

## Teil VI

# Das elektromagnetische Feld in Materie

## 13. Makroskopische Felder

---

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}, \mathbf{t})$  und die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}, \mathbf{t})$  exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}, \mathbf{t})$  und Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}, \mathbf{t})$  definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind. Wir werden uns daher im folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

### 13.1 Makroskopische Mittelwerte

Integrale der Form

$$\langle f(\vec{x}, \mathbf{t}) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3 \xi \int d\tau f(\vec{x} + \vec{\xi}, \mathbf{t} + \tau) \quad (13.1)$$

sind *makroskopische Mittelwerte*, wobei

- (i)  $\Delta V$  das Volumen,  $\Delta T$  das Zeitintervall angibt, über das gemittelt wird,
- (ii)  $f$  für die Ladungs- oder Stromdichte und die Komponenten der Feldstärken steht.

Wir wollen im folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (13.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die *mikroskopischen* Maxwell-Gleichungen.

### Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad (13.2)$$

## Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}} \quad (13.3)$$

### Makroskopische Felder

Wenn wir annehmen, dass in Gl. (13.1) Differentiationen nach  $\vec{x}$  und  $t$  unter dem Integral ausgeführt werden dürfen,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle; \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle; \quad \text{etc.}, \quad (13.4)$$

so erhalten wir aus Gl. (13.2) und (13.3) folgende Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0; \quad \nabla \times \langle \vec{E} \rangle + \frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = 0 \quad (13.5)$$

und

$$\nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \langle \vec{B} \rangle - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \vec{j} \rangle. \quad (13.6)$$

Die homogenen Gleichungen (13.5) bleiben beim Übergang von den *mikroskopischen* Feldern  $\vec{E}, \vec{B}$  zu den *makroskopischen* Feldern

$$\vec{\mathcal{E}} \equiv \langle \vec{E} \rangle; \quad \vec{\mathcal{B}} \equiv \langle \vec{B} \rangle \quad (13.7)$$

erhalten. In den inhomogenen Gleichungen (13.6) müssen wir nun  $\langle \rho \rangle$  und  $\langle \vec{j} \rangle$  geeignet aufteilen in Anteile, die wie bisher von freien Ladungsträgern herrühren und solche Anteile, die auf festen oder induzierten elektrischen oder magnetischen Dipolen beruhen. Ziel des Umschreibens der Maxwellgleichungen ist es, die in einem Material von gebundenen Ladungen oder Strömen erzeugten elektrischen und magnetischen Felder mit den äußeren Felder  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  zusammenzufassen; als Ergebnis werden wir elektrische und magnetische Hilfsfelder erhalten, die sich nur auf die freien Ladungen und Ströme beziehen.

## 13.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in Gl. (13.6) mit dem Zusammenhang von  $\vec{\mathcal{E}}$  und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir

$$\langle \rho \rangle = \rho_b + \rho_f, \quad (13.8)$$

wobei  $\rho_b$  die im Sinne von Gl. (13.1) gemittelte Dichte der *gebundenen* Ladungsträger (**b** steht für ‘bound’) darstellt,  $\rho_f$  die gemittelte Dichte der *freien* Ladungsträger (**f** steht für ‘free’).

*Gebundene Ladungsträger* sind z. B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie NaCl mit den Gitterbausteinen  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$ ) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, dass die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, dass sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte *Gleichgewichtslagen* gebunden sind, um die herum kleine Schwingungen möglich sind.

*Frei bewegliche Ladungsträger* sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie unter dem Einfluss eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

### Polarisations-Ladungen

$\rho_f$  ist im Gegensatz zu  $\rho_b$  eine makroskopische, im Experiment direkt kontrollierbare Größe. Die Ladungen auf den Platten eines Kondensators z.B. können *von außen* vorgegeben werden. Sie erzeugen ein elektrisches Feld, das in einem Dielektrikum zwischen den Platten elektrische Dipole erzeugen oder ausrichten kann. Der Effekt für den Beobachter sind *Polarisationsladungen* auf den Oberflächen des Dielektrikums, die von den speziellen Gegebenheiten (Art des Dielektrikums, Temperatur der Umgebung, Stärke des  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes) abhängen.

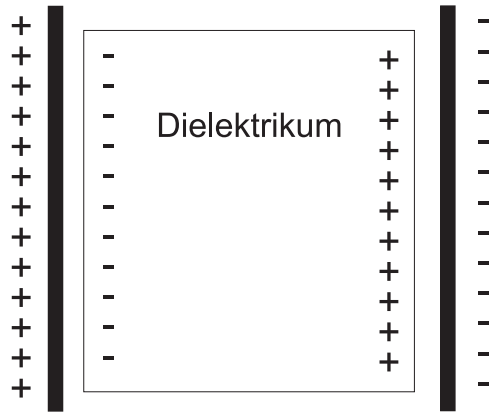
### Dielektrische Polarisation

Es liegt daher nahe, das von den (gebundenen) Polarisationsladungen resultierende zusätzliche elektrische Feld mit dem Feld zusammenzufassen, das von den Ladungen  $\rho_f$  auf den Platten herrührt. Das Zusatzfeld  $\vec{\mathcal{P}}$  wählen wir so, dass:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b} \quad (13.9)$$

und

$$\vec{\mathcal{P}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \rho_b = 0. \quad (13.10)$$



**Abbildung 13.1:** Induzierte Polarisationsladungen auf der Oberfläche des Dielektrikums im Kondensator erzeugen ein zusätzliches elektrisches Feld.

Mit der letzten Beziehung wird  $\vec{\mathcal{P}}$  erst eindeutig, denn nach Gl. (13.9) könnte man zu  $\vec{\mathcal{P}}$  noch ein beliebiges Wirbelfeld  $\nabla \times \vec{\mathcal{Q}}(\vec{x})$  addieren, ohne dass sich an der Gleichung etwas ändert. Dann wird mit Gl. (13.6)

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}) = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \rho_f,$$

also

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) = \rho_f \quad (13.11)$$

oder nach Einführung der *dielektrischen Verschiebung*,  $\vec{\mathcal{D}}$ ,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad (13.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f. \quad (13.13)$$

Wir werden weiter unten zeigen, dass das *Hilfsfeld*  $\vec{\mathcal{P}}$  gerade die Dichte des (makroskopischen) Dipolmoments des betrachteten Dielektrikums ist (*dielektrische Polarisation*). Gleichung (13.13) zeigt, dass die dielektrische Verschiebung  $\vec{\mathcal{D}}$  nur von den freien Ladungsträgern, d.h. den Überschussladungen  $\rho_f$  erzeugt und damit unabhängig von den Spezifika des Materials ist; diese gehen über  $\vec{\mathcal{E}} = (\vec{\mathcal{D}} - \vec{\mathcal{P}})/\epsilon_0$ , d.h. durch  $\vec{\mathcal{P}}$  in die elektrische Feldstärke  $\vec{\mathcal{E}}$  ein. Zwei elektrostatische Felder gleicher Geometrie mit denselben Überschussladungen  $\rho_f$  haben dasselbe  $\vec{\mathcal{D}}$ -Feld.

### 13.3 Mikroskopische Ströme

Wir wollen nun noch die zweite inhomogene Gleichung in Gl. (13.6) umformen. Analog zu Gl. (13.8) teilen wir auf:

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_b, \quad \text{mit} \quad \vec{j}_b = \vec{j}_P + \vec{j}_M. \quad (13.14)$$

Dabei ist:

$\vec{j}_f$  die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende, gemäß Gl. (13.1) gemittelte, Stromdichte.

$\vec{j}_b$  die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte. Es ist zweckmäßig  $\vec{j}_b$  nochmals aufzuteilen:

$\vec{j}_p$ : Nach Gl. (13.6) (Ampère-Maxwellsches Gesetz) erzeugt ein zeitlich veränderliches makroskopisches elektrisches Feld einen Strom, nach Gl. (13.13) auch die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{P}$ :

$$\vec{j}_p \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (13.15)$$

Oder anders ausgedrückt: Die Polarisation  $\vec{P}(\vec{x})$  bewirkt nach Gl. (13.9) eine Polarisationsladungsdichte  $-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_b \equiv \rho_p$ , die der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_p(\vec{x}) + \nabla \cdot \vec{j}_p(\vec{x}) = 0$$

genügt, woraus wieder Gl. (13.15) folgt.

$\vec{j}_M$ : Molekulare Kreisströme, d.h. solche die *magnetische Dipole* erzeugen. Wir diskutieren diesen Anteil später.

## Magnetfeld und magnetische Induktion

Mit Gl. (13.12), (13.14) und (13.15) entwickeln wir jetzt die Form der zweiten inhomogenen Gleichung (13.6) in Anwesenheit von Materie. Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} &= \underbrace{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{=\mu_0 \vec{j}} \\ &= \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_M) - \mu_0 \vec{j}_p = \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_M). \end{aligned} \quad (13.16)$$

Für die weitere Umformung von Gl. (13.16) nutzen wir die Kontinuitätsgleichung für die freien Ladungsträger aus:

$$\nabla \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \quad (13.17)$$

Unter Verwendung von Gl. (13.13) und (13.17) betrachten wir jetzt die Größe

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} - \rho_f) = 0, \quad (13.18)$$

so dass der Vektor  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t + \vec{j}_f$  sich als Rotation eines Vektors darstellen lässt, dem *makroskopischem Magnetfeld*  $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathcal{H}} \equiv \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f}. \quad (13.19)$$

Mit Gl. (13.16) finden wir den Zusammenhang von  $\vec{\mathcal{B}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$ , indem wir betrachten:

$$\nabla \times (\vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}) = \underbrace{\nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j}_f \right)}_{=\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M)} = \mu_0 \vec{j}_M. \quad (13.20)$$

Analog zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{\mathcal{P}}$  führen wir hier die *Magnetisierung*  $\vec{\mathcal{M}}$  ein:

$$\boxed{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}}, \quad (13.21)$$

so dass entsprechend Gl. (13.9)  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b$ :

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \vec{j}_M; \quad \vec{\mathcal{M}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \vec{j}_M = 0. \quad (13.22)$$

$\vec{\mathcal{M}}$  lässt sich also konsistent als Dichte des (makroskopischen) magnetischen Dipolmoments (*Magnetisierung*) interpretieren, erzeugt durch die mikroskopischen Kreisströme  $\vec{j}_M$ .

## Bemerkungen

- 1.) Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{B}}$ , nämlich  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  (vgl. Gl. (13.7)).  $\vec{\mathcal{D}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.

- 2.) Eine makroskopische Polarisation (oder Magnetisierung) kann dadurch zustande kommen, dass vorhandene elektrische (oder magnetische) Dipole im Feld *ausgerichtet* werden oder dass Dipole vom Feld *induziert* werden. Ohne äußeres Feld sind *permanente* Dipole statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarisation (oder Magnetisierung).
- 3.) Aus der Linearität der Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$  und der (postulierten) Kontinuitätsgleichung (13.18) für die freien Ladungsträger gilt auch die für die gebundenen Ladungsträger:

$$\nabla \cdot \vec{j}_b + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0.$$

### Makroskopischen Feldgleichungen

Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (13.23)$$

Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j}_f \quad (13.24)$$

Verknüpfungen

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}; \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad (13.25)$$

Die Gleichungen (13.23), (13.24) haben formal die gleiche Struktur wie Gl. (13.2), (13.3). Sie können daher mit den gleichen Methoden gelöst werden.

### Materialgleichungen

Die Gleichungen (13.23), (13.24) reichen jedoch noch nicht aus, um - bei gegebenem  $\rho_f, \vec{j}_f$  - die vier Felder  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}}$  eindeutig zu bestimmen. Dazu müssen wir die formalen Verknüpfungen (13.25) mit Hilfe spezieller Modelle für die betrachtete Materie in explizite *Materialgleichungen* umwandeln.



### 13.4 Polarisation und Magnetisierung

Zur Interpretation von Polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$  und Magnetisierung  $\vec{\mathcal{M}}$  führen wir durch

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}; \quad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\bar{\Phi} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \quad (13.26)$$

das makroskopische skalare Potential  $\bar{\Phi}$  und Vektor-Potential  $\vec{\mathcal{A}}$  ein. Für sie gelten in Lorenz-Eichung die inhomogenen Wellengleichungen

$$-\square\bar{\Phi} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \rho_f - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} \right), \quad (13.27)$$

wegen  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b$  und

$$-\square\vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \left( \vec{j}_f + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t} \right). \quad (13.28)$$

wegen  $\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \vec{j}_M$  und  $\dot{\vec{\mathcal{P}}} = \vec{j}_P$ . Sie haben als spezielle Lösungen die retardierten Potentiale (vgl. Abschnitt 11.3)

$$\bar{\Phi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int d^3x' \frac{\rho_f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \quad (13.29)$$

mit der retardierten Zeit  $t' = t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ . Ebenso:

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int d^3x' \frac{\vec{j}_f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t')}{\partial t'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}. \quad (13.30)$$

#### Elektrische Dipol-Dichte

Den uns interessierenden Term in Gl. (13.29) formen wir mit partieller Integration um:

$$\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (13.31)$$

wobei wir der Einfachheit halber die Retardierung vernachlässigen ( $t = t'$ ). Für endlich ausgedehnte Materie tritt kein Oberflächenterm bei der partiellen Integration auf. Der Vergleich mit Abschnitt 12.2 oder Gl. (1.31)

zeigt, dass  $\vec{\mathcal{P}}$  die Bedeutung der Dichte des makroskopischen elektrischen Dipolmoments zukommt, wie oben schon behauptet.

### Magnetische Dipol-Dichte

Ganz entsprechend wird bei Vernachlässigung der Retardierung ( $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ ) aus dem letzten Term in Gl. (13.30):

$$\int d^3\mathbf{x}' \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t})}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|} = - \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}') \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}', \mathbf{t})}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|^3}. \quad (13.32)$$

Der Vergleich mit Abschnitt 12.3 oder Gl. (5.32) zeigt, dass  $\vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$  die Dichte des makroskopischen magnetischen Dipolmoments zukommt. Es entsteht dadurch, dass entweder *permanente* magnetische Dipole im Feld ausgerichtet werden oder durch das Feld *induziert* werden, wie im Fall der elektrischen Dipole.