

## 12. Multipolstrahlung

---

Wir betrachten jetzt eine Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet  $|\vec{x}'| < d$ . Wir haben in Kap. 1.5 bzw. 5.4 festgestellt, dass die  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder im statischen Fall für  $r \rightarrow \infty$  mindestens mit  $r^{-2}$  abfallen. Wir werden jetzt sehen, dass die Retardierung im zeitabhängigen Fall bewirkt, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nur wie  $r^{-1}$  abfallen. Dabei gehen wir von einer harmonisch oszillierenden Quelle aus, was aber die Gültigkeit der folgenden Multipolentwicklung nicht einschränkt.

### 12.1 Langwellen-Näherung

Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho = \rho(\vec{x})e^{-i\omega t}; \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (12.1)$$

hatten wir in Abschnitt 11.3

$$\Phi = \Phi(\vec{x})e^{-i\omega t}; \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (12.2)$$

gefunden, sowie (mit  $k = \omega/c$ )

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Bei der Diskussion von Gl. (12.3) können wir uns im folgenden auf  $\vec{A}(\vec{x})$  beschränken, da  $\vec{A}$  und  $\Phi$  direkt über die Lorenz-Eichung zusammenhängen: Aus

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (12.4)$$

folgt mit Gl. (12.2)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}). \quad (12.5)$$

## Langwellen - Näherung

Zur weiteren Behandlung von Gl. (12.3) machen wir die Langwellen - Näherung

$$\mathbf{d} \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (12.6)$$

wobei  $\mathbf{d}$  den Radius einer Kugel angibt, die die Ladungs- und Stromverteilung umfasst.

## Beispiele

Für die optische Strahlung von Atomen ist  $\mathbf{d} \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ; analog für die  $\gamma$ -Strahlung von Atomkernen:  $\mathbf{d} \approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 10^{-4} \text{ nm} = 10^{-13} \text{ m}$ .

Bei der Diskussion von Gl. (12.3) sind nun die Längen  $\mathbf{d}$ ,  $\lambda$  und  $r = |\vec{\mathbf{x}}|$  wesentlich. Wir untersuchen folgende Fälle:

### Fall 1: $\mathbf{d} < r \ll \lambda$ (Nahzone)

Dann ist

$$k|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| \ll 1 \quad (12.7)$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\vec{\mathbf{x}}')}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|}, \\ \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{x}}')}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach Gl. (12.8) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik. Angesichts der Zeitabhängigkeit (12.2) spricht man von *quasistatischen Feldern*, für die  $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}$  wie  $R^{-2}$  abfallen, so dass die Ausstrahlungsbedingung (11.45) nicht erfüllt ist.

### Fall 2 : $\mathbf{d} \ll \lambda \ll r$ (Fernzone)

Wegen

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \quad (12.9)$$

können wir dann die Taylor-Reihe in  $(\vec{\mathbf{x}}/r)$

$$|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!} (\vec{\mathbf{x}}' \cdot \nabla)^n r \approx r - \frac{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}}'}{r} = r \left( 1 - \frac{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}}'}{r^2} \right) \quad (12.10)$$

in Gl. (12.3) benutzen:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \vec{A}_0(\vec{x}) + \vec{A}_1(\vec{x}) + \dots \\
&\approx \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{\exp\left\{i\mathbf{k}r\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)\right\}}{r\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \underbrace{\exp\left\{-i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}\right\}}_{1 - i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}} \underbrace{\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)^{-1}}_{1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left(1 - i\mathbf{k}\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2} - i\mathbf{k}\frac{(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2}{r^3}\right) \\
&\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left(1 - i\frac{\omega}{c}(\vec{e}\cdot\vec{x}')\right)
\end{aligned} \tag{12.11}$$

mit  $\mathbf{k} = \omega/c$  und dem Richtungsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}}{r}. \tag{12.12}$$

Dabei haben wir die beiden Reihenentwicklungen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

verwendet.

## 12.2 Elektrische Dipol-Strahlung

Im ersten Term in Gl. (12.11)

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \tag{12.13}$$

können wir wegen

$$\nabla'(x'_\alpha \vec{j}) = j_\alpha + x'_\alpha (\nabla' \vec{j}(\vec{x}'))$$

wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x' j_\alpha &= \int_V d^3x' \nabla' \cdot (x'_\alpha \vec{j}) - \int_V d^3x' x'_\alpha (\nabla' \cdot \vec{j}) \\ &= \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot (x'_\alpha \vec{j})}_{=0} - \int_V d^3x' x'_\alpha (\nabla' \cdot \vec{j}) = -i\omega \int_V d^3x' x'_\alpha \rho(\vec{x}'), \end{aligned} \quad (12.14)$$

da die Ladungs- und Stromverteilung räumlich begrenzt sind sowie unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} - i\omega \rho = 0. \quad (12.15)$$

Mit der Definition des elektrischen Dipolmoments  $\vec{d} = \int_V d^3x \vec{x} \rho(\vec{x})$  wird  $\vec{A}_0(\vec{x})$  dann zu

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d}. \quad (12.16)$$

Für die Felder folgt mit

$$\begin{aligned} \left( \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d} \right)_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \left( \frac{e^{ikr}}{r} d_\gamma \right) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( ike^{ikr} \frac{x_\beta}{r^2} - e^{ikr} \frac{x_\beta}{r^3} \right); \\ \curvearrowright \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d} &= ik \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times \vec{d}) - \frac{e^{ikr}}{r^2} (\vec{e} \times \vec{d}) \end{aligned}$$

wenn man Gl. (12.9) beachtet und sich auf Terme  $\sim r^{-1}$  beschränkt:

$$\vec{B}_0(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times \vec{d}). \quad (12.17)$$

Mit

$$\Phi_0(\vec{x}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \vec{A}_0(\vec{x}) = -i \frac{\mu_0 c}{4\pi} \omega \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \cdot \vec{d}) \quad (12.18)$$

folgt aus Gl. (7.5) für das  $\vec{E}$ -Feld:

$$\vec{E}_0(\vec{x}) = -\nabla \Phi_0(\vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left( \vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d}) \right) = c (\vec{B}_0 \times \vec{e}), \quad (12.19)$$

wenn man  $(\vec{e} \times \vec{d}) \times \vec{e} = \vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d})$  ausnutzt.

## Energiestromdichte

Wir sind nun in der Lage, die Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B}_0 \times \vec{e}) \times \vec{B}_0 = \frac{c}{\mu_0} \left( \vec{e} B_0^2 - \vec{B}_0 (\vec{B}_0 \cdot \vec{e}) \right) \quad (12.20)$$

zu berechnen. Wir benutzen die Realteile von Gl. (12.17) und (12.19) und finden mit Gl. (12.2) sowie

$$\begin{aligned} ((\vec{e} \times \vec{d}) \times \vec{e}) \times (\vec{e} \times \vec{d}) &= (\vec{d} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{d})) \times (\vec{e} \times \vec{d}) \\ &= \vec{e} (\vec{d}^2 - (\vec{e} \cdot \vec{d})^2) - \vec{d} \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{d} - \vec{e} \cdot \vec{d})}_{=0} \\ &= \vec{e} (d^2 - (d \cos \vartheta)^2) = \vec{e} d^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

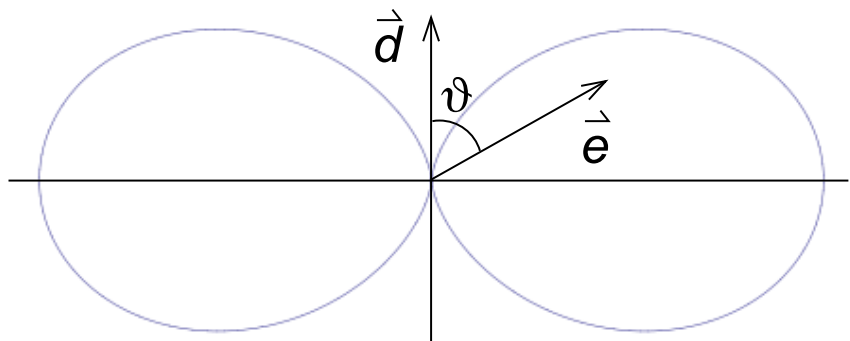
und erhalten

$$\vec{S}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \vec{e}, \quad (12.21)$$

wobei  $\vartheta$  der von  $\vec{e}$  und  $\vec{d}$  eingeschlossene Winkel ist. Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\langle \vec{S}_0 \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{2r^2} \vec{e}. \quad (12.22)$$

**Abbildung 12.1:**  
Charakteristische  
Winkelabhängigkeit  
der Dipolstrahlung.



Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von  $\vec{d}$  ( $\vartheta = 0$ ), sondern maximal senkrecht zu  $\vec{d}$  ( $\vartheta = 90^\circ$ ). Die  $\sin^2 \vartheta$ -Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

## Bemerkungen

- 1.) Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, dass  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{S}$  ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Abschnitt 9.3).

- 2.) Ein (mit der Frequenz  $\omega$ ) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. Gl. (12.22) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (11.63).
- 3.) Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung ( $l=1$ ), nicht Monopol-Strahlung ( $l=0$ )! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt mit der Tatsache verknüpft, dass Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

### 12.3 Magnetische Dipol-Strahlung

Der 2. Term der Entwicklung (12.11) lautet

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') (\vec{e} \cdot \vec{x}'); \quad (12.23)$$

das verbleibende Integral ist bestimmt durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupoltensor. Um dies zu sehen, benutzen wir

$$\vec{e} \times (\vec{x}' \times \vec{j}) = (\vec{e} \cdot \vec{j}) \vec{x}' - (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}$$

und erhalten die Identität

$$(\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j} = \frac{1}{2} (\vec{x}' \times \vec{j}) \times \vec{e} + \frac{1}{2} \{ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j} + (\vec{e} \cdot \vec{j}) \vec{x}' \} \quad (12.24)$$

die den Integranden in Gl. (12.23) in zwei charakteristische Summanden zerlegt. Mit der Definition

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x (\vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}))$$

(siehe Gl. (4.46)) des magnetischen Dipolmoments wird der erste (bzgl.  $\vec{x}' \leftrightarrow \vec{x}$  antisymmetrische) Anteil:

$$\vec{A}_1^{(m)}(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{m} \times \vec{e}). \quad (12.25)$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (12.16) über, wenn man

$$\frac{1}{c} (\vec{m} \times \vec{e}) \rightarrow \vec{d} \quad (12.26)$$

ersetzt. Damit kann man durch die umgekehrte Ersetzung aus Gl. (12.17) und (12.19) für die Feldstärken sofort ablesen:

$$\vec{B}_1^{(m)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e} \times (\vec{m} \times \vec{e})) \quad (12.27)$$

und

$$\vec{E}_1^{(m)}(\vec{x}) = c (\vec{B}_1^{(m)} \times \vec{e}). \quad (12.28)$$

Analog zu Gl. (12.22) findet man für die im Zeitmittel abgestrahlte Energie:

$$\langle \vec{S}_1^{(m)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^4 m^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{2r^2} \vec{e}, \quad (12.29)$$

wo  $\vartheta$  jetzt der Winkel zwischen  $\vec{m}$  und  $\vec{e}$  ist. Der Vergleich von Gl. (12.29) und (12.22) zeigt, dass sich elektrische und magnetische Dipol-Strahlung in ihrer Frequenz- und Winkelabhängigkeit nicht unterscheiden. Der einzige Unterschied liegt in der *Polarisation*: für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes in der von  $\vec{e}$  und  $\vec{d}$  aufgespannten Ebene, für einen magnetischen Dipol senkrecht zu der von  $\vec{e}$  und  $\vec{m}$  aufgespannten Ebene.

## 12.4 Elektrische Quadrupol-Strahlung

Wir befassen uns nun mit dem 2. Term in Gl. (12.24), der auf

$$\vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{2r} \int d^3x' \{ \vec{j}(\vec{e} \cdot \vec{x}') + \vec{x}'(\vec{e} \cdot \vec{j}) \} \quad (12.30)$$

führt. Das Integral in Gl. (12.30) kann nun auf den in Abschnitt 1.5 eingeführten elektrischen Quadrupoltensor zurückgeführt werden. Analog zu Gl. (12.14) suchen wir eine Beziehung zu den Momenten der Quellenverteilung:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x' \nabla' \left[ x'_\alpha (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \right] \\ &= \int d^3x' x'_\alpha \nabla' \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \right] + \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \underbrace{\nabla' x'_\alpha}_{e'_\alpha} \end{aligned} \quad (12.31)$$

wobei die erste Identität wegen der räumlichen Beschränkung von  $\vec{j}(\vec{x}')$  gilt. Es gilt dann weiter

$$\begin{aligned} \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') j_\alpha(\vec{x}') &= - \int d^3x' x'_\alpha \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \nabla' \vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}') \cdot \underbrace{\nabla'(\vec{e} \cdot \vec{x}')}_{=\vec{e}} \right] \\ &\leadsto \int d^3x' \left[ (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + \vec{x}' (\vec{e} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \right] = -i\omega \int d^3x' \vec{x}' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') \end{aligned} \quad (12.32)$$

wobei wieder die Ladungserhaltung in der Form (12.15) benutzt wurde. Also können wir Gl. (12.30) schreiben als:

$$\vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{e^{ikr}}{2r} \int d^3x' (\vec{e} \cdot \vec{x}') \vec{x}' \rho(\vec{x}'). \quad (12.33)$$

Für die Felder folgt bei Beachtung von Gl. (12.9)

$$\vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) = ik \left( \vec{e} \times \vec{A}_1^{(e)}(\vec{x}) \right) \quad (12.34)$$

und

$$\vec{E}_1^{(e)}(\vec{x}) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = c \left( \vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) \times \vec{e} \right), \quad (12.35)$$

da im ladungsfreien Raum

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12.36)$$

gilt. Mit Hilfe des Quadrupoltensors, gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{\alpha\beta} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \{ 3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \}, \quad (12.37)$$

erhalten wir für  $\vec{B}_1^{(e)}$  den Ausdruck:

$$\vec{B}_1^{(e)}(\vec{x}) = -i \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^3 \frac{e^{ikr}}{6r} \left( \vec{e} \times \vec{Q} \right), \quad (12.38)$$

wobei der Vektor  $\vec{Q}$  die Komponenten

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} e_\beta \quad \vec{e} = (e_1, e_2, e_3) \quad (12.39)$$



hat. Man beachte, dass der 2. Term in Gl. (12.37) zu Gl. (12.38) keinen Beitrag liefert (denn  $\delta_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta$ )!

### Energiestromdichte

Wie oben berechnen wir nun die Energiestromdichte

$$\vec{S}_1^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{E}_1^{(e)} \times \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \right) = \frac{c}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \times \vec{e} \right) \times \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)}, \quad (12.40)$$

woraus mit

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (12.41)$$

folgt

$$\vec{S}_1^{(e)} = \frac{c}{\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{B}_1^{(e)} \right)^2 \vec{e} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^6 \frac{\cos^2(\mathbf{kr} - \omega t)}{36r^2} (\vec{e} \times \vec{Q})^2 \vec{e}. \quad (12.42)$$

Nach Zeitmittelung wird Gl. (12.42) zu

$$\langle \vec{S}_1^{(e)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} (\vec{e} \times \vec{Q})^2 \vec{e}. \quad (12.43)$$

Der Unterschied zur Dipolstrahlung in der Frequenzabhängigkeit ist offensichtlich.

### Axialsymmetrie

Zur Diskussion der Winkelabhängigkeit betrachten wir den Fall der Axialsymmetrie (vgl. Abschnitt 1.5 )

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta; \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2} = -\frac{Q_0}{3}. \quad (12.44)$$

In

$$(\vec{e} \times \vec{Q})^2 = Q^2 - (\vec{e} \cdot \vec{Q})^2 \quad (12.45)$$

wird dann

$$Q^2 = \frac{Q_0^2}{9} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{4}{9} Q_0^2 e_3^2 = \frac{Q_0^2}{9} (\sin^2 \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta) \quad (12.46)$$

sowie

$$\vec{e} \cdot \vec{Q} = e_\alpha Q_{\alpha\alpha} e_\alpha = -\frac{Q_0}{3} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{3} Q_0 \cos^2 \vartheta; \quad (12.47)$$

also

$$(\vec{e} \times \vec{Q})^2 = \frac{4}{9} Q_0^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta. \quad (12.48)$$

Ergebnis:

$$\langle \vec{S}_1^{(e)} \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} \frac{4Q_0^2}{9} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \vec{e}. \quad (12.49)$$

Die elektrische Quadrupolstrahlung unterscheidet sich von der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung sowohl in der Frequenzabhängigkeit als auch in der Winkelverteilung.

### **Anwendung in der Atom- und Kernphysik**

Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die Dipolstrahlung: Der Vergleich von Gl. (12.22) und (12.49) zeigt, dass elektrische Dipolstrahlung um einen Faktor der Größenordnung  $(kd_0)^{-2}$  stärker ist als elektrische Quadrupolstrahlung. Sie dominiert auch die magnetische Dipolstrahlung, von der sie sich nach Gl. (12.22) und (12.29) um den Faktor  $(v/c)^2$  unterscheidet. Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der *Quantentheorie* möglich.