Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 06.12.2007

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

7.Übung

(Abgabe Donnerstag, 13.12.2007 in der Vorlesung)

Aufgabe 23 (10 Punkte)
Berechnen Sie für die folgenden Systeme in den angegebenen Koordinatensystemen die Lagrange-Funktion, den verallgemeinerten Impuls und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Ist der verallgemeinerte Impuls erhalten? (*warum?*)

a) Freies Teilchen der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bewegt (*kartesische Koordinaten*).

b) Wie a) in *Kugelkoordinaten.*

c) Punktteilchen der Masse m im Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$. (*Kugelkoordinaten*)

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Generalisierte Koordinaten

Geben Sie für die unten aufgeführten Probleme jeweils ein System von generalisierten Koordinaten an, mit dem man die Bewegung eindeutig beschreiben kann.

a) Massenpunkt auf Ellipsenbahn

b) rutschender Kreiszylinder auf schiefer Ebene

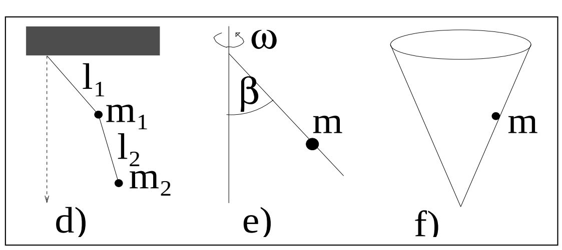
c) rollender Kreiszylinder auf schiefer Ebene

d) ebenes Doppelpendel

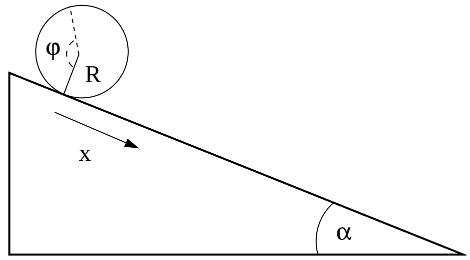
e) Perle mit Masse m auf einem rotierenden Draht (β, ω fest vorgegeben)

f) Massenpunkt auf der Innenseite eines Kreiskegels

g) 8 Massen an den Ecken eines Würfels mit fester Kantenlänge



Aufgabe 25 (10 Punkte)
Hohler Kreiszylinder



Ein hohler Kreiszylinder der Masse M mit Radius R rollt ohne Schlupf (d.h. ohne zu gleiten) eine schiefe Ebene hinab.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T als Funktion von $\dot{x}$ und $\dot{\varphi}$ und die potentielle Energie als Funktion von x.
Hinweis: Der Beitrag der Rotationsenergie zu T lautet $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2$.

b) Benutzen Sie die Tatsache, dass der Zylinder auf der Ebene rollt, um das System durch eine einzige generalisierte Koordinate zu beschreiben. Wie lautet die Lagrange-Funktion L?

c) Geben Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung an.

d) Welche Geschwindigkeit erreicht der Zylinder nach einer Rollstrecke l, wenn er zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ losgelassen wird?

Aufgabe 26 (15 Punkte)
Ebenes Fadenpendel

Betrachten Sie ein ebenes mathematisches Fadenpendel der Masse m und Fadenlänge l im homogenen Schwerefeld. Der Faden soll dabei im Folgenden stets gespannt bleiben.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangesche Bewegungsgleichung.

b) Nähern Sie die Bewegungsgleichung bis einschließlich zur ersten Ordnung in der generalisierten Koordinate und lösen Sie sie für diesen Fall. Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz des Pendels. Wie hängt diese von der Masse m ab?

c) Zeigen Sie, dass sich, solange der Faden gespannt bleibt, für beliebige Auslenkungen des Pendels die Periodendauer zu:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}}$$

mit $k = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$ ergibt. Dabei bezeichnet ω_0 die Frequenz der linearen Näherung aus b) und φ_0 die Anfangsauslenkung.

d) Entwickeln Sie den Integranden nach k und zeigen Sie so, dass sich die Periodendauer in der Form

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \cdots \right)$$

schreiben lässt.

Hinweis zu c): Benutzen Sie analog zur Behandlung des Kepler-Problems in der Vorlesung die Energie-Erhaltung, um die Funktion $t(\varphi)$ in Integraldarstellung zu erhalten. Substituieren Sie $\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = \sin(\psi)$.