Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 02.11.2007

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

2.Übung

(Abgabe Donnerstag, 08.11.2007 in der Vorlesung)

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ ist durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = a_\alpha b_\alpha$ gegeben, wobei wir die Konvention verwenden, dass über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist (*Einsteinsche Summenkonvention*). Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ ist durch $(\vec{a} \times \vec{b}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha a_\beta b_\gamma$ gegeben. Hierbei sind die $\vec{e}_\alpha$ die Basiseinheitsvektoren und

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} := \begin{cases} 1 & \text{falls } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Es gilt $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$. Rechnen Sie dies für den dreidimensionalen Fall explizit nach.

b) Wie verhält sich ϵ bei der Vertauschung zweier Indizes?

c) Beweisen Sie unter Verwendung obiger Schreibweise die "BAC-CAB" Relation (*Graßmannscher Entwicklungssatz*): $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

d) Zeigen Sie die Jacobi-Identität: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Gegeben seien die beiden Matrizen

$$R^+(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^-(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $R^+(\varphi)$ eine Rotation des Koordinatensystems um den Ursprung darstellt. Welches ist die Drehachse?

b) Was wird durch $R^-(\varphi)$ beschrieben?

c) Überprüfen Sie durch explizites Nachrechnen, dass sich bei Hintereinanderausführung zweier Drehungen $R^+(\varphi)$ um die Winkel φ_1 und φ_2 bei fester Drehachse die Drehwinkel addieren.

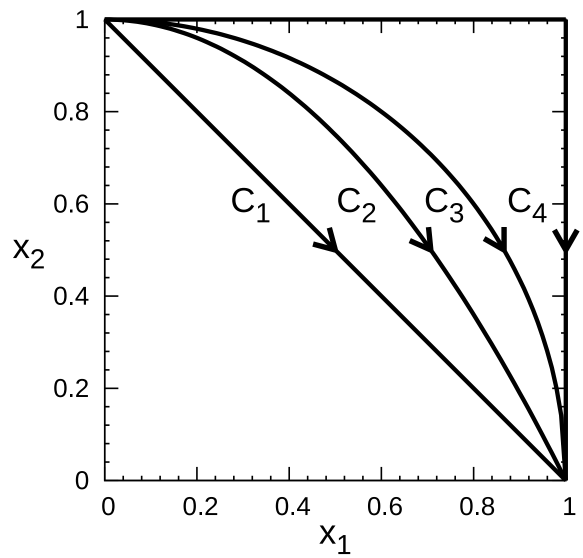
Aufgabe 7 (15 Punkte)
Arbeit im Kraftfeld

a) Berechnen Sie für das ebene Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_1 x_2^2 + 1)\vec{e}_1 + k x_1^2 x_2 \vec{e}_2$$

die Arbeiten $W_i = \int_{C_i} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ entlang der Wege C_i in Abhängigkeit vom Parameter k. Für welchen Wert von k ist das Kraftfeld konservativ und wie sieht dann das zugehörige Potential aus?

- C_1: Gerade
- C_2: Parabelbogen $x_1^2 + x_2 = 1$
- C_3: Viertelkreis
- C_4: Polygonzug $(0,1) \to (1,1) \to (1,0)$



b) Gegeben sei ein Kraftfeld der Form

$$K_i = \frac{\sum_k a_{ik} x_k}{|\vec{x}|^\alpha}, \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

mit $(a_{ik}) = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$

i) Berechnen sie die Rotation $\nabla \times \vec{K}$ des Kraftfeldes.

ii) Zeigen Sie für den Fall $\alpha = 0$, dass die Matrix (a_{ij}) symmetrisch sein muss, damit $\vec{K}$ konservativ ist.