



Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

8. Übung

(Abgabe Donnerstag, 20.12.2007 in der Vorlesung)

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Variationsrechnung

Zeigen Sie, dass in einer Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 eine Gerade ist. Stellen Sie dazu die Länge des Weges zwischen den Punkten durch

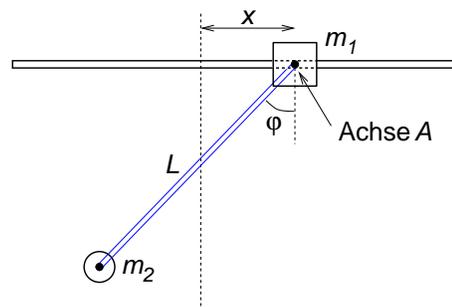
$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

dar. Leiten Sie sich einen Ausdruck für das Linienelement ds in der x - y -Ebene her, ermitteln Sie die Euler–Lagrange Gleichung für das Problem $\delta S = 0$ und lösen Sie sie.

Aufgabe 28 (15 Punkte)

Pendel mit beweglicher Aufhängung

Eine Masse m_1 kann sich reibungsfrei auf einer unendlich ausgedehnten horizontalen Stange bewegen. Die Masse m_2 pendele unter dem Einfluss der Schwerkraft an einem masselosen Arm mit Länge L frei um die Achse A . Betrachten Sie m_1 und m_2 als punktförmig.



- Wie lauten die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen in den generalisierten Koordinaten x und φ ?
- Entwickeln Sie die Bewegungsgleichungen bis zur ersten Ordnung in φ und x (und deren Ableitungen).
- Bestimmen Sie die Periodendauer des Systems mit den Näherungen aus Teil b). Welchen Wert muss das Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ annehmen, damit das System die gleiche Periode hat wie das einfache mathematische Pendel?

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Lagrange-Funktion

Betrachten Sie eine hypothetische Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$, die nicht nur von q und \dot{q} , sondern auch von \ddot{q} abhängt. Bestimmen Sie aus der Bedingung für ein Extremum der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

bei festgehaltenen q , \dot{q} zu den Zeiten t_1 und t_2 wie in diesem Falle die Lagrange-Gleichung aussehen würde.

Aufgabe 30 (10 Punkte)

Schwingung längs einer Kurve

Welche Form muss eine Kurve haben, damit die Periode der Schwingung einer Masse m im Schwerfeld längs dieser Kurve nicht von der Amplitude abhängt?

Anleitung:

- Welche Form muss die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Bogenlänge haben, damit die Schwingungsdauer analog zum harmonischen Oszillator nicht von der Amplitude abhängt?
- Leiten Sie aus der Form der potentiellen Energie im Schwerfeld und des Ergebnisses aus a) eine Beziehung zwischen der Bogenlänge der gesuchten Kurve und den kartesischen Koordinaten x, y her.
- Berechnen Sie daraus die Parameterdarstellung der gesuchten Kurve. Um welche Kurve handelt es sich?

Hinweis zu c), d):

Beim Lösen von Integralen der Form $\int \sqrt{a/y - 1} dy$ ist die Substitution $y = \frac{1}{2}a(1 - \cos(\varphi))$ nützlich.

