



Saarbrücken, 20.12.2007

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

9. Übung

(Abgabe Donnerstag, 10.01.2007 in der Vorlesung)

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Fadenpendel II

Gegeben sei ein ebenes Fadenpendel mit Punktmasse m und masselosem Faden der Länge l im Schwerfeld der Erde.

- Benutzen Sie zunächst kartesische Koordinaten (x, y) zur Beschreibung. Bringen Sie die Zwangsbedingung in die Form $g(x, y) = 0$ und berechnen Sie die verallgemeinerte Lagrangefunktion $L^* = L - \lambda g(x, y)$ (λ : Lagrange-Multiplikator) sowie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen.
- Eliminieren Sie λ aus den Bewegungsgleichungen und schreiben Sie die verbleibende Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) unter Ausnutzung der Zwangsbedingung.
- Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ und die Zwangskräfte in x - und y -Richtung. Berechnen Sie dann die Fadenspannung, ausgedrückt durch φ und $\dot{\varphi}$. Interpretieren Sie die auftretenden Terme.

Aufgabe 32 (15 Punkte)

Lenzscher Vektor

Das Kepler-Problem lässt sich mit Hilfe des *Lenz-Runge*-Vektors

$$\vec{A}(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{r} + (\vec{l} \times \vec{v})$$

lösen, wobei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{l} = (\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}})$, $\alpha = \kappa m_1 m_2$ und μ die reduzierte Masse ist.

- Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})$ eine Erhaltungsgröße ist.
- In welche Richtung zeigt der Vektor? Welche physikalische Bedeutung hat sein Betrag?
- Berechnen Sie $\vec{A} \cdot \vec{r}$ und bestimmen Sie daraus die Bahnkurve $\mathbf{r}(\phi)$ eines Massenpunktes im Gravitationsfeld.

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Noether-Theorem

Ein Teilchen der Masse m und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_x, v_y \neq 0, v_z = 0$ fällt frei im homogenen Schwerfeld.

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten auf und berechnen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.
- Finden Sie drei kontinuierliche Symmetrien des Systems und schreiben Sie sie analog zur Vorlesung als Flüsse, unter denen die Lagrangefunktion invariant bleibt. Begründen Sie kurz, warum es sich bei den von Ihnen verwendeten Abbildungen um Flüsse handelt.
- Berechnen Sie zu jedem Fluss aus b) das zugehörige erzeugende Vektorfeld.
- Benutzen Sie den Satz von Noether, um aus den Symmetrien drei Erhaltungsgrößen herzuleiten. Welche physikalische Bedeutung haben diese?

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Skifahrer

Ein Skifahrer der Masse m fährt reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft einen halbkugelförmigen Hang hinunter. Er starte auf dem höchsten Punkt des Hanges.

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf.
- Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, um die Zwangskräfte, die auf den Skifahrer wirken, zu bestimmen.
- Bei welchem Winkel ϑ_0 zur z -Achse, die vertikal durch den Pol der Halbkugel verläuft, verliert der Skifahrer den Kontakt zum Hang?



**Frohe Weihnachten und einen
guten Start ins neue Jahr!**