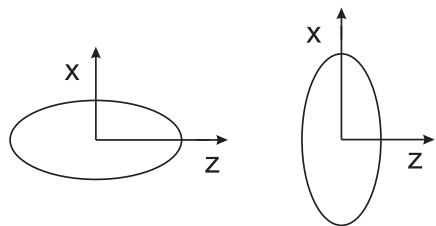
$$\vec{d} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' . \quad (1.39)$$

Analog wird Gleichung (1.34) für die Elemente des Quadrupoltensors zu:

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3r'^\alpha r'^\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2). \quad (1.40)$$

**Beispiel:** Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert.

Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*,  $Q_0 > 0$ , als auch *negativ*,  $Q_0 < 0$ , sein, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.



**Abbildung 1.9:** Beispiele für axialsymmetrisch deformierte Ladungsverteilungen.