

10. Wellenpakete im Vakuum

10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. Monochromatische ebene Wellen sind dazu ungeeignet, da sie praktisch keine Information außer ihrer Periode (ω) vermitteln können. Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch *modulieren* und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t). \quad (10.1)$$

Alternativ kann Gl. (10.1) als *amplituden-modulierte Schwingung* dargestellt werden:

$$f(t) = 2f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) \quad (10.2)$$

mit

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (10.3)$$

denn

$$\begin{aligned} & 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \\ &= 2 \left(\cos\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2} + \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} \right) \left(\cos\frac{\omega_1}{2} \cos\frac{\omega_2}{2} - \sin\frac{\omega_1}{2} \sin\frac{\omega_2}{2} \right) \\ &= 2 \cos^2\frac{\omega_1}{2} \cos^2\frac{\omega_2}{2} - 2 \sin^2\frac{\omega_1}{2} \sin^2\frac{\omega_2}{2} \\ &= 2 \frac{1 + \cos\omega_1}{2} \frac{1 + \cos\omega_2}{2} - 2 \frac{1 - \cos\omega_1}{2} \frac{1 - \cos\omega_2}{2} \\ &= \cos\omega_1 + \cos\omega_2. \end{aligned}$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ gewählt wird, dann ist Gl. (10.2) eine fast harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 (*Trägerfrequenz*), deren Amplitude sich mit

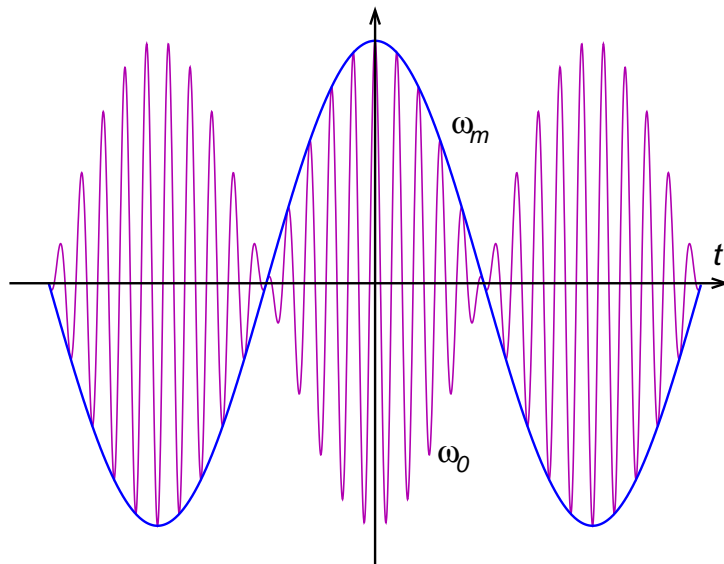


Abbildung 10.1: Überlagerung zweier monochromatischer Wellen, die eine Schwebung mit Trägerfrequenz ω_0 mit Modulationsfrequenz ω_m bilden.

der *Modulationsfrequenz* ω_m ändert. Man erhält das Bild einer *Schwebung* (siehe Abb. 10.1).

Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Ausgehend von einer Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bildet man

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_n t) \quad \omega_n = n\omega. \quad (10.4)$$

Die Fourier-Reihe (10.4) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn $f(t)$ periodisch mit der Periode T und stückweise glatt ist. Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in $[0, T]$ stetige Funktionen $f(t)$.

Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten f_n sind durch

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \exp(i\omega_n t). \quad (10.5)$$

gegeben. Für den Beweis verwenden wir die Orthonormalitätsrelation

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp(i\omega(m-n)t) = \delta_{mn} \quad (10.6)$$

und finden

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \exp(i\omega_m t) = T \sum_n f_n \delta_{mn} = T f_m. \quad (10.7)$$

Fourier-Integrale

Nicht-periodische Funktionen lassen sich i.a. durch Fourier-Integrale darstellen, die sich aus Gl. (10.4) im Limes $T \rightarrow \infty$ ergeben, d.h. das Periodizitätsintervall ist $[-T/2, T/2]_{T \rightarrow \infty}$, und damit muss die Summe über ω_n durch ein Integral über ω ersetzt werden.

Sei $\Delta\omega = 2\pi/T$ der Abstand benachbarter Frequenzen ω_n , so ist

$$f(t) = \sum_n \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega} f_n \exp(-i\omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \tilde{f}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t) \quad (10.8)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{f_i}{\Delta\omega} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T}{2\pi} f_i \right). \quad (10.9)$$

Also kann man Gl. (10.8) als *Riemann-Summe* des *Fourier-Integrals*

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t)} \quad (10.10)$$

auffassen. Für die Umkehrung von Gl. (10.10) zeigt der Vergleich von Gl. (10.5) und (10.9):

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(i\omega t)} \quad (10.11)$$

$\tilde{f}(\omega)$ heißt die *Fourier-Transformierte* zu $f(t)$. Sie existiert und (10.10) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen $f(t)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 < \infty; \quad (10.12)$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist dann auch quadratintegabel.

Beispiel: Rechteckimpuls

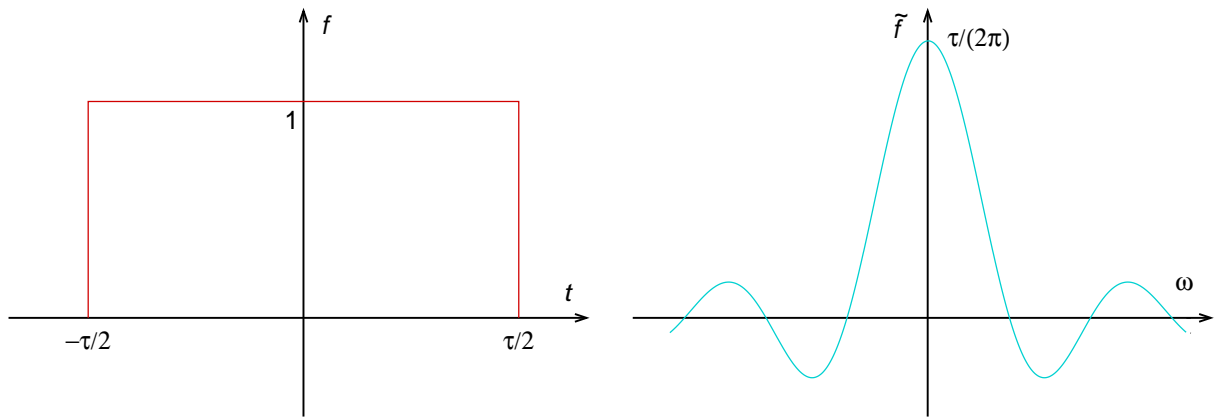


Abbildung 10.2: Rechteckfunktion und ihre Fouriertransformierte.

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \quad f(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.13)$$

Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \exp(i\omega t) = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\pi\omega}. \quad (10.14)$$

Die Breite $\Delta\omega$ von $\tilde{f}(\omega)$ schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{oder} \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \quad (10.15)$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmäler) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese *Unschärferelation* ist nicht an das Beispiel (10.13) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

Bemerkung

Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (10.16)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(i\omega t) \quad (10.17)$$

benutzt.

10.3 δ -Distribution

Die Fourier-Transformation (10.10), (10.11) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man Gl. (10.11) in (10.10) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t-t')) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t-t') \quad (10.18)$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t-t')) \quad (10.19)$$

für beliebige quadratintegrale Funktionen $f(t)$ gelten. Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution*, die streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbindung mit der Integration in (10.18) erklärt ist.

Darstellungen

Die δ -Distribution, als deren Definition wir im folgenden Gl. (10.18) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta_n(t-t') = f(t) \quad (10.20)$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

1.) Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für } |t| < \frac{1}{2n}; \quad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.21)$$

2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n \exp(-\pi t^2 n^2). \quad (10.22)$$

3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi n t)}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n d\omega \exp(i\omega t) \quad (10.23)$$

führt gerade auf die Schreibweise (10.19).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.20) - (10.23) sind so zu verstehen, dass die t' -Integration vor der Limes-Bildung $n \rightarrow \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln

1.) $\delta(t) = \delta(-t)$

2.) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3.) $\delta(t^2 - a^2) = \frac{\delta(t+a) + \delta(t-a)}{2|a|}; \quad a \neq 0 .$

10.4 Überlagerung monochromatischer ebenen Wellen

Wir lösen die Wellengleichung

$$\square \vec{E}(\vec{x}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (10.24)$$

durch Fouriertransformation, in dem wir den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (10.25)$$

machen, d.h. $\vec{E}(\vec{x}, t)$ durch seine Fouriertransformierte in Raum und Zeit darstellen. In der Fouriertransformation ist \vec{k} die zu \vec{x} und ω die zu t konjugierte Variable, physikalisch bedeuten \vec{k} den Wellenzahlvektor und ω die Kreisfrequenz. Statt einfach den Realteil dieses Ansatzes als die physikalische Lösung zu definieren, verfahren wir hier so, dass wir fordern, dass $\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t)$:

$$\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}^*(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}^*(-\vec{k}, -\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

wobei wir im letzten Schritt $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ und $\omega \rightarrow -\omega$ ersetzt haben (vertauschen von Integrationsgrenzen und Vorzeichen der Integrationsdifferenziale kompensiert sich gegenseitig). Damit folgt die Realitätsbedingung (z.B. durch Umkehren der Fouriertransformation)

$$\tilde{\vec{E}}^*(-\vec{k}, -\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega); \quad \tilde{\vec{E}}^*(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{E}}(-\vec{k}, -\omega)$$

Einsetzen von Gl. (10.25) in die Wellengleichung ergibt:

$$\begin{aligned}\square \vec{E}(\vec{x}, t) &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} = 0\end{aligned}\quad (10.26)$$

wegen

$$\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}; \quad \Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \nabla^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Wir finden also, dass die Fourierdarstellung einer Funktion null sein soll; dann muss die Fouriertransformierte selbst identisch null sein:

$$(\omega^2 - c^2\vec{k}^2)\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = 0$$

d.h. $\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = 0$ falls nicht $\omega^2 - c^2\vec{k}^2 = 0$. Der allgemeinste Ausdruck dafür ist:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})\delta(\omega - ck) + \tilde{\vec{E}}_2(\vec{k})\delta(\omega + ck)$$

Einsetzen in die Fourierdarstellung ergibt:

$$\vec{E}^*(\vec{x}, t) = \int d^3k \left(\tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + ckt)} \right)$$

mit $\tilde{\vec{E}}_{1,2}(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \pm ck)$. Die Realitätsbedingung wird jetzt zu

$$\tilde{\vec{E}}_1^*(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}_2(-\vec{k}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\vec{E}}_2^*(\vec{k}) = \tilde{\vec{E}}_1(-\vec{k})$$

Leichtes Umformen der Lösung ergibt

$$\begin{aligned}E(\vec{x}, t) &= \int d^3k \left(\tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_1^*(-\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + ckt)} \right) \\ &= \int d^3k \left(\tilde{\vec{E}}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} + \tilde{\vec{E}}_1^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - ckt)} \right)\end{aligned}\quad (10.27)$$

Diese Lösung ist jetzt offensichtlich reell und lässt sich sinngemäß auf \vec{B} , \vec{A} und Φ übertragen.

10.5 Wellenpakete, Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Zur Vereinfachung betrachten wir jetzt zunächst ein Wellenpaket, das sich nur in einer Koordinatenrichtung, z.B. in z-Richtung ausbreitet. $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$ sei eine Komponente von $\vec{\mathbf{E}}$ oder $\vec{\mathbf{B}}$,

Wie oben folgt aus $\square \mathbf{u} = 0$ die Darstellung

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left\{ \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} + \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} \right\} \quad (10.28)$$

mit $\omega(\mathbf{k}) = c\mathbf{k}$ für elektromagnetische Wellen. Da aber das folgende im Prinzip auch für Wellen mit anderer Dispersion $\omega(\mathbf{k})$ gilt, bleiben wir zunächst bei der Schreibweise $\omega(\mathbf{k})$. Wir nehmen jetzt an, dass die auftretenden Wellenzahlen aus einem *Band*, d.h. einem begrenzten Bereich in der Nähe der Wellenzahl \mathbf{k}_0 stammen. Wir wählen als Amplitudenfunktion $\tilde{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{k}})$ eine Gaußfunktion

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Maximum $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ und Breite σ , die auf $\int d\mathbf{k} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_0$ normiert ist. Das bedeutet auch, dass

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})}{\mathbf{u}_0} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Wir setzen $\tilde{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{k}})$ in das erste Integral von Gl. (10.28) ein und substituieren dabei $\kappa = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/\sigma$, d.h. $d\kappa = d\mathbf{k}/\sigma$ und $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \sigma\kappa$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2\sigma^2} + i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)\right] \\ &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp\left[-\frac{\kappa^2}{2} + i(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)z - i\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)t\right]. \end{aligned}$$

Hier kommen wir ohne Kenntnis von $\omega(\mathbf{k})$ nicht weiter; aber für eine hinreichend schmale Gaußkurve (für kleines σ) können wir $\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa)$ nach $\sigma\kappa$ entwickeln und mit der linearen Näherung arbeiten:

$$\omega(\mathbf{k}_0 + \sigma\kappa) \approx \omega(\mathbf{k}_0) + v\sigma\kappa \quad \text{mit} \quad v = \left(\frac{d\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$$

Für elektromagnetische Wellen ist $\omega(\mathbf{k}) = c\mathbf{k}$ linear, und diese Näherung wird exakt. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{u}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}z - \omega(\mathbf{k})t)} &= \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp \left[-\frac{\kappa^2}{2} + i\sigma(z - vt)\kappa \right] \\ &= \mathbf{u}_0 e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right] \end{aligned} \quad (10.29)$$

wegen

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa^2}{2} + i\sigma(z - vt)\kappa &= \frac{1}{2} \{ (i\kappa)^2 + 2i\sigma(z - vt)\kappa + \sigma^2(z - vt)^2 \} - \frac{1}{2} \sigma^2(z - vt)^2 \\ &= \frac{1}{2} (i\kappa + \sigma(z - vt))^2 - \frac{1}{2} \sigma^2(z - vt)^2 \end{aligned} \quad (10.30)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \exp \left[\frac{1}{2} (i\kappa + \sigma(z - vt))^2 \right] = \sqrt{2\pi} \quad (10.31)$$

Der zweite Teil von Gl. (10.28) liefert das konjugierte Komplexe davon. Endergebnis:

$$\mathbf{u}(z, t) = 2\mathbf{u}_0 \cos[k_0 z - \omega(k_0)t] \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right] \quad (10.32)$$

Abb. 10.3 zeigt die z -Abhängigkeit der Lösung für eine feste Zeit t . Die Welle

$$\propto \cos[k_0 z - \omega(k_0)t] = \cos \left[k_0 \left(z - \frac{\omega(k_0)}{k_0} t \right) \right]$$

bewegt sich mit Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$$

in z -Richtung. Sie wird begrenzt durch den z -abhängigen Amplitudenfaktor

$$\pm \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}(z - vt)^2 \right]$$

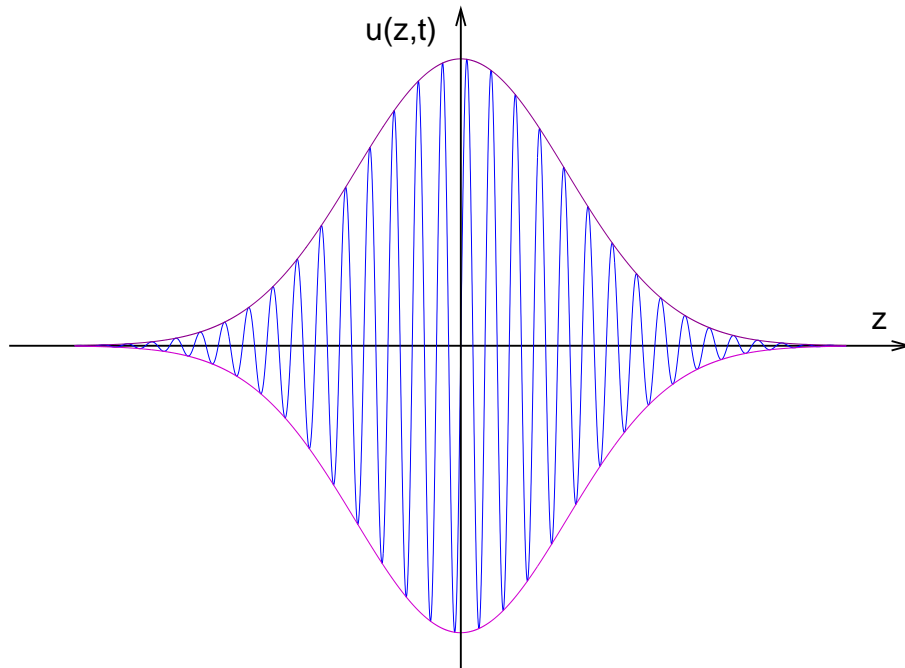


Abbildung 10.3:
Momentaufnahme
des Wellenpakets für eine
feste Zeit t .

der Breite $1/\sigma$, der sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{gr}} = v = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=k_0}$$

in z -Richtung bewegt. Der Amplitudenfaktor formt das Wellenpaket. Im Allgemeinen sind Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit verschieden; dann gleitet die Welle durch das Wellenpaket hindurch. Im Fall elektromagnetischer Wellen jedoch sind beide gleich der Lichtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \text{Phasengeschwindigkeit} \quad v_{\text{ph}} &= \frac{\omega(k)}{k} = c \\ \text{Gruppengeschwindigkeit} \quad v_{\text{gr}} &= \frac{\partial\omega(k)}{\partial k} = c \end{aligned} \tag{10.33}$$

Welle und Wellenpaket sind hier also starr verbunden. Die Verallgemeinerung auf eine allgemeine Ausbreitungsrichtung \vec{k} ist unproblematisch; das Wellenpaket wird dann durch

$$\mathbf{u}(\vec{x}, t) = \int d^3k \tilde{\mathbf{u}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} \tag{10.34}$$

dargestellt, und man erhält für das Wellenpaket die Gleichung

$$\text{Re } \mathbf{u}(\vec{x}, t) = \cos [\vec{k}_0\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t] \int d^3k f(\vec{k} - \vec{k}_0) \cos [(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{x} - \vec{v}t)]$$

(10.35)

mit einer um \vec{k}_0 zentrierten Amplitudenfunktion $\tilde{u}(\vec{k}) = f(\vec{k} - \vec{k}_0)$.

Fourierdarstellung des Vektorpotentials

Signale endlicher Energie erhält man nur für raum-zeitlich begrenzte Felder (Wellenpakete), die wir aus monochromatischen ebenen Wellen durch Superposition aufbauen können. Für das Vektorpotential erhalten wir:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + \vec{A}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right]. \quad (10.36)$$

Hierbei haben wir wieder die beiden Basislösungen $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t))$ so addiert, dass $\vec{A}(\vec{x}, t)$ reell ist. Wegen $\omega = c|\vec{k}|$ kommen in (10.36) alle Frequenzen ω vor. Für die Fouriertransformation ist hier die symmetrische Schreibweise gewählt. Gleichzeitig stellt Gl. (10.36) die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (9.8) dar. Die Coulomb-Eichung verlangt

$$\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0. \quad (10.37)$$

Photonen-Addition der Erhaltungsgrößen

Wichtig für den Aufbau der Quantenmechanik, die das elektromagnetische Feld durch Photonen beschreibt, ist die Eigenschaft, dass Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes sich additiv aus den Beiträgen der monochromatischen ebenen Wellen zusammensetzen. Wir demonstrieren dies für den Fall der Energie. Dazu schreiben wir (10.36) noch einmal um,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\vec{A}(\vec{k}, t) + \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (10.38)$$

mit den Abkürzungen

$$\vec{A}(\vec{k}, t) = \vec{A}(\vec{k}) \exp(-i\omega t); \quad \vec{A}^*(-\vec{k}, t) = \vec{A}^*(-\vec{k}) \exp(i\omega t). \quad (10.39)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir hier die Tilde bei den Fou-

riertransformierten weg. Damit wird nach (8.10) die Feldenergie zu

$$\begin{aligned}
W &= \int d^3x \omega_F = \int d^3x \left[\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \vec{A})^2 \right] \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\
&\quad \left[\frac{\epsilon_0}{2} \left\{ -i\omega \vec{A}(\vec{k}, t) + i\omega \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \cdot \left\{ -i\omega' \vec{A}(\vec{k}', t) + i\omega' \vec{A}^*(-\vec{k}', t) \right\} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2\mu_0} \left\{ i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, t) + i\vec{k} \times \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \cdot \left\{ i\vec{k}' \times \vec{A}(\vec{k}', t) + i\vec{k}' \times \vec{A}^*(-\vec{k}', t) \right\} \right], \tag{10.40}
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{k}, t) = -i\omega \vec{A}(\vec{k}, t) \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^*(-\vec{k}, t) = i\omega \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \tag{10.41}$$

und

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = i(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, t)) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \tag{10.42}$$

benutzt haben.

Nach Ausführen der Integration $\int d^3x$ erhalten wir wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \exp [i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}] = \delta(\vec{k} + \vec{k}') \tag{10.43}$$

und $\delta(\vec{k}) = \delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z)$ nur Beiträge für $\vec{k}' = -\vec{k}$ und mit $\omega = c|\vec{k}|$ auch nur für $\omega' = \omega$. Wegen der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0$ ist $\vec{k} \perp \vec{A}$, und in der allgemeinen Vektoridentität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

entfällt durch diese Orthogonalität der zweite Summand, und wir haben

$$(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) \cdot (\vec{k} \times \vec{A}(-\vec{k})) = |\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}(-\vec{k}).$$

Wir verwenden noch $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ und finden:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{8} \int d^3\mathbf{k} \left[(i\omega)^2 \left\{ \vec{A}(\vec{k}, t) - \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \left\{ \vec{A}(-\vec{k}, t) - \vec{A}^*(\vec{k}, t) \right\} \right. \\
&\quad \left. - (ikc)^2 \left\{ \vec{A}(\vec{k}, t) + \vec{A}^*(-\vec{k}, t) \right\} \left\{ \vec{A}(-\vec{k}, t) + \vec{A}^*(\vec{k}, t) \right\} \right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{4} \int d^3\mathbf{k} \omega^2 \left[\vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) + \vec{A}^*(-\vec{k}) \cdot \vec{A}(-\vec{k}) \right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} \omega^2 \left[\vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) \right].
\end{aligned} \tag{10.44}$$

Gleichung (10.44) beschreibt die Feldenergie als Summe (Integral) der Einzelbeiträge $\langle \omega_{\mathbb{F}} \rangle = (\epsilon_0/2)\omega^2 |\vec{A}_0|^2$ aus Gl. (9.39) der beteiligten monochromatischen Wellen. Sie stellt zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für Impuls und Drehimpuls die Grundlage für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch unabhängige *Teilchen* (Photonen) dar. W ist selbst zeitunabhängig in Einklang mit der Energieerhaltung.