Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 31.01.2008

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

13.Übung

(Abgabe Donnerstag, 07.02.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 47 (10 Punkte)
Kräftefreier symmetrischer Kreisel
Gegeben sei ein symmetrischer Kreiskegel (Höhe: h, Grundkreisradius: R, Masse: m), der im Schwerpunkt gelagert ist und sich daher kräftefrei bewegt.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion im körperfesten Koordinatensystem an, wenn der Kegel mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ rotiert.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion unter Verwendung der Euler-Winkel als generalisierte Koordinaten und geben Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an.

c) Welches sind die Erhaltungsgrößen des Systems und was ist ihre physikalische Bedeutung?

Aufgabe 48 (5 Punkte)
Kanonische Transformationen

a) Für welche Werte von α und β stellen die Gleichungen

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p) \qquad \text{und} \qquad P = q^\alpha \sin(\beta p)$$

eine kanonische Transformation dar?

b) Welche Form hat die Erzeugende $F_3(p, Q)$ in diesem Fall?

Aufgabe 49 (15 Punkte)
Kugelpendel
Gegeben sei eine Masse m an einem Faden der Länge R im homogenen Schwerefeld. Die Masse kann entlang der Kugeloberfläche $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ schwingen.

a) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des Systems. Verwenden Sie Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).

b) Begründen Sie kurz, warum die Koordinate φ zyklisch ist. Welche Erhaltungsgrößen hat das System?

c) Berechnen Sie explizit die Poisson-Klammer $\{H, p_\varphi\}$.

d) Zeigen Sie, dass sich unter Ausnutzung der Erhaltungsgrößen und durch das Einführen geeigneter Abkürzungen die Gleichung für die Hamiltonfunktion in die Form

$$\epsilon = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{a^2}{2\sin^2(\vartheta)} + 1 - \cos(\vartheta) =: \frac{1}{2}p_1^2 + \tilde{U}(\vartheta)$$

mit $a, \epsilon = \text{const.}$ bringen lässt.

e) Führen Sie die neue Variable $\tau = \omega t$ mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ein und bringen Sie damit die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in die Form

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = f_1(\vartheta), \qquad \frac{dp_1}{d\tau} = f_2(\vartheta), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = f_3(\vartheta)$$

Zeigen Sie, dass sich die Lösungen in der Form

$$\tau = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\epsilon - \tilde{U}(\vartheta))}}, \qquad \varphi = a \int \frac{d\vartheta}{\sin^2(\vartheta)\sqrt{2(\epsilon - \tilde{U}(\vartheta))}}$$

schreiben lassen.

Aufgabe 50 (10 Punkte)
Hamilton-Jacobi-Theorie für zeitabhängiges Potential
Gegeben sei ein 1-dimensionales System aus einer Punktmasse m, die sich unter dem Einfluss des zeitabhängigen Potentials $V(q,t) = -qAt$ ($A = \text{const.}$) bewegt.

a) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(q, p; t)$ des Systems.

b) Stellen Sie die zugehörige Hamilton-Jacobi-Gleichung auf.

c) Geben Sie die Lösung S(q,t) der Hamilton-Jacobi-Gleichung an.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $S(q,t) = f(t)q + g(t)$ und beachten Sie, dass unterschiedliche Potenzen von q linear unabhängig sind.

d) Verwenden Sie $S(q,t)$ zur Berechnung von $q(t)$ und $p(t)$, wenn $q(0) = 0$ gilt.