Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 29.11.2007

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

6.Übung

(Abgabe Donnerstag, 06.12.2007 in der Vorlesung)

Aufgabe 19 (15 Punkte)
Die δ-Distribution ist durch die Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

für alle Testfunktionen f definiert. Sie lässt sich approximieren durch Funktionenfolgen (f_ϵ), die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\text{i)}\ \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)\,dx = 1 \qquad \text{ii)}\ f_\epsilon(-x) = f_\epsilon(x) \qquad \text{iii)}\ \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} \qquad \text{und} \qquad g_\epsilon(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2} \qquad , \epsilon > 0$$

zwei Darstellungen der δ-Distribution sind.

b) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ-Distribution?

c) Zeigen Sie durch Rücktransformation, dass sich die δ-Distribution auch als

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

darstellen lässt.

d) Falls g eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen $x_i (i = 1, \ldots n)$ ist, gilt die nützliche Rechenregel

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Berechnen Sie damit folgende Ausdrücke:

$$\text{i)}\ \int_{-\infty}^{\infty} e^x \delta(x^2-a^2)\,dx \quad , a > 0 \qquad \text{ii)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\delta(2x-\pi)dx$$

Aufgabe 20 (10 Punkte)
Sei $\widetilde{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von

i) $f(x-a)$ ii) $e^{i\beta x}f(x)$

iii) $\frac{\partial}{\partial x}f(x)$ iv) $f(ax)$

b) Zeigen Sie die Parsevalsche Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

Aufgabe 21 (10 Punkte)
In der Quantenmechanik wird gezeigt, dass in guter Näherung der Streuquerschnitt durch die Bornsche Formel $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\widetilde{V}(\vec{k})|^2$ gegeben ist. Dabei bezeichnet

$$\widetilde{V}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}} V(\vec{r}) \, dx \, dy \, dz$$

die Fouriertransformierte in drei Dimensionen des Potentials $V(\vec{r})$.

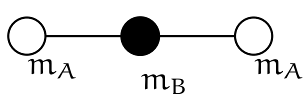
a) Zeigen Sie, dass allgemein für ein Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ gilt:

$$\widetilde{V}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot k} \int_0^{\infty} r \, V(r) \sin(kr) dr$$

b) Berechnen Sie den Streuquerschnitt für ein Yukawapotential $V(r) = \frac{-g}{r} \cdot \exp(-\kappa r)$ mit $g, \kappa = \text{const.}$

Bemerkung: Hier wurde $\hbar = 1$ *gesetzt.*

Aufgabe 22 (10 Punkte)
Gekoppelte Schwingungen



Gegeben sei ein lineares, symmetrisches dreiatomiges Molekül mit den beiden Atomsorten A und B.

a) Nehmen Sie ein lineares Kraftgesetz für die Wechselwirkung benachbarter Atome an, stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die longitudinalen Schwingungen auf und berechnen Sie Form und Frequenz der longitudinalen Eigenschwingungen des Moleküls.

b) Die dritte Eigenschwingung des Moleküls ist transversal zur Verbindungsachse der Atome in der Ruhelage. Durch die Schwingung ändert sich also der Winkel $\angle$ABA. Nehmen Sie an, dass die Rückstellkraft für diese Schwingung proportional zur Winkeländerung δ gegenüber der Ruhelage ist und berechnen Sie die Frequenz der transversalen Eigenschwingung.

Hinweis zu b): Gehen Sie von einer kleinen Winkeländerung δ *aus. Betrachten Sie Longitudinal- und Transversalbewegung als voneinander unabhängig.*