Aufgabe 1: Fragen

1a) In Abwesenheit von Quellen lauten die Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

1b) Die dielektrische Verschiebung

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$$

ist ein makroskopisches Hilfsfeld. Es erfüllt die Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f$$

d.h. Quelle der dielektrischen Verschiebung ist die Dichte der freien Ladungsträger. Sie ist damit unabhängig von den Materialeigenschaften; diese gehen über die dielektrische Polarisation $\vec{\mathcal{P}}$ in die elektrische Feldstärke $\vec{\mathcal{E}}$ ein. Für lineare isotrope Medien gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen dielektrischer Verschiebung und elektrischer Feldstärke:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

1c) Das elektrische Dipolmoment

$$\vec{d} = \int d^3x \, \rho(\vec{x}) \vec{x}$$

ist abhängig vom Koordinatensystem, denn wenn man den Ursprung des Koordinatensystems um $\vec{a}$ verschiebt, dann erhält man ein um $Q\vec{a}$ (Q Gesamtladung) verschobenes Dipolmoment. Für das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x \left(\vec{x} \times \vec{j} \right)$$

bedeutet jedoch eine Verschiebung des Koordinatensystems keine Änderung, da der Zusatzterm im Integral verschwindet:

$$\vec{m}' = \frac{1}{2} \int_V d^3x \left((\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{j} \right) = \vec{m} - \frac{1}{2} \vec{a} \times \int_V d^3x \, \vec{j} = \vec{m}$$

1d) Zusätzlich zu den Maxwellgleichungen ist noch eine Eichung erforderlich, um zur Wellengleichung zu gelangen. Jede Lösung der Wellengleichung wird also auch die Maxwellgleichungen erfüllen, nicht jede Lösung der Maxwellgleichungen erfüllt jedoch die Wellengleichung.

1e) Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt nach dem Ampère-Maxwellschen Gesetz

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

ein magnetisches Feld; ändert sich der Fluss dieses Magnetfelds durch den Leiterkreis, so wird gemäß

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt, der nach der Lenzschen Regel dem primären Strom entgegenwirkt.

1f) Die retardierte Greensche Funktion

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \tag{5}$$

die die Gleichung

$$\Box G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')$$

löst, stellt eine Kugelwelle dar; sie hat die Form einer Kugelwelle

$$\frac{f(r - ct)}{r},$$

entsteht zum Zeitpunkt $t = t'$ im Punkt $\vec{x} = \vec{x}'$, breitet sich kugelsymmetrisch aus und fällt in ihrer Intensität mit $1/r$ ab.

1g) Die allgemeinen Stetigkeitsbedingungen für das makroskopische elektrische Feld sind

$$\vec{n} \times \left(\vec{\mathcal{E}}^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}^{(2)}\right) = 0 \tag{6}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{\mathcal{D}}^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}^{(2)}\right) = \gamma_f \tag{7}$$

d.h. die Tangentialkomponenten sind stetig; für die Normalkomponenten beim Übergang von einem Leiter (1) auf einen Nichtleiter (2) folgt daraus

$$\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = 0,$$

und

$$\epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(2)} = -\gamma_f \,.$$

1h) Kausalität bedeutet das physikalische Prinzip, dass eine Wirkung erst eintreten soll, nachdem eine Ursache aufgetreten ist und nachdem zusätzlich die Laufzeit des Signals vom Ort der Ursache zum Ort der Wirkung vergangen ist. Die Maxwellgleichungen sind mit kausalen und antikausalen Lösungen verträglich.

1i) Die Viererstromdichte fasst Ladung und gewöhnliche Stromdichte zu einen Vierervektor zusammen:

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \qquad (j_\mu) = (c\rho, -\vec{j})$$

1j) Einen Abstand zwischen zwei Ereignissen x und y im Minkowskiraum nennt man raumartig, wenn sein Quadrat negativ ist, wenn sich die Ereignisse also nicht durch ein Lichtsignal verbinden lassen, und zeitartig, wenn sein Quadrat positiv ist, wenn sich die Ereignisse also durch ein Lichtsignal verbinden lassen:

$$\left(x^\mu - y^\mu\right)\left(x_\mu - y_\mu\right) = \begin{cases} < 0: & \text{raumartig} \\ > 0: & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Spiegelströme

Im rechten Halbraum $x > 0$ stimmen die Quellen des magnetischen Feldes für das ursprüngliche Problem und für das Problem, in dem Medium 2 durch einen Spiegelstrom ersetzt wurde überein. Wenn wir nun I' noch so wählen können, dass auch die geforderten Randbedingungen an der Grenzfläche $x = 0$ übereinstimmen, so haben wir wegen der Eindeutigkeit der Lösung auch das ursprüngliche Problem gelöst. Das Magnetfeld eines langen Leiters in z-Richtung hat in Zylinderkoordinaten die Form

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

(Siehe z.B. Aufgabe 6). In kartesischen Koordinaten, wenn der Leiter am Ort
$x = a, y = 0$ verläuft, wird das zu

$$H_x = |\vec{H}|\cos(\varphi) = \frac{I}{2\pi}\frac{r\cos(\varphi)}{r^2} = \frac{I}{2\pi}\frac{y}{(x-a)^2 + y^2}$$

Ebenso:

$$H_y = \frac{I}{2\pi}\frac{a-x}{(x-a)^2+y^2}$$

Ganz analog für die Spiegelströme I' und I'':

$$H'_x = \tfrac{I'}{2\pi}\tfrac{y}{(x+a)^2+y^2} \quad H''_x = \tfrac{I''}{2\pi}\tfrac{y}{(x-a)^2+y^2}$$
$$H'_y = \tfrac{I'}{2\pi}\tfrac{x+a}{(x+a)^2+y^2} \quad H''_y = \tfrac{I''}{2\pi}\tfrac{a-x}{(x-a)^2+y^2}$$

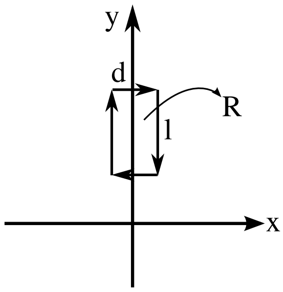
Im linken Halbraum herrscht nur das Feld $\vec{H}_< = \vec{H}''$. Für $x > 0$ haben wir das Feld des vorgegebenen Stroms I und des Spiegelstroms I'' zu berücksichtigen: $\vec{H}_> = \vec{H} + \vec{H}'$.
Die Randbedingungen bei $x = 0$ lauten:

$$\left.\begin{array}{c} \mu_1 H_n^> = \mu_2 H_n^< \\ H_t^< = H_t^> \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \mu_1(I+I') & = \mu_2 I'' \\ I - I' & = I'' \end{array}\right\} \Rightarrow I' = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I, \qquad I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I$$

Damit ergibt sich für die Felder:

$$\begin{aligned}\vec{H}_> &= \tfrac{I}{2\pi}\left[\left(\tfrac{y}{(x-a)^2+y^2} + \tfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\tfrac{y}{(x+a)^2+y^2}\right)\vec{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\tfrac{a-x}{(x-a)^2+y^2} - \tfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\tfrac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right)\vec{e}_y\right] \\ \vec{H}_< &= \tfrac{I}{\pi}\tfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\left[\tfrac{y}{(x-a)^2+y^2}\vec{e}_x + \tfrac{a-x}{(x-a)^2+y^2}\vec{e_y}\right]\end{aligned}$$

Nun berechnen wird die induzierte Flächenstromdichte: Aus $\nabla\times\vec{B} = \mu\vec{\jmath}$ folgt bei Integration über ein kleines Rechteck um $x = 0$ (Seitenlängen: l, d, wobei d parallel zur x-Achse verläuft):



$$\int_R \nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{f} = \oint_{\partial R}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_R \vec{\jmath}\cdot d\vec{f} = \jmath dl$$

Im Limes $l \to 0$ heben sich die Integrationsbeiträge parallel zur x-Achse gegenseitig weg.

Mit $\kappa := \lim_{d\to 0} d\jmath$ erhlaten wir für die gesuchte Flächenstromdichte:

$$-\kappa = \lim_{d\to 0}\lim_{l\to 0}\frac{1}{l}\left(\int_y^{y+l}\mu_1\vec{H}_>(y')\,dy' - \mu_2\int_y^{y+l}\vec{H}_<(y')\,dy'\right)$$

Wenn $F(t)$ die Stammfunktion des Integranden bezeichnet, haben wir also einen Ausdruck der Form

$$\lim_{l\to 0}\frac{F(y+l)-F(y)}{l} = F'(y)$$

auszuwerten und müssen lediglich den Integranden an der Stelle y berechnen.

$$\Rightarrow \kappa = -\lim_{d\to 0}\left[\frac{I\mu_1}{2\pi}\left(\frac{a-d/2}{(d/2-a)^2+y^2} - \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{d/2+a}{(d/2+a)^2+y^2}\right)\right.$$

$$\left. -\mu_2\frac{I}{\pi}\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{a-d/2}{(d/2-a)^2+y^2}\right]$$

$$= -\frac{I}{2\pi}\frac{a}{a^2+y^2}\left(\mu_1 - \mu_1\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2} - \frac{2\mu_2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)$$

$$= \frac{I}{\pi}\frac{a}{a^2+y^2}\frac{\mu_2\mu_1-\mu_1^2}{\mu_1+\mu_2}$$

Aufgabe 3: Abstrahlung einer rotierenden Stromschleife

a)Zunächst berechnen wir das magnetische Moment der Stromschleife. Zur Integration verwenden wir Zylinderkoordinaten mit der z-Achse senkrecht zum Querschnitt der Leiterschleife. Der Radius der Schleife sei R. Mit $\vec{\jmath} = I_0\delta(z)\delta(r-R)\vec{e}_\varphi$ folgt dann:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{\jmath}(\vec{r})d^3r = \frac{I_0}{2}\iiint \vec{r}\times\vec{e}_\varphi\delta(z)\delta(r-R)r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{I_0}{2}\iiint (r\vec{e_r}+z\vec{e}_z)\times\vec{e}_\varphi r\delta(z)\delta(r-R)\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{I_0R^2}{2}\int_0^{2\pi}\vec{e}_z\,d\varphi = I_0\pi R^2\vec{e}_z$$

Wir legen nun die z-Achse parallel zur Drehachse. Dann hat das magnetische Moment die Form $\vec{m}(t) = m_0(\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t, 0))^T$ mit $m_0 = I_0\pi R^2$ Das Vektorpotential der magnetischen Dipolstrahlung schreiben wir in der Form:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r^2}(\vec{r}\times\vec{m}(t))$$

Dann erhalten wir mit $\Phi = 0$ für das elektrische Feld:

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r^2}(\vec{r}\times\frac{d\vec{m}}{dt})$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{k\mu_o}{4\pi}\frac{\sin(kr)}{r^2}(\vec{r}\times\frac{d\vec{m}}{dt})$$

Hier haben wir den Realteil genommen. Zur Berechnung des Magnetfeldes benutzen wir die Beziehung

$$\nabla\times(f(r)\vec{v}(\vec{r})) = (\nabla f)\times\vec{v} + f\,\nabla\times\vec{v}$$

und erhalten:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\left[(\nabla\frac{e^{ikr}}{r^2}) \times (\vec{r} \times \vec{m}) + \frac{e^{ikr}}{r^2}\nabla \times (\vec{r} \times \vec{m})\right]$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{r} \times \vec{m}) &= \epsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j\epsilon_{kln}r_l m_n = \vec{e}_i(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})m_n\partial_j r_l \\ &= \vec{e}_i(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})m_n\delta_{jl} = \vec{e}_i(\delta_{ij}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jj})m_n \\ &= \vec{e}_i(\delta_{in} - 3\delta_{in})m_n = -2\vec{m}\end{aligned}$$

Hier haben wir $\partial_j r_n = \delta_{jn}$, sowie $\delta_{jj} = 3$ und $\delta_{ij}\delta_{jn} = \delta_{in}$ ausgenutzt. Da zum Strahlungsfeld nur Feldanteile beitragen, die höchstens mit $O(\frac{1}{r})$ abfallen, können wir also den Term

$$\frac{-2ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r^2}\vec{m}$$

im Folgenden vernachlässigen und wir erhalten

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &\approx \frac{ik\mu_0}{4\pi}\left(\nabla\frac{e^{ikr}}{r^2}\right) \times (\vec{r} \times \vec{m}) \\ &= \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{ike^{ikr}r^2 - 2re^{ikr}}{r^4}\frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{m}) \\ &\approx \frac{-k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{m})\end{aligned}$$

nachdem wir wieder nur den Term $O(\frac{1}{r})$ behalten haben. Um das $\vec{B}$-Feld zu berechnen, müssen wir wieder den Realteil nehmen:

$$\vec{B} \approx \frac{-k^2\mu_0}{4\pi}\frac{\cos(kr)}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{m})$$

Damit ergibt sich für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{k^3\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{m}}{dt}\right) \times \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{m}) \\ &= \frac{k^2\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\left[\vec{r}\left((\vec{r} \times \frac{d\vec{m}}{dt}) \cdot (\vec{r} \times \vec{m})\right) - (\vec{r} \times \vec{m})\left(\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \frac{d\vec{m}}{dt})\right)\right]\end{aligned}$$

unter Ausnutzen der bac-cab-Regel. Da $\vec{r}$ orthogonal zu $\vec{r} \times \frac{d\vec{m}}{dt}$ ist, verschwindet der zweite Summand. Den ersten können wir mit der Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

auswerten:

$$\vec{S} = \frac{k^3\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\vec{r}\left[r^2(\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{m}) - (\vec{r} \cdot \vec{m})(\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{r})\right]$$

Dabei sind

$$\vec{m} = m_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{d\vec{m}}{dt} = m_0\omega_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{k^3\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\vec{r}\left[0 - m_0^2\omega_0(xc+ys)(-xs+yc\right]$$

$$= \frac{k^2\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\vec{r}\left[-m_0^2\omega_0((-x^2+y^2)sc + xy(c^2-s^2))\right]$$

wenn wir $s = \sin(\omega_0 t), c = \cos(\omega_0 t)$ setzen.
Mit

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\, dt = 0, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_0 t)\, dt = \frac{1}{2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

können wir die Zeitmittelung durchführen

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = -m_0^2\omega_0 \frac{k^2\mu_0}{16\pi^2}\frac{\sin(kr)\cos(kr)}{r^5}\vec{r}(0 + xy(1/2 - 1/2)) = 0$$

Die rotierende Schleife strahlt also nicht.

b) Die mittlere ausgestrahlte Leistung ist 0 und der Energieerhaltungssatz reduziert sich auf:

$$E_{\text{rot}} = \text{const.} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2(t) \Rightarrow \omega(t) = \omega_0$$

Aufgabe 4: Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

a)Die makroskopischen Maxwellgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{D} = 0 \quad \nabla\cdot\vec{E} = 0, \text{ wegen } \vec{D} = \epsilon\vec{E} \\ &\nabla\times\vec{E} = 0, \end{aligned}$$

da keine freien Ladungen oder Ströme auftreten. Die Randbedingungen lauten im Unendlichen:

$$r \to \infty : \vec{E} = E_0\vec{e}_z \Rightarrow \Phi = -E_0 z$$

An der Kugeloberfläche gilt: Die Normal- (d.h. Radial-)Komponente von $\vec{D}$ muss stetig sein: (Wir verwenden Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ). Die Indizes i, a stehen für Innen- und Außenraum.)

$$D_r^i|_{r=R} = D_r^a|_{r=R} \Rightarrow -\epsilon\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{\partial\Phi_a}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

Hier haben wir $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ verwendet. Weiter muss $\vec{E}$ in Richtung von $\vec{e}_\vartheta$ stetig sein:

$$E^i_\vartheta\Big|_{r=R} = E^a_\vartheta\Big|_{r=R} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_i}{\partial\vartheta}\Big|_{r=R} = \frac{\partial\Phi_a}{\partial\vartheta}\Big|_{r=R}$$

b)Da ϵ ein konstanter Skalar ist, wird die Kugel homogen und antiparallel zum anregenden Feld polarisiert. Daher ist $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ im Innenraum homogen und parallel zum anregenden Feld gerichtet und für das Potential im Inneren der Kugel gilt:

$$\Phi_i = -E_i z$$

Im Außenraum wirkt die polarisierte Kugel als elektrischer Dipol $\vec{p}_z$, der parallel zum anregenden Feld ausgerichtet ist. Dem Dipolpotential wird das Potential zum ursprünglichen homogenen $\vec{E}$-Feld überlagert:

$$\Phi_a = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_z \cdot \vec{r}}{r^3}$$

c)Um das elektrische Feld zu bestimmen, verwenden wir die beiden Stetigkeitsbedingungen:

$$-\epsilon\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{\partial\Phi_a}{\partial r}\Big|_{r=R} \Leftrightarrow \epsilon E_i\Big|_{r=R} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-E_0 r\cos(\vartheta) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z r\cos(\vartheta)}{r^3}\right)\Big|_{r=R}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon E_i = E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p_z}{R^3}$$

Und aus der Stetigkeit von $\vec{E}$ in Richtung $\vec{e}_\vartheta$:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial\vartheta}\Big|_{r=R} = \frac{\partial\Phi_a}{\partial\vartheta}\Big|_{r=R} \Leftrightarrow E_i = E_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z}{R^3}.$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z}{R^3}$ und Einsetzen in die erste ergibt dann das gewünschte Resultat:

$$E_i = \frac{3}{\epsilon + 2}E_0$$

d)Mit den schon berechneten Größen können wir das Dipolmoment der Kugel sofort bestimmen:

$$p_z = 4\pi\epsilon_0 R^3(E_0 - E_i) = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0\left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)$$

Aufgabe 5: Vergütung

a) Gesucht sind Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|\langle \vec{S}_r \rangle|}{|\langle \vec{S}_i \rangle|} \tag{8}$$

und Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{|\langle \vec{S}_t \rangle|}{|\langle \vec{S}_i \rangle|} \tag{9}$$

Dabei gilt

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \rangle$$

Wir können mit einer linear polarisierten Welle rechnen: $\vec{\mathcal{E}}$-Feld in x-Richtung, $\vec{\mathcal{H}}$-Feld in y-Richtung und Ausbreitung in z-Richtung; dann ist $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{k} \cdot \vec{x} = kz$:

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}$$

Ausserdem folgt aus den Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0 \;\curvearrowright\; \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \mu\omega\vec{\mathcal{H}}$$

und mit der Dispersionsrelation

$$\omega = c'k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}k$$

folgt

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{n}{c\mu}\vec{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}$$

Da die Medien nichtmagnetisch sind, gilt $\mu = \mu_0$. Für den Mittelwert der Energiestromdichte gilt schliesslich

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2}\frac{n}{c\mu}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_0^*)|\vec{e}_z \tag{10}$$

Nun zählen wir die Wellen auf, die in den drei Bereichen $z < 0$, $0 < z < d$ und $z > d$ auftreten; die Frequenz ω ändert sich bei

Reflexion und Brechung nicht:

$$z<0,\text{ nach rechts}\qquad \vec{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_{i0}\vec{e}_x e^{i(k_i z-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}}_i = \frac{n_1}{c\mu_0}\vec{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}_i = \frac{n_1}{c\mu_0}\mathcal{E}_{i0}\vec{e}_y e^{i(k_i z-\omega t)} \tag{11}$$

$$z<0,\text{ nach links}\qquad \vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{r0}\vec{e}_x e^{i(-k_r z-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}}_r = -\frac{n_1}{c\mu_0}\vec{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}_r = -\frac{n_1}{c\mu_0}\mathcal{E}_{r0}\vec{e}_y e^{i(-k_r z-\omega t)} \tag{12}$$

$$0<z<d,\text{ nach rechts}\qquad \vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}_0'\vec{e}_x e^{i(k' z-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}}' = \frac{n_2}{c\mu_0}\vec{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}' = \frac{n_2}{c\mu_0}\mathcal{E}_0'\vec{e}_y e^{i(k' z-\omega t)} \tag{13}$$

$$0<z<d,\text{ nach links}\qquad \vec{\mathcal{E}}'' = \mathcal{E}_0''\vec{e}_x e^{i(-k'' z-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}}'' = -\frac{n_2}{c\mu_0}\vec{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}'' = -\frac{n_2}{c\mu_0}\mathcal{E}_0''\vec{e}_y e^{i(-k'' z-\omega t)} \tag{14}$$

$$z>d,\text{ nach rechts}\qquad \vec{\mathcal{E}}_t = \mathcal{E}_{t0}\vec{e}_x e^{i(k_t z-\omega t)} \qquad \vec{\mathcal{H}}_t = \frac{n_3}{c\mu_0}\vec{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{n_3}{c\mu_0}\mathcal{E}_{t0}\vec{e}_y e^{i(k_t z-\omega t)} \tag{15}$$

Ausserdem gilt für die Beträge der Wellenvektoren $k_i = k_r$ und $k' = k''$.
Jetzt müssen die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfäche ausgenutzt werden; es gibt keine Oberflächenströme, und daher sind bei $z = 0$ und bei $z = d$ die Tangentialkomponenten von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ stetig (es gibt keine Normalkomponenten):

$$\vec{n}\times\left(\vec{\mathcal{E}}^{(1)}-\vec{\mathcal{E}}^{(2)}\right)=0\,; \qquad \vec{n}\times\left(\vec{\mathcal{H}}^{(1)}-\vec{\mathcal{H}}^{(2)}\right)=0 \tag{16}$$

also bei $z = 0$ und für $t = 0$

$$\mathcal{E}_{i0}+\mathcal{E}_{r0} = \mathcal{E}_0'+\mathcal{E}_0'' \tag{17}$$

$$\frac{n_1}{c\mu_0}(\mathcal{E}_{i0}-\mathcal{E}_{r0}) = \frac{n_2}{c\mu_0}(\mathcal{E}_0'-\mathcal{E}_0'') \tag{18}$$

und bei $z = d$ und für $t = 0$

$$\mathcal{E}_0' e^{ik'd}+\mathcal{E}_0'' e^{-ik'd} = \mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} \tag{19}$$

$$\frac{n_2}{c\mu_0}\left(\mathcal{E}_0' e^{ik'd}-\mathcal{E}_0'' e^{-ik'd}\right) = \frac{n_3}{c\mu_0}\mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} \tag{20}$$

Etwas umgestellt sind diese vier Gleichungen:

$$\mathcal{E}_{i0}+\mathcal{E}_{r0}-\mathcal{E}_0'-\mathcal{E}_0'' = 0 \tag{21}$$

$$n_1\mathcal{E}_{i0}-n_1\mathcal{E}_{r0}-n_2\mathcal{E}_0'+n_2\mathcal{E}_0'' = 0 \tag{22}$$

$$\mathcal{E}_0' e^{ik'd}+\mathcal{E}_0'' e^{-ik'd}-\mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} = 0 \tag{23}$$

$$n_2\mathcal{E}_0' e^{ik'd}-n_2\mathcal{E}_0'' e^{-ik'd}-n_3\mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} = 0 \tag{24}$$

Wir eliminieren jetzt $\mathcal{E}_0'$ und $\mathcal{E}_0''$. Dazu berechnen wir n_2 mal (23) minus (24):

$$2n_2\mathcal{E}_0''e^{-ik'd} - (n_2 - n_3)\mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} = 0 \quad \curvearrowright \quad \mathcal{E}_0'' = \frac{n_2 - n_3}{2n_2}\mathcal{E}_{t0}\underbrace{e^{i(k_t+k')d}}_{:=\alpha} \tag{25}$$

Einsetzen in (23) ergibt

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_0'e^{ik'd} + \frac{n_2 - n_3}{2n_2}\mathcal{E}_{t0}e^{i(k_t+k')d}e^{-ik'd} - \mathcal{E}_{t0}e^{ik_t d} = 0 \\ \curvearrowright \quad &\mathcal{E}_0' = \frac{n_2 + n_3}{2n_2}\mathcal{E}_{t0}\underbrace{e^{i(k_t-k')d}}_{:=\beta} \end{aligned} \tag{26}$$

Einsetzen von (25) und (26) in (21) und (22) ergibt

$$\mathcal{E}_{i0} + \mathcal{E}_{r0} - \frac{\mathcal{E}_{t0}}{2n_2}\big((n_2 + n_3)\beta + (n_2 - n_3)\alpha\big) = 0 \tag{27}$$

$$\mathcal{E}_{i0} - \mathcal{E}_{r0} - \frac{\mathcal{E}_{t0}}{2n_1}\big((n_2 + n_3)\beta - (n_2 - n_3)\alpha\big) = 0 \tag{28}$$

Addieren dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{i0} &= \frac{\mathcal{E}_{t0}}{2n_1n_2}\Big[n_1(n_2 + n_3)\beta + n_1(n_2 - n_3)\alpha + n_2(n_2 + n_3)\beta - n_2(n_2 - n_3)\alpha\Big] \\ &= \frac{\mathcal{E}_{t0}}{2n_1n_2}\Big[(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)\alpha\Big] \\ \curvearrowright \quad \frac{\mathcal{E}_{t0}}{\mathcal{E}_{i0}} &= \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)\alpha} \end{aligned} \tag{29}$$

Subtrahieren ergibt

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{r0} &= \frac{\mathcal{E}_{t0}}{2n_1n_2}\Big[(n_1 - n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 + n_2)(n_2 - n_3)\alpha\Big] \\ \curvearrowright \quad \frac{\mathcal{E}_{r0}}{\mathcal{E}_{t0}} &= \frac{(n_1 - n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 + n_2)(n_2 - n_3)\alpha}{4n_1n_2} \end{aligned} \tag{30}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{r0}}{\mathcal{E}_{i0}} &= \frac{\mathcal{E}_{r0}}{\mathcal{E}_{t0}}\frac{\mathcal{E}_{t0}}{\mathcal{E}_{i0}} \\ &= \frac{(n_1 - n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 + n_2)(n_2 - n_3)\alpha}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)\beta + (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)\alpha} \end{aligned} \tag{31}$$

Mit (10) und (8) folgt für den Reflexionskoeffizienten

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{|\langle \vec{S}_r \rangle|}{|\langle \vec{S}_i \rangle|} = \frac{\mathcal{E}_{r0}\mathcal{E}_{r0}^*}{\mathcal{E}_{i0}\mathcal{E}_{i0}^*} \\
&= \frac{(n_1-n_2)^2(n_2+n_3)^2 + (n_1+n_2)^2(n_2-n_3)^2 + (n_1^2-n_2^2)(n_2^2-n_3^2)2\cos(2k'd)}{(n_1+n_2)^2(n_2+n_3)^2 + (n_1-n_2)^2(n_2-n_3)^2 + (n_1^2-n_2^2)(n_2^2-n_3^2)2\cos(2k'd)} \\
&=: \frac{A + B\cos(2k'd)}{D + B\cos(2k'd)}
\end{aligned} \tag{32}
$$

wegen $\alpha\alpha^* = 1$, $\beta\beta^* = 1$ und

$$\alpha\beta^* + \alpha^*\beta = e^{i(k_t+k')d}e^{-i(k_t-k')d} + e^{-i(k_t+k')d}e^{i(k_t-k')d} = e^{2ik'd} + e^{-2ik'd} = 2\cos(2k'd)$$

Für den Transmissionskoeffizienten verwenden wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}_{t0}}{\mathcal{E}_{i0}} &= \frac{\mathcal{E}_{t0}}{\mathcal{E}_{r0}}\frac{\mathcal{E}_{r0}}{\mathcal{E}_{i0}} \\
&= \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)(n_2+n_3)\beta + (n_1-n_2)(n_2-n_3)\alpha}
\end{aligned} \tag{33}
$$

und finden

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{|\langle \vec{S}_t \rangle|}{|\langle \vec{S}_i \rangle|} = \frac{\mathcal{E}_{t0}\mathcal{E}_{t0}^*}{\mathcal{E}_{i0}\mathcal{E}_{i0}^*} \\
&= \frac{16n_1^2n_2^2}{(n_1+n_2)^2(n_2+n_3)^2 + (n_1-n_2)^2(n_2-n_3)^2 + (n_1^2-n_2^2)(n_2^2-n_3^2)2\cos(2k'd)} \\
&=: \frac{C}{D + B\cos(2k'd)}
\end{aligned} \tag{34}
$$

b) Da in Gl. (32) und (34) $D > 0$ und $B > 0$ gilt, wird T maximal für $\cos(2k'd) = -1$, d.h.

$$2k'd = (2m+1)\pi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}$$

und mit $k' = 2\pi/\lambda'$

$$d = (2m+1)\frac{\lambda'}{4} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dann ist

$$R = \frac{A-B}{D-B}$$

Damit $R = 0$ wird, muss $A - B = 0$ gelten, also

$$\begin{aligned}
0 &= (n_1 - n_2)^2(n_2 + n_3)^2 + (n_1 + n_2)^2(n_2 - n_3)^2 - 2(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2) \\
&= (n_1^2 - 2n_1n_2 + n_2^2)(n_2^2 + 2n_2n_3 + n_3^2) + (n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2)(n_2^2 - 2n_2n_3 + n_3^2) \\
&\quad + 2n_1^2n_2^2 + 2n_2^2n_3^2 - 2n_1^2n_3^2 - 2n_2^4 \\
&= n_1^2n_2^2 + 2n_1^2n_2n_3 + n_1^2n_3^2 - 2n_1n_2^3 - 4n_1n_2^2n_3 - 2n_1n_2n_3^2 + n_2^4 + 2n_2^3n_3 + n_2^2n_3^2 \\
&\quad + n_1^2n_2^2 - 2n_1^2n_2n_3 + n_1^2n_3^2 + 2n_1n_2^3 - 4n_1n_2^2n_3 + 2n_1n_2n_3^2 + n_2^4 - 2n_2^3n_3 + n_2^2n_3^2 \\
&\quad + 2n_1^2n_2^2 + 2n_2^2n_3^2 - 2n_1^2n_3^2 - 2n_2^4 \\
&= 4n_2^4 - 8n_1n_2^2n_3 + 4n_1^2n_3^2 = 4(n_2^2 - n_1n_3)^2
\end{aligned} \tag{35}$$

und damit

$$n_2^2 = n_1n_3$$

und mit $n_3 = 1$

$$n_2 = \sqrt{n_1}$$

Aufgabe 6: Induktion

a) Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten $(r, \varphi, z) : \vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Ferner: $d\vec{s} = \vec{e}_z\, dz$. Mit $d\vec{s} \times \vec{r} = \vec{e}_z \times (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)\, dz$ und der Substitution $z = r\sinh(u)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\, dz = \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\cosh u\, du}{(r^2 + r^2\sinh^2(u))^{3/2}}\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh^2(u)}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\tanh(u)\Big|_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

b)Rechts vom Draht ($x > 0$) zeigt das $\vec{B}$-Feld in der xz-Ebene also immer in y-Richtung. Für $x < 0$ in $-y$-Richtung. $(x(t), y(t))$ bezeichne die Position der linken unteren Ecke der Leiterschleife. Mit $\vec{B} \cdot df = B(x)\, dxdz$ folgt für den magnetischen Fluss durch die Schleife: [Für eine Schleife, die sich rechts vom Draht bewegt]

$$\Phi(t) = \int_{z(t)}^{z(t)+a}\int_{x(t)}^{x(t)+a} B(x')\, dx'dz' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\int_x^{x+a}\frac{dx'}{x} = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}(\ln(x(t)+a) - \ln(x(t)))$$

Und für die Induktionsspannung: $[x = v_0 t]$

$$U(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\frac{a\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x(t)+a} - \frac{1}{x(t)}\right)\dot{x}(t) = \frac{a^2\mu_0 I}{2\pi(v_0t^2 + at)}$$