Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 24.01.2008

Übungen zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

12.Übung

(Abgabe Donnerstag, 31.01.2008 in der Vorlesung)

Aufgabe 43 (10 Punkte)
Legendretransformation

a) Berechnen Sie die Legendre-Transformierten $g_1(x, v)$ und $g_2(u, y)$ der Funktion $f(x, y) = \alpha x^2 y^3$

b) Zeigen Sie für eine allgemeine Funktion $f(x, y)$, dass zweimalige Anwendung der Legendre-Transformation wieder auf die ursprüngliche Funktion zurückführt.

Aufgabe 44 (10 Punkte)
Hamiltonfunktionen
Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion und die kanonischen Gleichungen für die folgenden Systeme:

a) Freies Teilchen der Masse m in

  i) kartesischen Koordinaten

  ii) Zylinderkoordinaten

  iii) Kugelkoordinaten

b) Harmonischer Oszillator

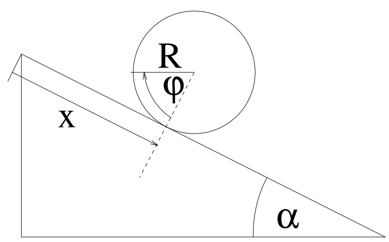
c) Ebenes Pendel im Schwerefeld der Erde

d) Himmelskörper, der im Gravitationsfeld um die Sonne kreist

Hinweis: Die Bewegungsgleichungen brauchen nicht gelöst zu werden.

Aufgabe 45 (10 Punkte)
Hamiltonformalismus

Ein homogener Kreiszylinder der Masse M mit Radius R und Länge h rollt ohne Schlupf eine schiefe Ebene hinab.



a) Bestimmen Sie das relevante Trägheitsmoment des Zylinders.

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion L mit x als generalisierter Koordinate.

c) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion H und die zugehörigen kanonischen Gleichungen.

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 46 (15 Punkte)
Poisson-Klammern
Für zwei Funktionen $f(q, p)$, $g(q, p)$ der Koordinate q und des generalisierten Impulses p sind die Poisson-Klammern $\{,\}$ definiert als:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Klammern:

i) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$

ii) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$

iii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (*Jacobi-Identität*)

b) Hängen die Funktionen f, g von mehreren generalisierten Koordinaten und zugehörigen Impulsen ab, lautet die Definition der Poisson-Klammern:

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$$

Gelten die Formeln aus a) auch in diesem Fall? (Begründung!) Bestimmen Sie die Poissonschen Klammern, die aus den kartesischen Komponenten des Impulses $\vec{p}$ und der x-Komponente des Drehimpulses L_x gebildet werden.

c) Bestimmen Sie die Poissonschen Klammern, die aus den kartesischen Komponenten des Drehimpulses gebildet werden, d.h. berechnen Sie $\{L_x, L_x\}, \{L_x, L_y\}, \{L_x, L_z\}$ und bestimmen Sie die noch verbleibenden Kombinationen.