14. Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes

In Kap. 8 haben wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

14.1 Energie

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld $(\vec{E}, \vec{B})$ an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} = \int d^3x \, \vec{j} \cdot \vec{E} \,. \tag{14.1}$$

Grundlage von Gl. (14.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung q:

$$\vec{K} = q\Big(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\Big) \,, \tag{14.2}$$

deren magnetischer Anteil zu Gl. (14.1) keinen Beitrag liefert. Aus Gl. (14.2) erhält man mit Gl. (13.1) für die vom makroskopischen Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ auf eine mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte Probeladung q ausgeübte (mittlere) Kraft:

$$\vec{\mathcal{K}} = q\Big(\vec{\mathcal{E}} + (\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}})\Big) \,. \tag{14.3}$$

Arbeit der freien Ladungen

Die an den freien Ladungen der Dichte ρ_f vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist dann analog Gl. (14.1):

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int d^3x \, \vec{j}_f \cdot \vec{\mathcal{E}} \,. \tag{14.4}$$

Die rechte Seite von Gl. (14.4) können wir mit Gl. (13.24) zu

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int d^3x \left(\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) \tag{14.5}$$

umformen. Wie in Kap. 8 können wir Gl. (14.5) symmetrisieren, mit Hilfe der Identität

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \tag{14.6}$$

und Gl. (13.23),

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \tag{14.7}$$

Man erhält:

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = -\int d^3x \left\{ \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right\}. \tag{14.8}$$

Der Vergleich mit Gl. (8.7) zeigt, dass

$$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}} \tag{14.9}$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist.

Lineare, isotrope Medien

Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung linearer, isotroper Medien:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\, \vec{\mathcal{E}}; \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu\, \vec{\mathcal{H}}. \tag{14.10}$$

Nur in diesem einfachen Fall lassen sich die Terme als Zeitableitung einer Energiedichte schreiben:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \Big) \tag{14.11}$$

und wir können analog Gl. (8.10) die Größe

$$\boxed{\frac{1}{2}\Big(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \Big)} \tag{14.12}$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren.

14.2 Impuls, Drehimpuls

Nach Gl. (14.3) ist

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = q\Big(\vec{\mathcal{E}} + (\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}})\Big) \tag{14.13}$$

die Änderung des Impulses der Probeladung q im Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$. Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch $\rho_f, \vec{j}_f$ im Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ folgt:

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \left(\rho_f \vec{\mathcal{E}} + (\vec{j}_f \times \vec{\mathcal{B}})\right). \tag{14.14}$$

Analog zu Abschnitt 8.2 formen wir Gl. (14.14) mit

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j}_f \tag{14.15}$$

um zu

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \left\{ \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} \right\}. \tag{14.16}$$

Wir symmetrisieren Gl. (14.16) mit Hilfe von

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \tag{14.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_M}{dt} = \int d^3x \Big\{ & \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{H}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} \\ & + (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \times \vec{\mathcal{D}} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) \Big\}. \end{aligned} \tag{14.18}$$

Wie in Kap. 8 lässt sich dann

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}} \tag{14.19}$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. Gl. (8.41)). Die Übertragung von Gl. (8.42), der Drehimpulsdichte, auf den Fall des makroskopischen Feldes ist dann trivial.

14.3 Die Kirchhoffschen Regeln

Die Theorie der elektrischen Schaltkreise beruht auf folgenden Regeln:

1. Kirchhoffscher Satz (*Knotenregel*)
An einer Stromverzweigung gilt für stationäre und quasistationäre Ströme

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0. \tag{14.20}$$

Beweis
Für stationäre und quasistationäre Ströme darf in Gl. (13.19)

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f$$

der Term $\partial\vec{\mathcal{D}}/\partial t$ vernachlässigt werden. Damit gilt

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0\,. \tag{14.21}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt

$$\int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}_f = \sum_{i=1}^{N} I_i = 0. \tag{14.22}$$

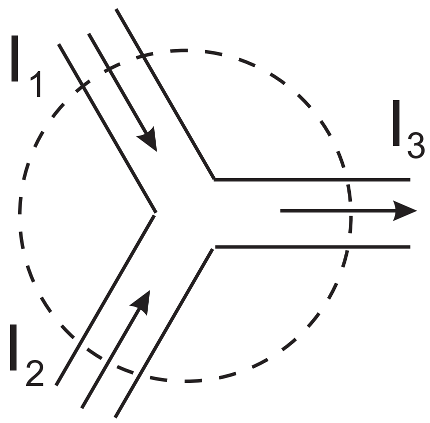

Abbildung 14.1: Illustration der Integrationsoberfläche F bei der Kirchhoffschen Knotenregel.

2. Kirchhoffsche Regel (*Maschenregel*)
Die Summe der Spannungsabfälle längs eines geschlossenen Weges in einem Schaltkreis (*Masche*) verschwindet,

$$\sum_j U_j = 0. \tag{14.23}$$

Dabei kann U_j für eine Batteriespannung stehen, oder für

i) Ohmschen Spannungsabfall (*Widerstand* R)

$$\mathsf{U}_\mathsf{R} = \mathsf{I}\mathsf{R}, \tag{14.24}$$

ii) Kondensatorspannung (*Kapazität* C)

$$\mathsf{U}_\mathsf{C} = \frac{1}{\mathsf{C}} \int \mathsf{d}t\, \mathsf{I}\,, \tag{14.25}$$

iii) induzierte Spannung (*Induktivität* L)

$$\mathsf{U}_\mathsf{L} = \mathsf{L}\frac{\mathsf{d}\mathsf{I}}{\mathsf{d}t}\,. \tag{14.26}$$

Beweis

Aus

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \tag{14.27}$$

folgt mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_F \mathsf{d}\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = \oint_{\partial F} \mathsf{d}\vec{x} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathsf{d}\vec{f} \cdot \vec{\mathcal{B}}\,. \tag{14.28}$$

Die rechte Seite von Gl. (14.28) verschwindet, wenn durch die Masche kein zeitlich veränderliches Magnetfeld dringt.

Bemerkung

Grundlage der 2. Kirchhoffschen Regel ist das Induktionsgesetz oder der Energiesatz. Führt man nämlich eine Ladung q auf einem geschlossenen Weg durch den Schaltkreis, so ist Gl. (14.23) nach Multiplikation mit q gerade die Energiebilanz.