



## Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

### 8. Übung

(Abgabe Donnerstag, 20.12.2007 in der Vorlesung)

#### Aufgabe 27 (10 Punkte)

##### Variationsrechnung

Zeigen Sie, dass in einer Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  eine Gerade ist. Stellen Sie dazu die Länge des Weges zwischen den Punkten durch

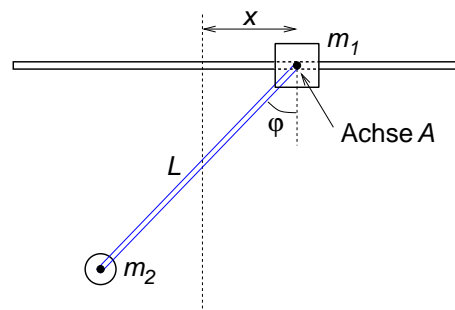
$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

dar. Leiten Sie sich einen Ausdruck für das Linienelement  $ds$  in der  $x$ - $y$ -Ebene her, ermitteln Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Problem  $\delta S = 0$  und lösen Sie sie.

#### Aufgabe 28 (15 Punkte)

##### Pendel mit beweglicher Aufhängung

Eine Masse  $m_1$  kann sich reibungsfrei auf einer unendlich ausgedehnten horizontalen Stange bewegen. Die Masse  $m_2$  pendele unter dem Einfluss der Schwerkraft an einem masselosen Arm mit Länge  $L$  frei um die Achse  $A$ . Betrachten Sie  $m_1$  und  $m_2$  als punktförmig.



- Wie lauten die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen in den generalisierten Koordinaten  $x$  und  $\varphi$ ?
- Entwickeln Sie die Bewegungsgleichungen bis zur ersten Ordnung in  $\varphi$  und  $x$  (und deren Ableitungen).
- Bestimmen Sie die Periodendauer des Systems mit den Näherungen aus Teil b). Welchen Wert muss das Massenverhältnis  $\frac{m_1}{m_2}$  annehmen, damit das System die gleiche Periode hat wie das einfache mathematische Pendel?

### Aufgabe 29 (10 Punkte)

#### Lagrange-Funktion

Betrachten Sie eine hypothetische Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$ , die nicht nur von  $q$  und  $\dot{q}$ , sondern auch von  $\ddot{q}$  abhängt. Bestimmen Sie aus der Bedingung für ein Extremum der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

bei festgehaltenen  $q$ ,  $\dot{q}$  zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  wie in diesem Falle die Lagrange-Gleichung aussehen würde.

### Aufgabe 30 (10 Punkte)

#### Schwingung längs einer Kurve

Welche Form muss eine Kurve haben, damit die Periode der Schwingung einer Masse  $m$  im Schwerfeld längs dieser Kurve nicht von der Amplitude abhängt?

#### Anleitung:

- Welche Form muss die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Bogenlänge haben, damit die Schwingungsdauer analog zum harmonischen Oszillator nicht von der Amplitude abhängt?
- Leiten Sie aus der Form der potentiellen Energie im Schwerfeld und des Ergebnisses aus a) eine Beziehung zwischen der Bogenlänge der gesuchten Kurve und den kartesischen Koordinaten  $x, y$  her.
- Berechnen Sie daraus die Parameterdarstellung der gesuchten Kurve. Um welche Kurve handelt es sich?

*Hinweis zu c), d):*

Beim Lösen von Integralen der Form  $\int \sqrt{a/y - 1} dy$  ist die Substitution  $y = \frac{1}{2}a(1 - \cos(\varphi))$  nützlich.

