

---

# Theoretische Mechanik

---

WS 2007/08

Harald Jeschke, Universität des Saarlandes/Universität Frankfurt  
auf Grundlage eines Skripts von Claudius Gros, Universität Frankfurt

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Literatur</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Bewegungsgleichungen</b>	<b>7</b>
1.0	Naturgesetze . . . . .	7
1.1	Raum und Zeit . . . . .	7
1.2	Galileitransformation . . . . .	8
1.3	Schwerpunktsatz . . . . .	10
1.4	Bewegungsgleichungen . . . . .	11
1.5	Kräfte . . . . .	12
1.6	Galilei-Invarianz . . . . .	14
1.7	Erhaltungssätze . . . . .	15
1.8	Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	20
1.9	Beschreibung von Bahnkurven . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Das 2-Körperproblem</b>	<b>28</b>
2.1	Transformation auf Relativkoordinaten . . . . .	28
2.2	Allgemeines Potential . . . . .	30
2.3	Gebundene Bahnen . . . . .	34
2.4	Streubahnen . . . . .	35
2.5	Das Keplerproblem . . . . .	36
2.6	Der Virialsatz . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>47</b>

3.0	Einführung . . . . .	47
3.1	Gedämpftes mathematisches Pendel . . . . .	47
3.2	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	52
3.3	Spektralzerlegung . . . . .	56
3.4	Erzwungene Schwingungen . . . . .	59
3.5	Fourierzerlegung . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Lagrange-Formalismus</b>	<b>66</b>
4.0	Einführung . . . . .	66
4.1	Zwangsbedingungen . . . . .	66
4.2	Das d'Alembertsche Prinzip . . . . .	69
4.3	Lagrange-Funktion . . . . .	71
4.4	Prinzip der kleinsten Wirkung . . . . .	75
4.5	Erhaltungssätze . . . . .	78
4.6	Infinitesimale Erzeugende . . . . .	82
4.7	Energieerhaltung . . . . .	83
4.8	10 Erhaltungsgrößen des abgeschlossenen konservativen Systems	84
4.9	Prinzip von Euler-Maupertuis . . . . .	86
4.10	Variation mit Nebenbedingungen . . . . .	90
4.11	Weitere Anwendungen der Variationsrechnung . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>99</b>
5.1	Der starre Körper als Vielteilchensystem . . . . .	99
5.2	Grundlagen der Statik . . . . .	100
5.3	Der Kreisel . . . . .	101
5.4	Der Trägheitstensor . . . . .	105
5.5	Freier Kreisel . . . . .	110
5.6	Schwerer, symmetrischer Kreisel . . . . .	113

<b>6</b>	<b>Hamiltonische Formulierung</b>	<b>118</b>
6.1	Kanonische Gleichungen . . . . .	118
6.2	Phasenraum und Poisson-Klammern . . . . .	123
6.3	Quantenmechanik . . . . .	126
6.4	Kanonische Transformationen . . . . .	127
6.5	Kanonische Flüsse . . . . .	129
6.6	Erzeugende für kanonische Transformationen . . . . .	132
6.7	Hamilton-Jacobi Gleichung . . . . .	135
6.8	Satz von Liouville . . . . .	138
6.9	Satz von Poincaré . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Kontinuumsmechanik</b>	<b>142</b>
7.1	Kontinuums-Limes . . . . .	142
7.2	Schwingende Saite . . . . .	146
7.3	Elastizitätstheorie . . . . .	148
7.4	Balkenbiegung . . . . .	155
7.5	Hydrodynamik . . . . .	157
7.6	Beispiele zur Hydrodynamik . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>167</b>
8.1	Einleitung . . . . .	167
8.2	Wellengleichung . . . . .	169
8.3	Lorentztransformationen . . . . .	171
8.4	Darstellung der Lorentztransformationen . . . . .	173
8.5	Spezielle Lorentztransformationen . . . . .	174
8.6	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten . . . . .	176
8.7	Vektorkalkül . . . . .	177
8.8	Kräftefreie Teilchen . . . . .	179

## 0. Literatur

---

**F. Scheck**

*“Theoretische Physik 1: Mechanik”*,  
Springer Verlag.

**W. Nolting**

*“Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik”* und *“Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik”*,  
Springer Verlag.

**L. D. Landau und E. M. Lifschitz**

*“Mechanik”* und *“Elastizitätstheorie”*,  
Akademie Verlag.

**H. Iro**

*“A Modern Approach to Classical Mechanics”*,  
World Scientific Publishing.

**J. L. McCauley**

*“Classical Mechanics”*,  
Cambridge University Press.

**H. Goldstein**

*“Klassische Mechanik”*,  
Akademische Verlagsgesellschaft.

**A. B. Bhatia und R. N. Singh**

*“Mechanics of Deformable Media”*,  
Adam Hilger, Bristol and Boston.

**M. R. Gaberdiel**

*“Allgemeine Mechanik”*,  
<http://www.phys.ethz.ch/~mrg/mechanik/AM.pdf>

# 1. Bewegungsgleichungen

## 1.0 Naturgesetze

Die Naturgesetze lassen sich als solche nicht herleiten, sie können nach Kuhn nur falsifiziert werden. Dennoch versucht man i.A. ein in sich konsistentes System von Naturgesetzen zu entwickeln, das auf möglichst wenigen fundamentalen Annahmen beruht, den grundlegenden Postulaten. Hierbei spielt die Berücksichtigung der Symmetrien von Raum und Zeit eine zentrale Rolle.

## 1.1 Raum und Zeit

Die Grundlage der physikalischen Beschreibung der Natur ist die Annahme, dass man eine Abbildung von Raum und Zeit auf mathematische Größen vornehmen kann. In der klassischen Physik beschreiben wir das Verhalten (der Bilder) von Objekten in einem „Raum“, ihren Ortswechsel in diesem Raum mit der „Zeit“. Raum und Zeit sind die grundlegenden Konzepte der Physik; Bewegung verbindet Raum und Zeit.

Nach der Erfahrung mit starren Maßstäben ist der physikalische Raum ein euklidischer  $\mathbb{R}^3$ . Darin benutzen wir kartesische Ortskoordinaten  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ . Die Zeit  $t$  ist erklärt durch einen (per Definition) periodischen Vorgang (Uhr), z.B. durch einen scharfen atomaren Übergang (Spektrallinie).

Zwei zentrale, eng miteinander verknüpfte Konzepte sind die Invarianz bei einer Koordinatentransformation (eine Größe ändert sich nicht, wenn zu einem festen Zeitpunkt für ein dynamisches System das Koordinatensystem transformiert wird) und der Erhaltungssatz (eine dynamische Größe ist zeitlich konstant entlang der Trajektorie eines Systems).

Eine invariante (koordinatenunabhängige) Bedeutung geben wir

- (a) dem Zeitabstand  $|t_1 - t_2|$  von zwei Ereignissen
- (b) dem räumlichen Abstand  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  von zwei gleichzeitigen Ereignissen.

Die damit verträglichen Koordinatentransformationen sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + \mathbf{a}, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= \mathbf{R}(t)\vec{x} + \vec{\mathbf{b}}(t), & \mathbf{R}(t) &\in \mathbf{O}(3), \end{aligned} \tag{1.1}$$

d.h. wir haben noch die Wahl

- der Zeitrichtung  $\lambda$
- des Zeitnullpunkts  $\mathbf{a}$
- eines beliebig bewegten, kartesischen räumlichen Bezugssystems.

Die Äquivalenz dieser Koordinatensysteme äussert sich darin, dass die Transformationen (1.1) eine Gruppe bilden.

## 1.2 Galileitransformation

Wir postulieren die Existenz von „Inertialsystemen“, in denen für freie Teilchen das Trägheitsgesetz gilt:

$$m\ddot{\vec{x}} = 0.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung eines absoluten Raums, d.h. eines homogenen und isotropen Raums und einer homogenen Zeit.

In Worten:

1. *Newtonsches Axiom*: Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Massenpunkt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt (Inertialsysteme).

Alle anderen Inertialsysteme ergeben sich hieraus durch diejenigen Transformationen (1.1), die das Trägheitsgesetz invariant lassen. Sie beschreiben den Übergang zu einem (relativ) gleichförmig bewegten Bezugssystem, d.h.

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + \mathbf{a}, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= \mathbf{R}\vec{x} + \vec{\mathbf{v}}t + \vec{\mathbf{b}}, & \mathbf{R} &\in \mathbf{O}(3), \end{aligned} \tag{1.2}$$

(Galileitransformationen). Wieder bilden diese Transformationen eine Gruppe.

Die Galileitransformation mit  $\det \mathbf{R} = +1$  und  $\lambda = +1$  hängt von 10 Parametern ab, und zwar

$$g(\underbrace{\mathbf{R}}_{\omega, \vec{n}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{b}}, \mathbf{a})$$

Diese stehen in engem Zusammenhang mit den 10 Erhaltungsgrößen, die es im abgeschlossenen  $n$ -Teilchensystem gibt:  $\vec{L}$ ,  $\vec{r}_S(0)$ ,  $\vec{P}$ ,  $E$ , d.i. der Drehimpuls, die Schwerpunktsbewegung  $\vec{r}_S(0) = \vec{r}_S(t) - \vec{P}t/M$ , der Gesamtimpuls und die Energie.

Wir zeigen, dass die Transformationen  $g$  eine Gruppe bilden (die eigentliche isochrone Galileigruppe  $G$ ), indem wir zwei Transformationen hintereinander ausführen:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \mathbf{R}^{(1)}\vec{x}_0 + \vec{v}^{(1)}t_0 + \vec{b}^{(1)}, & t_1 &= t_0 + a^{(1)} \\ \vec{x}_2 &= \mathbf{R}^{(2)}\vec{x}_1 + \vec{v}^{(2)}t_1 + \vec{b}^{(2)}, & t_2 &= t_1 + a^{(2)}\end{aligned}$$

Wenn wir  $\vec{x}_1$  in  $\vec{x}_2$  einsetzen, können wir die direkte Transformation  $\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}_2$  ablesen:

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{R}^{(1)}\vec{x}_0 + \mathbf{R}^{(2)}\vec{v}^{(1)}t_0 + \mathbf{R}^{(2)}\vec{b}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}t_0 + \vec{v}^{(2)}a^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \\ &\stackrel{!}{=} \mathbf{R}^{(3)}\vec{x}_0 + \vec{v}^{(3)}t_0 + \vec{b}^{(3)} \\ t_2 &= t_0 + a^{(1)} + a^{(2)} \stackrel{!}{=} t_0 + a^{(3)}\end{aligned}$$

Wir finden:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(3)} &= \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{R}^{(1)} \\ \vec{v}^{(3)} &= \mathbf{R}^{(2)}\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)} \\ \vec{b}^{(3)} &= \mathbf{R}^{(2)}\vec{b}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}a^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \\ a^{(3)} &= a^{(1)} + a^{(2)}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Nun verifizieren wir die vier Gruppenaxiome:

1. Die Hintereinanderausführung zweier Galileitransformationen

$$g(\mathbf{R}^{(2)}, \vec{v}^{(2)}, \vec{b}^{(2)}, a^{(2)})g(\mathbf{R}^{(1)}, \vec{v}^{(1)}, \vec{b}^{(1)}, a^{(1)}) = g(\mathbf{R}^{(3)}, \vec{v}^{(3)}, \vec{b}^{(3)}, a^{(3)})$$

ist wieder eine Galileitransformation (gezeigt in Eq. (1.3)).

2. Das Assoziativgesetz  $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$  folgt aus Assoziativität von Addition und Matrizenmultiplikation.
3. Für das Einselement  $E = (1, \vec{0}, \vec{0}, 0)$  gilt

$$Eg_i = g_iE = g_i \forall g_i \in G$$

4. Das Inverse zu  $g(\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{b}, a)$

$$g^{-1} = g(\mathbf{R}^T, -\mathbf{R}^T\vec{v}, \mathbf{R}^T\vec{v}a - \mathbf{R}^T\vec{b}, -a)$$

liest man aus Eq. (1.3) ab, wobei  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  wegen  $\det \mathbf{R} = +1$ .

Die Gruppeneigenschaft der Galileitransformationen bedeutet die Äquivalenz der Inertialsysteme. Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen wir von nun an stets in einem Inertialsystem.

### 1.3 Schwerpunktsatz

Die Verallgemeinerung des Trägheitsgesetzes auf  $N$  Teilchen mit Koordinaten  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$  im leeren Raum lautet:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0\tag{1.4}$$

( $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i = \text{Impuls des Teilchens } i$ ). Dabei sind die Massen  $m_i$  unveränderliche positive Zahlen, die durch Gl. (1.4) bis auf die Wahl der Masseneinheit festgelegt sind. Nach Gl. (1.4) sind die Massen additiv, wenn sich mehrere Teilchen zu einem einzigen zusammenschließen, also  $m_{1,2} = m_1 + m_2$ .

Das können wir uns klarmachen, indem wir ein Koordinatensystem  $\Sigma'$  betrachten, das sich gegenüber dem System  $\Sigma$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  bewegt; dann ist die Geschwindigkeit  $\vec{v}'_i$  aller Teilchen in  $\Sigma'$  durch  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$  mit der in  $\Sigma$  verknüpft. Damit ergibt sich die Beziehung zwischen den Gesamtimpulsen  $\vec{P}$  und  $\vec{P}'$ :

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}'_i + \vec{V} \sum_i m_i = \vec{P}' + \vec{V} \sum_i m_i$$

Das zeigt, dass wir immer ein System finden können, in dem der Gesamtimpuls  $\vec{P}$  verschwindet (durch geeignete Wahl der Geschwindigkeit  $\vec{V}$ ), und wir nehmen an, dass  $\vec{P}' = 0$ . Auflösen nach der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  des Bezugssystems  $\Sigma$  ergibt:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Zusammenhang zwischen Gesamtimpuls  $\vec{P}$  und Geschwindigkeit  $\vec{V}$  dieselbe Gestalt hat wie der für ein einzelnes Teilchen  $\vec{p}_i = \vec{v}_i/m_i$ , wenn wir die Masse  $M = \sum_i m_i$  des Gesamtsystems mit der Masse  $m_i$  des Massenpunktes identifizieren. Daher ist die Masse eine additive Größe.

Da wir hier mit zeitlich unveränderlichen Massen  $m_i$  rechnen, können wir die Größe  $\sum_i m_i \vec{v}_i / \sum_i m_i$  als zeitliche Ableitung von

$$\vec{X} = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$$

darstellen, der Koordinate des Schwerpunkts.

## 1.4 Bewegungsgleichungen

$N$  Teilchen bilden ein mechanisches System, falls ihre Bewegung durch die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_N(t_0); \quad \dot{\vec{x}}_1(t_0), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t_0)$$

zu irgendeiner Zeit  $t_0$  bestimmt ist. Gleichbedeutend sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \dots \dot{\vec{x}}_N) \quad (1.5)$$

wobei  $\vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \dots \dot{\vec{x}}_N)$  das *Kraftgesetz* ist.

In Worten:

2. *Newtonsches Axiom*: Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.

## Beispiele

*Sonnensystem*:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{k \neq i} -\gamma m_i m_k \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3}.$$

*System geladener Teilchen*:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3}.$$

*Teilchen in einem elektromagnetischen Feld*:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = q \vec{E}(\vec{x}, t) + q (\dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x}, t)).$$

Hierbei sind  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  äußeres elektrisches Feld und magnetische Induktion. Die von den Teilchen selber erzeugten Felder sind hier vernachlässigt.

*Erzwungene, gedämpfte Schwingung auf einer Geraden*:

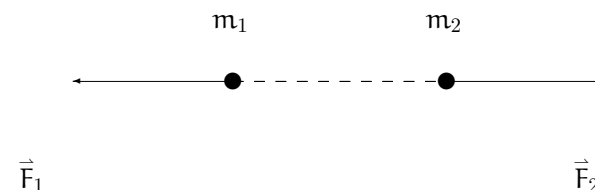
$$m\ddot{x} = -f x - K \dot{x} + k(t).$$

Hier ist  $K$  eine summarische Beschreibung der Dämpfung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.

## 1.5 Kräfte

Die Mechanik liefert keine Theorie der Kräfte. Newton befasst sich mit Kräften, die nur von der Lage ( $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N$ ) des Systems abhängen und stellt dafür ein weiteres Postulat auf:

3. *Newtonsches Axiom*: Die Kraftwirkungen zweier Massenpunkte aufeinander sind entgegengesetzt gleich: **Actio = Reactio**



Im (abgeschlossenen) 2-Teilchensystem ist nach Gl. (1.4) und Gl. (1.5)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ . Wenn das Kraftgesetz in jedem Koordinatensystem gleich lauten soll (siehe Kap. 1.1), so ist es von der Form einer Zentralkraft

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\vec{F}_2 = f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad (1.6)$$

d.h. die Kräfte liegen in der Verbindungsgeraden der beiden Teilchen und hängen nur vom Abstand ab. Mit  $\vec{F}_{12}$  ist die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft bezeichnet, und da es hier nur zwei Teilchen gibt, ist das gleich der gesamten Kraft  $\vec{F}_1$  auf Teilchen 1.

Solche Kräfte besitzen stets ein Potential  $V(r)$ , das durch die Lösung der Gleichung  $V'(r) = f(r)$  mit  $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  gegeben ist, d.h.

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r dr' V'(r')$$

im hier diskutierten eindimensionalen Fall (im dreidimensionalen Fall  $V = V(\vec{r})$  ist die Rekonstruktion des Potentials komplizierter, s.u.). Das Potential liegt bis auf die Integrationskonstante  $V(r_0)$  fest, falls  $V(r)$  integrierbar ist.

Für die Kraft folgt

$$\vec{F}_1 = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = - V'(\underbrace{r}_{\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}),$$

also

$$\vec{F}_1 = - V'(r) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (1.7)$$

### Kräfteparallelogramm

Eine weiteres Postulat der Newtonschen Mechanik betrifft die Art, wie sich Kräfte addieren, und indem wir Kräfte als Vektoren notiert haben, haben wir diese Annahme implizit schon verwendet:

4. *Axiom (Superpositionsprinzip)*: Es gibt 2-Körper-Kräfte (Postulat) und diese sind additiv:

$$\vec{F}_i = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|),$$

wobei  $\vec{F}_{ik}$  die vom Teilchen  $k$  auf das Teilchen  $i$  wirkende Kraft ist (siehe Abb. 1.1). Aus Gl. (1.7) folgt dann wieder die Existenz eines Potentials

$$\vec{F}_i = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = - \sum_{k \neq i} V'_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}. \quad (1.8)$$

mit

$$V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \sum_{\text{Paare}(i,k)} V_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|), \quad (1.9)$$

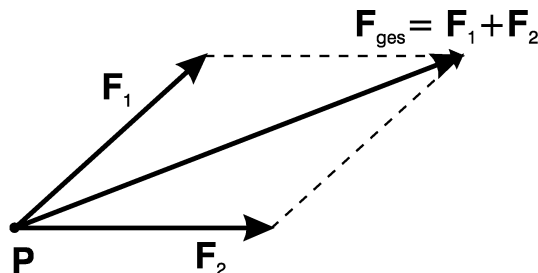


Abbildung 1.1: Das Kräfteparallelogramm.

wobei die Paarpotentiale  $V_{ik}(\mathbf{r})$  durch aus den Paar-weise wirkenden Kräften durch Integration von  $V'_{ik}(\mathbf{r}) = -f_{ik}(\mathbf{r})$  berechnet werden kann. Dabei ist

$$\vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) = f_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}.$$

Beispiele sind das Sonnensystem und ein System geladener Teilchen. Wir bemerken, dass das Prinzip "Actio = Reactio" paarweise gilt und somit auch der Schwerpunktsatz Gl. (1.4) erfüllt ist. Zudem gilt "Actio = Reactio" auch für die resultierende Kraft zwischen 2 beliebigen Teilsystemen.

Mit der Annahme additiver 2-Körper-Kräfte kann man diese statisch (Feder-Kraftmesser) ausmessen. So erst bekommt die Newton'sche Bewegungsgleichung Gl. (1.5) einen Sinn: Die statisch ermittelten Kräfte bestimmen die Bewegung.

### 1.6 Galilei-Invarianz

Wir postulieren, dass die Bewegungsgleichungen eines Systems der Art von Gl. (1.5) und Gl. (1.8) in jedem Inertialsystem gleich lauten. Dieses ist eine a priori nicht zu rechtfertigende Forderung an die Struktur der Naturgesetze. Ob diese Forderung gerechtfertigt ist, lässt sich nur anhand der Konsequenzen experimentell überprüfen. Heute wissen wir, dass die Galilei-Invarianz nur für nicht-relativistische mechanische Systeme gilt.

Ein Beispiel hierfür sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \quad (1.10)$$

Galilei-Invarianz bedeutet, dass sie nach einer Galilei-Transformation im neuen Koordinatensystem die selbe Form haben müssen, d.h.

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt^2} = \vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N).$$

Dies ist für  $\vec{x}'_i = R\vec{x}_i + \vec{b}$  der Fall, falls

$$\vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N) = R\vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \quad (1.11)$$

Für die additiven Zweikörperkräfte (1.8) ist dies der Fall.

Anders ausgedrückt: Mit  $\vec{x}_i(t)$  ist auch die Galileitransformierte  $\vec{x}'_i(t')$  eine Lösung der Bewegungsgleichungen. Dies gilt auch für die Operation der

Zeitumkehr:

$$\mathbf{t}' = -\mathbf{t}, \quad \vec{\mathbf{x}}'(\mathbf{t}') = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{t}).$$

Also ist mit  $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$  auch  $\vec{\mathbf{x}}(-\mathbf{t})$  eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung (1.10), da diese zweiter Ordnung in der Zeit ist und somit keine Zeitrichtung auszeichnet. Dies ist nicht bei dissipativen Systemen, wie z.B. der gedämpften Schwingung, der Fall.

### 1.7 Erhaltungssätze

Aus Gl. (1.5) folgen

#### (a) Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \quad \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{F}}. \quad (1.12)$$

Dabei lässt sich der Gesamtimpuls  $\vec{\mathbf{P}} = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i$  als

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{x}}_i = M \frac{d}{dt} \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{x}}_i = M \dot{\vec{\mathbf{X}}}$$

schreiben, wobei  $M = \sum_i m_i$  die Gesamtmasse und

$$\vec{\mathbf{X}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{x}}_i$$

die Schwerpunkt-Koordinate ist.

Die Impulserhaltung ist eine Folge der Homogenität des Raumes.

#### (b) Drehimpulssatz

Der Drehimpuls eines Massenpunktes ist  $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{x}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i$ . Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$  befolgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{L}} = \sum_i \underbrace{\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i}_{m_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i \times \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i = 0} + \sum_i \vec{\mathbf{x}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{x}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{M}}, \quad (1.13)$$

wobei das totale Drehmoment  $\vec{\mathbf{M}} = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i$  ist mit  $\vec{\mathbf{M}}_i = \vec{\mathbf{x}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i$ . Der Gesamtdrehimpuls lässt sich in den Drehimpuls des Schwerpunktes

$\vec{\mathbf{L}}_{\text{SP}} = \vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{P}}$  und in den Relativ-Drehimpuls  $\vec{\mathbf{L}}_{\text{rel}} = \sum_i (\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{X}}) \times \vec{\mathbf{p}}_i$  zerlegen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}} &= \sum_i (\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{X}}) \times \vec{\mathbf{p}}_i \\ &= \underbrace{\sum_i \vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{p}}_i}_{\vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{P}}} + \sum_i (\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{X}}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{L}}_{\text{SP}} + \vec{\mathbf{L}}_{\text{rel}}. \end{aligned}$$

Die Drehimpulserhaltung ist eine Folge der Isotropie des Raumes.

#### (c) Energiesatz

Die Bewegungsgleichung für die totale kinetische Energie  $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i^2$  ist

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i^2 = \sum_i m_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i \ddot{\vec{\mathbf{x}}}_i = \sum_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i \vec{\mathbf{F}}_i. \quad (1.14)$$

Somit ist  $\sum_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i \vec{\mathbf{F}}_i$  die *Leistung*, die das System von Massenpunkten in Form von kinetischer Energie aufnimmt. Auch die kinetische Energie lässt sich zerlegen:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i - \dot{\vec{\mathbf{X}}} + \dot{\vec{\mathbf{X}}})^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{\mathbf{X}}}^2 + \underbrace{\sum_i m_i (\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i - \dot{\vec{\mathbf{X}}}) \dot{\vec{\mathbf{X}}}}_{(\sum_i m_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i - M \dot{\vec{\mathbf{X}}}) \dot{\vec{\mathbf{X}}} = M (\dot{\vec{\mathbf{X}}} - \dot{\vec{\mathbf{X}}}) \dot{\vec{\mathbf{X}}} = 0} + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i - \dot{\vec{\mathbf{X}}})^2. \end{aligned}$$

Also setzt sich auch die kinetische Energie aus einem Relativ-Anteil,  $T_{\text{rel}}$ , und der kinetischen Energie des Schwerpunktes,  $T_{\text{SP}}$ , zusammen:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{\mathbf{X}}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i - \dot{\vec{\mathbf{X}}})^2 = T_{\text{SP}} + T_{\text{rel}}.$$

Für additive Zweikörperkräfte lässt sich die Leistung mit Gl. (1.7) auch als

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{x}}_i} V(\vec{\mathbf{x}}_1 \dots \vec{\mathbf{x}}_N) \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i = - \frac{dV}{dt}$$

schreiben. Gleichung (1.14) kann dann in die Form eines Energiesatzes umgeschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (1.15)$$



Man sagt auch, das System sei konservativ. Für Systeme, in denen Reibungskräfte wirken, ist die totale Energie  $T + V$  nicht erhalten, solche Systeme nennt man dissipativ.

Die Energieerhaltung ist eine Folge der Homogenität der Zeit.

### Potential der Kraft

Bei der eindimensionalen Bewegung unter dem Einfluss einer ortsabhängigen Kraft war es immer möglich,

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{d}{dt}V(x) \quad \text{mit} \quad V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^x dx'F(x')$$

zu schreiben, d.h. einfache 2-Körperkräfte sind konservativ. Bei beliebigen dreidimensionalen Bewegungen und Kräften ist das nicht notwendigerweise erfüllt, und man definiert: Kräfte, für die gilt

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} \quad (1.16)$$

heißen konservativ, und  $V(\vec{x})$  ist dann das Potential der Kraft (die potentielle Energie).

Aus Gl. (1.16) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \frac{d}{dt}V(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \nabla V(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

und wir schließen, dass für eine konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}), \quad \text{d.h.} \quad F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad F_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} \quad (1.17)$$

gelten muss: Die Kraft lässt sich als Gradient eines skalaren Potentials schreiben.

Wir nehmen an, dass das Potential  $V$  stetige partielle zweite Ableitungen besitzt; dann sind (nach dem Schwarzschen Lemma) die zweiten partiellen Ableitungen von  $V$  vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3$$

und mit Gl. (1.17) folgt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.18)$$

Nun ist aber

$$\text{rot}F \equiv \nabla \times \vec{F} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \partial_\beta F_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad (1.19)$$

hier knapp geschrieben mit dem Levi-Civita-Tensor (Epsilontensor)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha, \beta, \gamma \text{ gerade Permutation von } 1,2,3 \\ -1 & \text{falls } \alpha, \beta, \gamma \text{ ungerade Permutation von } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.20)$$

d.h. von den 27 Elementen von  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  sind nur 6 ungleich null:  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$  und  $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$ .

Ausgeschrieben ist  $\text{rot}F$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

und somit bedeutet Gl. (1.18), dass  $\text{rot}\vec{F} = 0$  sein muss. Mithilfe des Stokeschen Integralsatzes kann man zeigen, dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Es gibt auch ein integrales Kriterium, um zu entscheiden, ob eine Kraft konservativ ist. Dazu schreiben wir für das totale Differential von  $V$

$$dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \nabla V(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

Wenn wir jetzt diese Größe entlang einer geschlossenen Kurve integrieren, erhalten wir

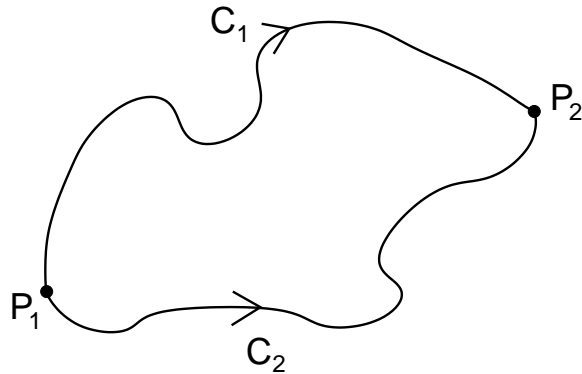
$$\oint_C \nabla V(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_C dV = V_{\text{Ende}} - V_{\text{Anfang}} = 0$$

Wenn wir links Gl. (1.16) einsetzen, finden wir

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \iff \vec{F} \text{ konservativ}$$

In Worten: Eine konservative Kraft leistet auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit.

Kurvenintegrale darf man aus Teilstücken zusammensetzen (siehe Abb. 1.2). Wir wählen also den geschlossenen Weg von  $P_1$  über  $C_1$  nach  $P_2$  und dann



**Abbildung 1.2:**  
Verschiebung eines  
Massenpunktes.

über  $-C_2$  zurück nach  $P_1$  (die Durchlaufrichtung bestimmt das Vorzeichen des Kurvenintegrals!):

$$0 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} \implies \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

In Worten: Ein Kraftfeld ist genau dann konservativ, wenn die Arbeit beim Verschieben des Massenpunktes zwischen zwei Raumpunkten wegunabhängig ist.

### Abgeschlossene konservative Systeme

Konservative Systeme mit  $\vec{F} = 0$  und  $\vec{M} = 0$  nennt man *abgeschlossen*. Beispiele sind Systeme von Massenpunkten mit additiven Zweikörperkräften. Abgeschlossene konservative Systeme haben die folgenden 10 Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung):

$\vec{P}$	3 Impulse
$\vec{X} - \vec{P}t/M$	3 Schwerpunktsbewegungen
$\vec{L}$ (oder $\vec{L}_{rel}$ )	3 Drehimpulse
$T + V$ (oder $T_{rel} + V$ )	Energie

### Satz von Noether

Etwas allgemeiner gilt (siehe später, Satz von Noether): Das mechanische System

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \quad (1.22)$$

hat genau dann die oben genannten 10 Erhaltungsgrößen, falls  $V$  unter jeder beliebigen euklidischen Transformation invariant ist:

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{b}) = V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (1.23)$$

für alle  $R \in SO(3)$  = Gruppe der Drehungen mit  $\det R = 1$  und für alle  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ . Man kann zeigen, dass dies mit  $\vec{F} = 0$  und  $\vec{M} = 0$  gleichbedeutend ist. Weiterhin kann man zeigen, dass die Energieerhaltung aus der Invarianz des Systems unter Zeittranslationen  $t \rightarrow t' = t + a$  folgt.

### 1.8 Beschleunigte Bezugssysteme

Falls ein Bezugssystem  $\tilde{\Sigma}$  (mit Ortsvektor  $\vec{y}$ ) kein Inertialsystem ist, dann muss man die gültige Bewegungsgleichung in diesem System durch Transformation der Bewegungsgleichung in einem Inertialsystem  $\Sigma$  (mit Ortsvektor  $\vec{x}$ ) berechnen. Beispiel:

#### Massenpunkt in einem rotierenden Bezugssystem

Die Bewegungsgleichung im Inertialsystem  $\Sigma$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

muss durch Einsetzen der Transformationsgleichung

$$\vec{x} = R(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$$

transformiert werden; diese besagt, dass  $\vec{y}$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  anders rotiert und verschoben werden muss, um zum Vektor  $\vec{x}$  zu gelangen. Mit den Zeitableitungen

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y} + R\dot{\vec{y}} + \dot{\vec{b}} \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{R}\vec{y} + 2\dot{R}\dot{\vec{y}} + R\ddot{\vec{y}} + \ddot{\vec{b}}$$

wird die Bewegungsgleichung zu

$$m \left( R\ddot{\vec{y}} + 2\dot{R}\dot{\vec{y}} + \ddot{R}\vec{y} + \ddot{\vec{b}} \right) = \vec{F}.$$

Nach  $\ddot{\vec{y}}$  können wir auflösen, indem wir von links mit  $R^{-1}$  von links multiplizieren ( $R^T = R^{-1}$  für eigentliche Rotationen, d.h. Rotationen mit  $\det(R) = 1$ )

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}' - 2m\Omega\dot{\vec{y}} - mR^T\ddot{R}\vec{y} - m\ddot{\vec{a}},$$

mit:

$\vec{F}' = \mathbf{R}^T \vec{F}$  Kraft, von  $\tilde{\Sigma}$  aus gesehen.

$\vec{a} = \mathbf{R}^T \vec{b}$  Beschleunigung des Punktes  $\vec{y} \equiv 0$ , von  $\tilde{\Sigma}$  aus gesehen.

$\Omega = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$  Eine antisymmetrische  $3 \times 3$  Matrix.

### Erzeugende für Drehungen

Die Erzeugende  $\Omega$  ist antisymmetrisch, denn durch Ableiten von  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = 1$  folgt

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} = \Omega + \Omega^T = 0.$$

Antisymmetrische ( $3 \times 3$ )-Matrizen bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum mit den Erzeugern (der Basis)

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und jede antisymmetrische Matrix  $\Omega$  kann dargestellt in der Form

$$\Omega = \omega_1 \mathbf{A}_x + \omega_2 \mathbf{A}_y + \omega_3 \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen des Zusammenhanges  $\exp(\Omega) = \mathbf{R}$  wird  $\Omega$  die Erzeugende der Drehung genannt. Die Wirkung von  $\Omega$  auf  $\vec{y}$  ist also

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \vec{y} = \Omega \vec{y} = \begin{pmatrix} \omega_2 y_3 - \omega_3 y_2 \\ \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3 \\ \omega_1 y_2 - \omega_2 y_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{y}$$

mit

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

der *vektorielle Winkelgeschwindigkeit* im Nichtinertialsystem  $\tilde{\Sigma}$ . Wir brauchen noch

$$\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}) - \dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{R}} = \dot{\Omega} - \underbrace{\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}}_{\Omega^T} \underbrace{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}}_{\Omega} = \dot{\Omega} + \Omega^2.$$

Damit ist

$$\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{R}} \vec{y} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}).$$

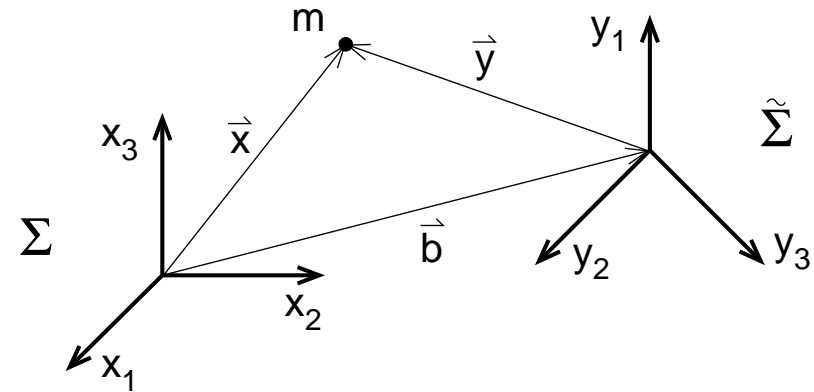
Damit lautet die Bewegungsgleichung im  $\vec{y}$ -System:

$$m \ddot{\vec{y}} = \vec{F}' - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}}) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) - m\vec{a}. \quad (1.24)$$

Die rechts neben  $\vec{F}'$  auftretenden Kräfte heißen Scheinkräfte, insbesondere

$-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}})$	= Corioliskraft
$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})$	= Zentrifugalkraft.

*Zweiter Zugang zu beliebig beschleunigten Bezugssystemen:* Wir betrachten wieder die Systeme  $\Sigma$  mit Ortsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  und Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sowie  $\tilde{\Sigma}$  mit Ortsvektor  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  und Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .  $\Sigma$  wird als Inertialsystem vorausgesetzt,  $\tilde{\Sigma}$  ist beliebig beschleunigt. Dann ist die Relativbewegung der Systeme zusammengesetzt aus Relativbewegung des Koordinatenursprungs von  $\tilde{\Sigma}$  im Vergleich zu  $\Sigma$  und der Rotation der Achsen von  $\tilde{\Sigma}$  um diesen Ursprung, von  $\Sigma$  aus gesehen.



**Abbildung 1.3:** Beschreibung von Massenpunkt  $m$  in Inertialsystem  $\Sigma$  und Nichtinertialsystem  $\tilde{\Sigma}$ .

Ortsvektor von Massenpunkt  $m$  ist (siehe Fig. 1.3):

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{y} = \vec{b} + \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}_i \quad (1.25)$$

Jetzt ermitteln wir die Geschwindigkeit in beiden Systemen:

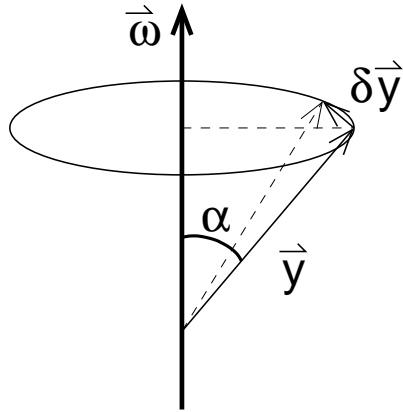
$$\tilde{\Sigma}: \quad \dot{\vec{y}} = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \vec{e}_i,$$

d.h. aus Sicht des mitrotierenden Beobachters in  $\tilde{\Sigma}$  sind die Achsen fest; von

$\Sigma$  aus betrachtet sieht es anders aus:

$$\Sigma: \quad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{b}} + \sum_{i=1}^3 (\dot{y}_i \tilde{\vec{e}}_i + y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i), \quad (1.26)$$

Darin ist  $\dot{\vec{b}}$  die Relativgeschwindigkeit der Koordinatenursprünge,  $\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \tilde{\vec{e}}_i$  die Geschwindigkeit von  $m$  in  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\sum_{i=1}^3 y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i$  die Geschwindigkeit eines starr mit  $\tilde{\Sigma}$  mitrotierenden Punktes, aus Sicht von  $\Sigma$ .



**Abbildung 1.4:** Änderung  $\delta\vec{y}$  von  $\vec{y}$  nur aufgrund der Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ .

$\tilde{\Sigma}$  rotiert mit der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  um seinen Ursprung. Die Änderung  $\delta\vec{y}$  von  $\vec{y}$  durch die Rotation steht senkrecht zu  $\vec{y}$  und zu  $\vec{\omega}$ . Damit kann man den dritten Term umschreiben (siehe Abb. 1.4):

$$\delta|\vec{y}| = \omega|\vec{y}|\sin(\alpha)dt = |\vec{\omega} \times \vec{y}|dt$$

und damit

$$\frac{\delta|\vec{y}|}{dt} = \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i = \vec{\omega} \times \vec{y}$$

Einsetzen in Gl. (1.26) ergibt

$$\Sigma: \quad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{b}} + \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y}. \quad (1.27)$$

Mit Gl. (1.25) kann man schreiben

$$\Sigma: \quad \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{b}) = \frac{d}{dt}\vec{y} = \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y}, \quad (1.28)$$

wobei wir mit  $\frac{d}{dt}\vec{y}$  die Zeitableitung aus Sicht von  $\Sigma$  notieren,  $\dot{\vec{y}}$  bedeutet die Zeitableitung innerhalb von  $\tilde{\Sigma}$ , und  $\vec{\omega} \times \vec{y}$  ist die Auswirkung der Rotation.

Damit erhalten wir eine Ableitungsregel, wie man in einem Inertialsystem einen Vektor ableitet, der in einem rotierenden System dargestellt ist:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt} + \vec{\omega} \times$$

in Worten, die Ableitung aus Sicht von  $\Sigma$  setzt sich zusammen aus der Ableitung der Komponenten in  $\tilde{\Sigma}$  und der Anwendung des Operators  $\vec{\omega} \times$ .

Mit dieser Regel können wir Gl. (1.27) ein zweites Mal nach der Zeit ableiten:

$$\begin{aligned} \Sigma: \quad \frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{b}}) &= \left( \frac{\tilde{d}}{dt} + \vec{\omega} \times \right) (\dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y}) \\ &= \ddot{\vec{y}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) \\ &= \ddot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Im Nichtinertialsystem bekommen wir also die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F} - m\dot{\vec{b}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} \quad (1.30)$$

Rechts sind die Terme 3 und 4 wieder Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Die Scheinkräfte in dieser Gleichung (alles außer  $\vec{F}$  bewirken, dass eine kräftefreie Bewegung ( $\vec{F} = 0$ ) eines Teilchen im System  $\Sigma$  von  $\tilde{\Sigma}$  aus gesehen so kompliziert verläuft, dass sie vom Inertialsystem  $\Sigma$  aus geradlinig bleibt.

## 1.9 Beschreibung von Bahnkurven

Die Bahnkurven, die von Punktmassen im Raum beschrieben werden, erfassen wir mathematisch als Raumkurven. Wir wollen zunächst allgemeine Eigenschaften der Raumkurven festhalten.

### Natürliche Parametrisierung

Eine Raumkurve heißt *glatt*, wenn es mindestens eine stetig differenzierbare Parametrisierung  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  gibt, für die nirgendwo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$$

gilt. Bei solchen Raumkurven ist es oft günstig, die Bogenlänge  $s$  anstelle der Zeit  $t$  als Kurvenparameter zu verwenden. Die Bogenlänge ist die Länge der Raumkurve, gemessen von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt aus.

Wir betrachten den Polygonzug, den wir erhalten, indem wir das Zeitintervall  $[t_0, t]$  gemäß

$$t_n = t_0 + n\Delta t$$

$$t_N = t_0 + N\Delta t \equiv t \quad \text{mit} \quad \Delta t = \frac{t - t_0}{N}$$

unterteilen (siehe Abb. 1.5). Die Länge des Polygonzuges ist

$$L_N(t, t_0) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)}{\Delta t} \right| \Delta t$$

Zur Bogenlänge gelangen wir, wenn wir die Länge der Zeitintervalle  $\Delta t$  gegen Null gehen lassen:

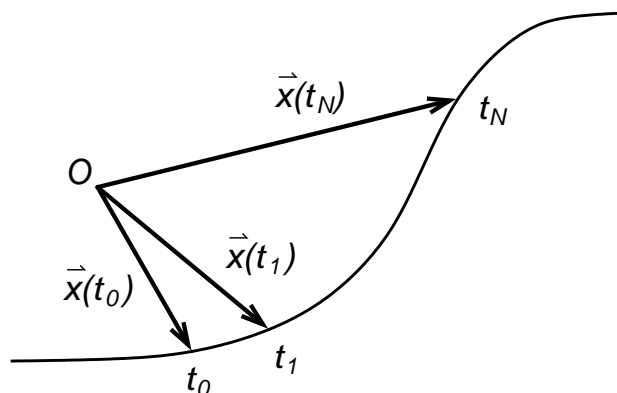
$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} L_N(t, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)}{\Delta t} \right| \Delta t \\ &= \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\vec{x}(t')}{dt'} \right| = \int_{t_0}^t dt' |\vec{v}(t')| \end{aligned}$$

Daraus lesen wir auch ab

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\vec{v}(t)|$$

Da wir  $|\vec{v}(t)| > 0$  vorausgesetzt haben, wächst  $s(t)$  streng monoton, und die Umkehrfunktion  $t(x)$  ist eindeutig bestimmt. Einsetzen in den Ortsvektor der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t(s)) = \vec{x}(s)$$



**Abbildung 1.5:**  
Zerlegung der Raumkurve in  $N$  Teilstücke durch Zeitintervalle  $[t_0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N]$ .

ergibt die sogenannte natürliche Parametrisierung der Raumkurve nach der Bogenlänge.

*Begleitendes Dreibein*

Zur Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse im Raum ist es oft günstig, eine Orthonormalbasis zu verwenden, die sich als Funktion der Bogenlänge ändert und mit dem Teilchen mitwandert. Dieses begleitende Dreibein ist aus

$$\begin{aligned} \vec{t} & \text{ Tangenteneinheitsvektor} \\ \vec{n} & \text{ Normaleneinheitsvektor} \\ \vec{b} & \text{ Binormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

aufgebaut, die ein orthonormiertes Rechtssystem bilden, d.h. es gilt  $\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$ ,  $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$  und  $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ .

Wir konstruieren diese Einheitsvektoren, indem wir ausnutzen, dass der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$  in Richtung der Tangente zeigt; wir müssen ihn nur normieren:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|} = \frac{d\vec{x}}{ds}$$

Wenn wir die Bahnkurve nach der Bogenlänge parametrisiert haben, folgt nach der Kettenregel

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

Da sich die Richtung von  $\vec{t}(s)$  mit wachsender Bogenlänge  $s$  ändert, läßt sich die Krümmung der Kurve durch

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \right|$$

quantifizieren, und das Inverse von  $\kappa$  ist der Krümmungsradius  $\rho = \kappa^{-1}$ . Für eine Gerade ändert sich der Tangenteneinheitsvektor nicht, und es gilt  $\kappa = 0$  und  $\rho = \infty$ .

Die Ableitung eines Einheitsvektors steht senkrecht auf diesem; diese Tatsache machen wir uns zunutze, um den Normaleneinheitsvektor zu konstruieren:

$$\vec{n}(s) = \frac{\frac{d\vec{t}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{t}(s)}{ds}$$

Die von  $\vec{n}$  und  $\vec{t}$  aufgespannte Ebene heißt Schmiegungeebene. Der Binormaleinheitsvektor ergibt sich jetzt durch die Forderung eines orthonormalen Rechtssystems:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$$

$\vec{b}(s)$  steht senkrecht auf der Schmiegungeebene und ist bei einer ebenen Bewegung konstant. Ändert sich  $\vec{b}(s)$  jedoch mit  $s$ , so ist diese Änderung ein Maß dafür, wie stark sich die Kurve aus der Schmiegungeebene herauswindet. Wir berechnen die Änderung von  $\vec{b}(s)$  als

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \kappa \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ &= \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \end{aligned}$$

Also ist die Änderung von  $\vec{b}$  senkrecht zu  $\vec{t}$  sowie senkrecht zu  $\vec{b}$ , weil  $\vec{b}$  ein Einheitsvektor ist. Wir setzen also

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

mit der Torsion  $\tau$  und dem Torsionsradius  $\sigma = \tau^{-1}$ . Wir können jetzt durch Ableiten von  $\vec{n}(s) = \vec{b}(s) \times \vec{t}(s)$  noch die Änderung des Normaleneinheitsvektors  $\vec{n}(s)$  mit der Bogenlänge berechnen:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = -\tau \vec{n} \times \vec{t} + \kappa \vec{b} \times \vec{n} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}$$

Die drei Gleichungen für die Änderung des begleitenden Dreibein mit der Bogenlänge heißen Frenetsche Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \end{aligned}$$

## 2. Das 2-Körperproblem

### 2.1 Transformation auf Relativkoordinaten

Die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte sind

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

und

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Wir führen die Relativkoordinate  $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  ein (siehe Fig. 2.1) und beachten

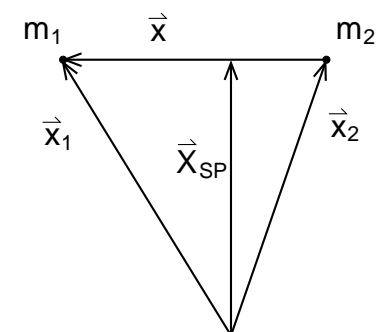
$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}.$$

Wir subtrahieren die beiden Bewegungsgleichungen und finden

$$\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left( -\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \right) V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = -\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|),$$

und damit

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{M}{m_1 m_2}, \quad (2.1)$$



**Abbildung 2.1:**  
Zusammenhang zwischen Koordinaten der Massenpunkte, Relativ- und Schwerpunktkoordinate.

wobei  $\mu$  die reduzierte Masse und  $M = m_1 + m_2$  die Gesamtmasse ist. Gl. (2.1) entspricht der Bewegung eines Teilchens der Masse  $\mu$  im Potential  $V$ . Mit der Schwerpunktskoordinate  $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M$  gilt

$$\vec{X} = \frac{m_1}{M}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}(\vec{x} + \vec{x}_2) + \frac{m_2}{M}\vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{x} + \vec{x}_2 \quad (2.2)$$

$$\vec{X} = \frac{m_1}{M}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{x}_1 - \vec{x}) = \vec{x}_1 - \frac{m_2}{M}\vec{x} \quad (2.3)$$

und es ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M}\vec{x}, \quad \vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M}\vec{x}.$$

### Drehimpulserhaltung

Ohne äußeres Drehmoment  $\vec{M}$  ist nach Kap. 1.7 der Gesamtdrehimpuls erhalten und via

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}[\vec{X} \times \vec{P} + \vec{L}_{\text{rel}}] = 0$$

auch der relativ-Anteil  $\vec{L}_{\text{rel}}$ , da wir o.B.d.A. den Gesamtimpuls  $\vec{P}$  zu Null setzen können. Die Schwerpunktskoordinate  $\vec{X}$  ist auch erhalten, denn  $\vec{P} = M\dot{\vec{X}}$ , und damit  $\dot{\vec{X}} = 0 \Rightarrow \vec{X} = \vec{X}_0$ . O.b.d.A. setzen wir auch  $\vec{X} = 0$ . Damit werden die Transformationsgleichungen zu

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{x}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{x} \quad (2.4)$$

und der Relativ-Anteil  $\vec{L}_{\text{rel}}$  zu

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \sum_{i=1,2} m_i(\vec{x}_i - \vec{X}) \times \dot{\vec{x}}_i = m_1\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

und mit Gl. (2.4)

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \left[ m_1 \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 + m_2 \left( -\frac{m_1}{M} \right)^2 \right] \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \underbrace{(m_1 + m_2)}_M \frac{m_1 m_2}{M^2} \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

oder, mit Gl. (2.1),

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{\mu} \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \mu(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}). \quad (2.5)$$

### Energieerhaltung

Die Gesamtenergie  $T + V$  ist ohne äußere Kräfte erhalten. Nach Kap. 1.7 setzt sich die kinetische Energie  $T = T_{\text{SP}} + T_{\text{rel}}$  aus einem Schwerpunktsanteil,  $T_{\text{SP}}$ , und einem relativ-Anteil,  $T_{\text{rel}}$ , zusammen. Wegen  $\dot{\vec{X}} = 0$  verschwindet  $T_{\text{SP}} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2$  und somit ist  $T_{\text{rel}} + V$  erhalten.  $T_{\text{rel}}$  hat die Form

$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2$$

und mit Gl. (2.4)

$$T_{\text{rel}} = \underbrace{\left[ \frac{m_1}{2} \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left( -\frac{m_1}{M} \right)^2 \right]}_{\mu/2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2$$

wie schon zuvor. Die Energieerhaltung hat also die Form

$$T_{\text{rel}} + V = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) \quad (2.6)$$

### 2.2 Allgemeines Potential

Da  $\vec{L}_{\text{rel}}$  erhalten ist und  $\vec{x} \cdot \vec{L}_{\text{rel}} = \mu \vec{x}(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = 0$  gilt, folgt damit, dass die Bahn  $\vec{x}(t)$  in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{L}_{\text{rel}} \equiv (0, 0, l)$  verläuft. Wir führen ebene Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ein (siehe Fig. 2.2):

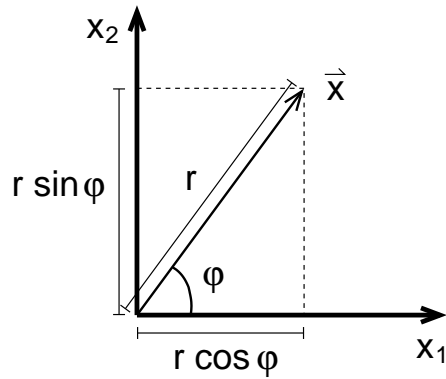
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Wir bestimmen die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right|} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet man auch leicht  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_3$ . Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten lautet dann

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$



**Abbildung 2.2:**  
Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten.

Wir können die Erhaltungsgrößen  $l$  und  $E = T_{\text{rel}} + V$  zur Bestimmung der Bahnkurve  $\varphi(r)$  und des zeitlichen Durchlaufs  $t(r)$  benutzen.

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = \mu r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = \mu r \dot{r} \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{=0} + \mu r^2 \dot{\varphi} \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_3}$$

und damit

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3.$$

Mit

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

werden Gl. (2.5) und Gl. (2.6) zu

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (2.8)$$

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U(r), \quad (2.9)$$

wobei

$$U(r) \equiv \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

Die Größe  $l^2/(2\mu r^2)$  heißt Zentrifugalpotential, und da sie nur von  $r$  abhängt, wird sie formal dem Potentialterm zugeschlagen, obgleich sie aus der kinetischen Energie hervorgegangen ist. Da  $l$  eine Erhaltungsgröße ist, haben wir also schon  $\dot{\varphi}$  eliminiert. Aus Gl. (2.9) folgt

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}. \quad (2.10)$$

Wir integrieren diese Gleichung durch Separation der Variablen und erhalten den zeitlichen Durchlauf als Funktion der Erhaltungsgrößen  $E$  und  $l$  und der

Anfangsbedingung  $t(r_0)$ :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r'))}} = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt' = t(r) - t(r_0). \quad (2.11)$$

Sobald wir ein bestimmtes  $U(r)$  gegeben haben, können wir das Integral auf der linken Seite von dieser Gleichung lösen; auch falls wir nicht explizit nach  $r(t)$  auflösen können, gibt diese Gleichung dann implizit den Verlauf des Abstandes  $r$  als Funktion der Zeit an.

Weiterhin verwenden wir (2.8) in der Form  $\dot{\varphi} = l/(\mu r^2)$ . Zusammen mit Gl. (2.10) ergibt dies

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}}. \quad (2.12)$$

Nun können wir die Bahnkurve  $\varphi(r)$  direkt aus den Erhaltungsgrößen  $E$  und  $l$  und der Anfangsbedingung  $t(r_0)$  berechnen:

$$\int_{r_0}^r \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}} = \varphi(r) - \varphi(r_0). \quad (2.13)$$

Wir bemerken also, dass wir zur Lösung des 2-Körperproblems nicht die Differentialgleichung (2.1) zu lösen brauchten, da wir die Konstanten der Bewegung kennen. An einem Beispiel für  $U(r)$  illustrieren wir die möglichen Bewegungstypen (siehe Abb. 2.3).

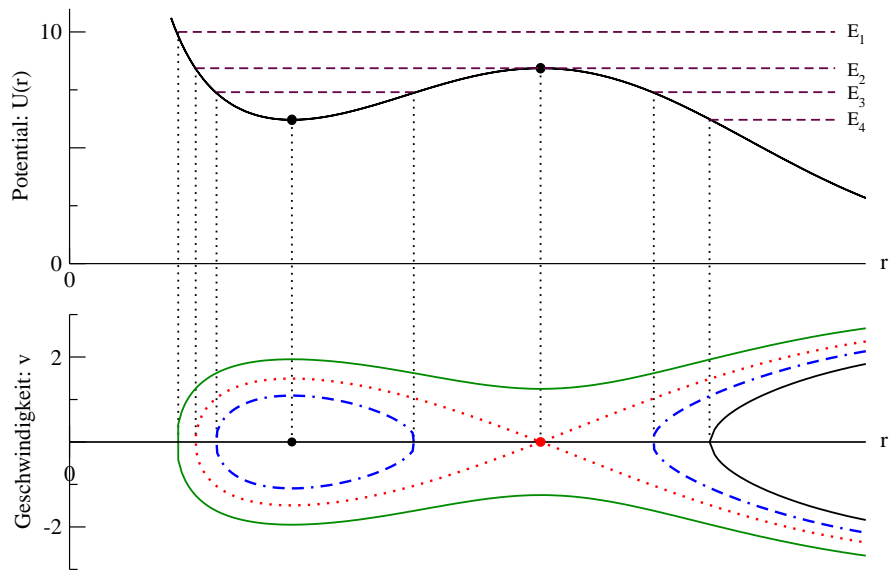
Im "Phasenraum" mit den Koordinaten  $r, \dot{r}$  ist die radiale Bewegung für 4 verschiedene Energien dargestellt. Es gibt 2 Typen: Gebundene (finite) Bahnen und Streubahnen (infinite Bahnen).

### Symmetrie der Bahnen

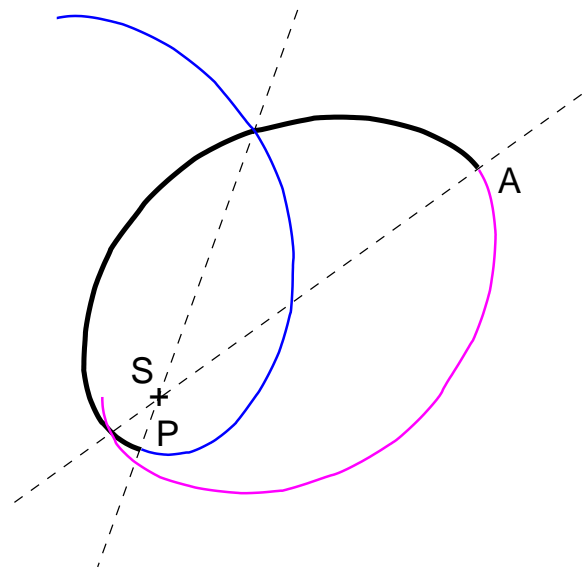
Die Wurzel in Gl. (2.10) wechselt bei  $r_{\text{min}}$  (und bei finiten Bahnen auch bei  $r_{\text{max}}$ ) ihr Vorzeichen, denn nachdem  $r$  monoton auf  $r_{\text{min}}$  abgefallen ist, muss  $\dot{r}$  das Vorzeichen wechseln, bevor  $r$  wieder wachsen kann.

Wenn man den Wert  $\varphi = 0$  dem Perihel  $P$  zuordnet, dann unterscheiden sich in Gl. (2.13) Punkte mit gleichen  $r$ -Werten in der Nähe von  $P$  nur durch das Vorzeichen von  $\varphi$ , nicht im Betrag von  $\varphi$ . Damit hat die Bahn die Symmetrieachse  $SP$  ( $S$  steht für das Zentrum). Mit demselben Argument findet man die zweite Symmetrieachse  $SA$  vom Zentrum  $S$  zum Aphel  $A$  (siehe Abb. 2.4). Damit kann man die ganze Bahn aus einem Abschnitt  $A \rightarrow P$  konstruieren (im Fall infiniter Bahnen aus der halben Bahn  $\infty \rightarrow P$ ).

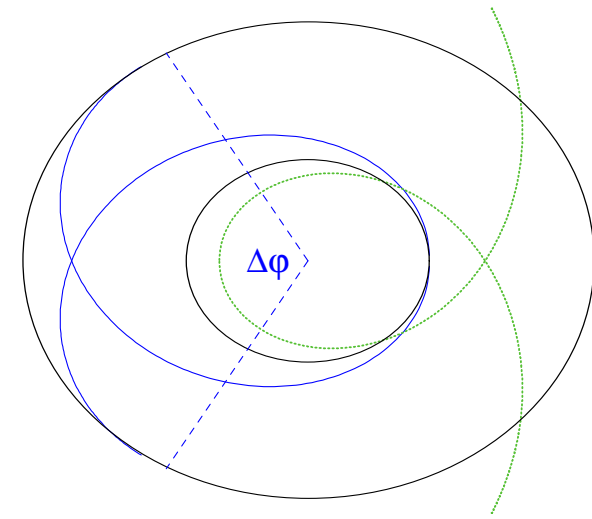




**Abbildung 2.3:** Streu- und gebundene Bahnen für ein allgemeines abstoßendes Potential  $U(r) = l^2/(2\mu r^2) + V(r)$ .



**Abbildung 2.4:** Symmetrie der finiten Bahnkurven mit dem Zentrum  $S$ : Bahnabschnitt von Aphel  $A$  zu Perihel  $P$  hat die Symmetrieachsen  $SA$  und  $SP$ .



**Abbildung 2.5:** Bahn im Ortsraum für das Potential aus der Abbildung 2.3, und mit den Energien  $E_1$  und  $E_3$  und der Periheldrehung  $\Delta\varphi$ .

### 2.3 Gebundene Bahnen

Hier ist  $r(t)$  periodisch, mit der Periode (siehe (2.11))

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.14)$$

Aus dem Sonnensystem stammen die Bezeichnungen Perihel für den Punkt mit  $r_{\min}$  in größter Sonnennähe sowie Aphel mit  $r_{\max}$  in größter Sonnenferne. In einer Periode nimmt dabei der Winkel  $\varphi$  um den Betrag (siehe (2.13))

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.15)$$

zu (Periheldrehung). So ergibt sich im allgemeinen eine “Rosettenbahn” im Ring  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , die sich nur für rationale Verhältnisse von  $\Delta\varphi/(2\pi)$  schließt. Sei z.B.  $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , dann hat  $r(t)$  nach der Zeit  $nT$   $m$  ganze Durchläufe ausgeführt und ist wieder am Anfangswert; die Kurve schließt sich. Für das Kepler-Problem ist  $\Delta\varphi = 0$ , relativistische Korrekturen ergeben jedoch eine Periheldrehung (Gemessen wird für den Merkur ein  $\Delta\varphi$  von  $40''$  pro Jahrhundert).

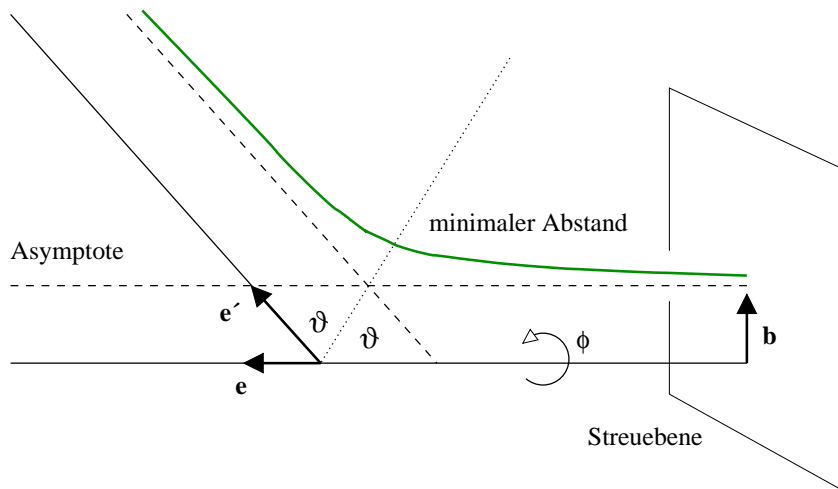


Abbildung 2.6: Die Geometrie des Streuproblems.

## 2.4 Streubahnen

Für  $l = 0$  kreuzen sich die Bahnen der Massenpunkte. Voraussetzung für die Existenz von Streubahnen ist somit  $l \neq 0$  sowie  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) < \infty$ . Nehmen wir  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$  an. Dann gibt es Streubahnen nur für  $E \geq 0$ . Für große  $r$  ist das Potential so schwach, dass die Bahn geradlinig wird. Es existieren also Asymptoten für  $t \rightarrow \pm\infty$ :

Zum Charakterisieren des Stoßes benutzen wir die erhaltene Gesamtenergie  $E$ , die Einfallsrichtung  $\vec{e} || \dot{\vec{x}}(t = -\infty)$  und den "Zielfehler"  $\vec{b} \perp \vec{e}$ .  $|\vec{b}|$  heißt Stoßparameter. Für  $t \rightarrow -\infty$  ist  $E \rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2$  und

$$l = \mu |\vec{b}| |\dot{\vec{x}}| = \mu b \sqrt{\frac{2E}{\mu}} = b \sqrt{2\mu E}. \quad (2.16)$$

So bestimmen  $b = |\vec{b}|$  und  $E$  den Drehimpuls  $l$  und den Streuwinkel  $\chi$  via  $\chi = \pi - 2\vartheta$ :

$$\vartheta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.17)$$

(Der Winkel  $\phi$  von Gl. (2.13) ist hier in die für Streuprobleme übliche Bezeichnung  $\vartheta$  umbenannt). Bei fester "Einfallsenergie"  $E$  und Einfallsrichtung  $\vec{e}$  entspricht jedem Punkt  $\vec{b}$  in der Stoßparameterebene  $P \perp \vec{e}$  ein Punkt  $\vec{e}'$

auf der Einheitskugel. Die Dynamik definiert also eine Abbildung

$$\vec{b} \rightarrow \vec{e}'(\vec{b}).$$

Unter dieser Abbildung geht ein Flächenelement  $d\sigma = b db d\phi$  von  $P$  (hier ist  $\phi$  der ebene Winkel in  $P$ ) in ein Raumwinkelement  $d\Omega = \sin\chi d\chi d\phi$  (in Kugelkoordinaten) über. Als differentiellen Wirkungsquerschnitt (oder Streuquerschnitt) (siehe Kern-/Teilchenphysik) definiert man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b db}{\sin\chi d\chi} \right| = \left| \frac{b}{\sin\chi} \left( \frac{d\chi}{db} \right)^{-1} \right|, \quad (2.18)$$

wobei  $\chi(b)$  durch (2.16) und (2.17) gegeben ist. Betrachtet man viele Stöße mit festem  $E$  und  $\vec{e}$ , deren Stoßparameter  $\vec{b}$  die Ebene  $P$  mit einer Dichte  $\rho$  bedecken, so ist  $\rho \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$  die Zahl der Stöße mit  $\vec{e}' \in d\Omega$ . In Worten ist der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwischen einfallenden Teilchen und Target eine Wechselwirkung stattfindet; der differentielle Wirkungsquerschnitt ist die Wahrscheinlichkeit für die Streuung in eine bestimmte Raumrichtung.

## 2.5 Das Keplerproblem

Newton hat 1665 aus Keplers 3. Gesetz ( $T^2 \propto a^3$ ,  $T$  Umlaufzeiten,  $a$  große Ellipsenhalbachsen) geschlossen, dass die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern invers proportional zu ihrem Abstand ist:

$$|\vec{F}| = \frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}$$

wobei  $m_1$  und  $m_2$  z.B. die Massen von Sonne und Erde sind. Dem entspricht das Potential

$$V(\vec{x}) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{x}|}$$

mit der universellen Gravitationskonstante  $\gamma = (6.674 \pm 0.004) 10^{-8} \text{ cm}^3 / (\text{g s}^2)$ . Bemerkenswerterweise sind diese sogenannten schweren Massen  $m_1$  und  $m_2$  dieselben, die in der Impulsänderung auftauchen (die sogenannten trägen Massen):

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

( $\gamma$  ist universell und daher keine Proportionalitätskonstante). Experimentell ist die Äquivalenz von schwerer und träger Masse seit Newton immer wieder bestätigt worden.

Die reduzierte Masse  $\mu$  ist  $\mu = m_1 m_2 / M$ ; daher können wir das Gravitationsgesetz auch als

$$V(\vec{x}) = -\frac{\gamma\mu M}{|\vec{x}|}$$

schreiben. Wenn man nur die Relativbewegung betrachtet, kann man dies als Wirkung eines externen Potentials auffassen, das auf die reduzierte Masse  $\mu$  wirkt:

$$V(\vec{x}) = -\kappa \frac{\mu}{|\vec{x}|}, \quad \kappa = \gamma M$$

Das Keplerproblem besteht also in der Beschreibung der Bewegung eines Teilchen in einem  $1/r$ -Potential (wie in Kap. 2.2 arbeiten wir in ebenen Polarkoordinaten mit  $|\vec{x}| = r$ ):

$$V(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} = -\frac{\gamma\mu M}{r}$$

Als Variable benutzen wir  $s = 1/r$  und suchen die Bahngleichung  $r = r(\varphi)$  in der Form  $s = s(\varphi)$ . Wir finden aus Gl. (2.12)

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{r^2}{l} \sqrt{2\mu(E - U(r))}.$$

Mit dem effektiven Potential

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

haben wir

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} s - s^2} \equiv -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)}, \quad (2.19)$$

wobei wir mit  $s_1 \leq s_2$  die beiden Nullstellen des Radikanden bezeichnet haben. Wegen  $(s_2 - s)(s - s_1) = -s_1 s_2 + (s_1 + s_2)s - s^2$  ergibt der Koeffizientenvergleich

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{\gamma\mu^2 M}{l^2}; \quad \frac{s_1 s_2}{2} = -\frac{\mu E}{l^2}.$$

Wir können die Nullstellen auch direkt ermitteln:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} \pm \sqrt{\frac{4\gamma^2\mu^4 M^2}{l^4} + \frac{8\mu E}{l^2}} \right] = \frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\gamma^2\mu^3 M^2}} \right]$$

Wir stellen fest, dass wir reelle Lösungen für  $ds/d\varphi$  nur für  $s_1 \leq s \leq s_2$  haben. Somit können wir  $s$  durch einen Winkel  $\beta$  darstellen:

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta. \quad (2.20)$$

Mittelwert  $(s_1 + s_2)/2$  und Amplitude  $(s_2 - s_1)/2$  dieses Ansatzes sind so gewählt, dass der erlaubte Bereich  $s_1 \leq s \leq s_2$  genau eingehalten ist. Aus dem Ansatz folgt für den Zusammenhang zwischen  $s$  und  $\varphi$

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \frac{d\beta}{d\varphi} \quad (2.21)$$

Einsetzen des Ansatzes in Gl. (2.19) ergibt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)} \\ &= -\sqrt{\left(\frac{s_2 - s_1}{2} - \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta\right) \left(\frac{s_2 - s_1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta\right)} \\ &= -\frac{s_2 - s_1}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Also haben wir durch Vergleich von Gl. (2.21) und (2.22)

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \frac{d\beta}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta.$$

Daraus folgt  $d\beta/d\varphi = 1$  oder  $\beta = \varphi - \varphi_0$  (d.h.  $\beta$  und  $\varphi$  sind bis auf eine Konstante gleich). Damit wird (2.20) zur Bahngleichung,

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} \left( 1 + \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \cos \varphi \right) \equiv \frac{1}{d} \left( 1 + \epsilon \cos \varphi \right),$$

und wir brauchen nur noch einzusetzen (mit  $s = 1/r$ ):

$$r(\varphi) = \frac{d}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (2.23)$$

$$d = \frac{2}{s_1 + s_2} = \frac{l^2}{\gamma\mu^2 M},$$

$$\epsilon = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\gamma^2\mu^3 M^2}} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \epsilon^2 = \frac{4s_1 s_2}{(s_1 + s_2)^2} = -E \frac{2l^2}{\gamma^2\mu^3 M^2}.$$

(2.23) ist die Gleichung eines Kegelschnitts, mit einem der Brennpunkte in  $r = 0$ , und zwar für

$E < 0 \implies e < 1$ : Ellipse
$E = 0 \implies e = 1$ : Parabel
$E > 0 \implies e > 1$ : Hyperbel

### Ellipsen

Der erste Fall mit negativer Gesamtenergie  $E < 0$ , der zu gebundenen Bahnen führt, entspricht dem ersten Keplerschen Gesetz: Die Umlaufbahn eines Trabanten ist eine Ellipse; einer ihrer Brennpunkte liegt im Schwerpunkt des Systems.

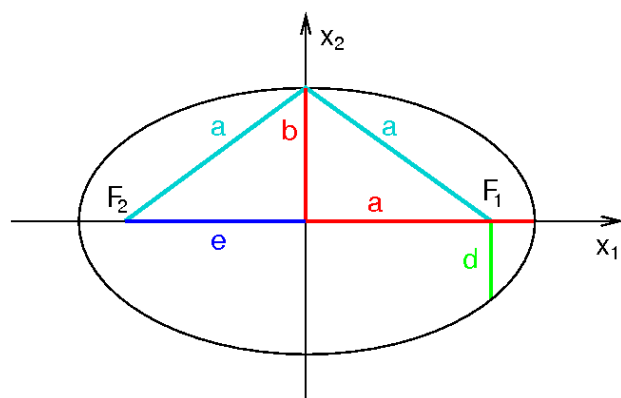
Ellipsen sind definiert als Punktmenge  $\{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$  mit Brennpunkten  $F_1, F_2$  und großer Halbachse  $a$  (siehe Abb. 2.7).

Die große Halbachse  $a$  ergibt sich aus Perihelabstand  $r_{\min}$  und Aphelabstand  $r_{\max}$ , die bei  $\cos \varphi = 1$  und  $\cos \varphi = -1$  auftreten, zu  $2a = d/(1 + e) + d/(1 - e)$  und damit  $d = a(1 - e^2)$ . Die numerische Exzentrizität  $e$  ist durch  $e = e/a$  mit der Exzentrizität  $e$  verknüpft. Für die kleine Halbachse  $b$  liest man aus der Figur  $b^2 = a^2 - e^2$  ab, und damit ist  $b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{a} \sqrt{d}$ .

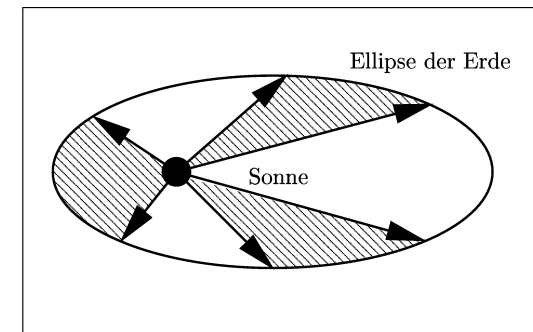
Die Umlaufzeit  $T$  ergibt sich durch Integration aus (2.14) oder aus dem Flächensatz: Die Änderung der Fläche  $F$  unter einer Kurve  $r(\varphi)$  ist  $dF = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ . Somit ist mit Gl. (2.8)  $\dot{F} = l/(\mu r^2)$  die Flächengeschwindigkeit  $\dot{F}$

$$\dot{F} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{2\mu}$$

konstant, im Einklang mit dem zweiten Keplerschen Gesetz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl (d.h. die Linie Trabant-Schwerpunkt) gleiche Flächen.



**Abbildung 2.7:** Die Geometrie einer Ellipse mit Brennpunkten  $F_1, F_2$ , großen und kleinen Halbachsen  $a$  und  $b$ , Halbparameter  $d$  und Exzentrizität  $e$ .



**Abbildung 2.8:** Der Keplersche Flächensatz unter Berücksichtigung des Massenverhältnisses 333000 : 1 von Sonne zu Erde (Sonne im Brennpunkt der Ellipse).

Die Gesamtfläche  $\pi ab$  der Ellipse ist durch

$$\pi ab = \dot{F}T = \frac{l}{2\mu}T$$

gegeben, und die Umlaufzeit  $T$  somit durch

$$T = \frac{2\pi ab\mu}{l}$$

Verwenden wir nun noch, dass  $ab = d^{1/2}a^{3/2}$ , dann haben wir mit dem Ausdruck für  $d = l^2/\gamma\mu^2M$  (siehe Gl. (2.23))

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}\mu}{l} \frac{l}{\mu\sqrt{\gamma M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{3/2},$$

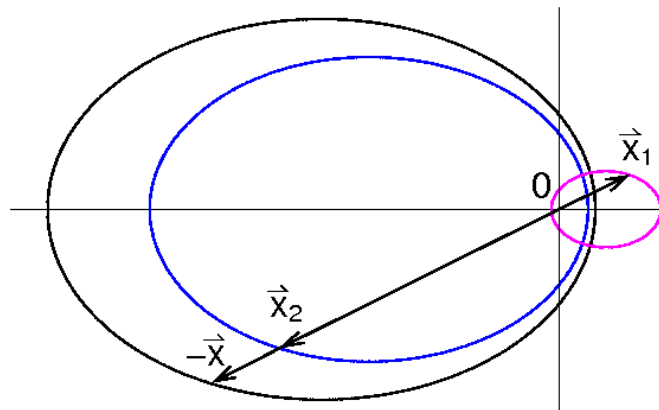
das dritte Keplersche Gesetz hergeleitet: Die Quadrate der Umlaufzeiten je zweier Trabanten um ein gemeinsames Zentrum sind proportional zu den dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen:  $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$ .

Bislang haben wir die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate  $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  betrachtet, aber wir können mit Gl. (2.4) zurücktransformieren:

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{x}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{x}$$

Wir sehen, daß beide Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  Ellipsen folgen mit einem geteilten Brennpunkt (siehe Abb. 2.9). Die Größen der Ellipsen entsprechen den Massenverhältnissen. Die Relativkoordinate beschreibt ebenfalls eine Ellipse.

Wenn eine der beiden Massen viel größer ist als die andere ( $m_1 \gg m_2$ ), dann gilt  $M \approx m_1$ ,  $\mu \approx m_2$ . Die Position von  $m_1$  ist dann fest im Schwerpunkt des Systems:  $\vec{x}_1 \approx 0$ ,  $\vec{x}_2 \approx -\vec{x}$ .



**Abbildung 2.9:** Zusammenhang zwischen den Ellipsen  $\vec{x}_1(\varphi)$ ,  $\vec{x}_2(\varphi)$  und  $\vec{x}(\varphi)$  im 2-Körpersystem.

Wie gut diese Näherung im Sonnensystem ist, kann man aus den Daten in Tabelle 2.1 ablesen. Die mittlere Bewegung der Sonne durch die Erde ist

$$\begin{aligned} \langle |\vec{x}_1| \rangle &= \frac{m_2}{M} \langle |\vec{x}| \rangle = \frac{1}{1+A} \langle |\vec{x}| \rangle \quad \text{mit } A = 333000 \\ \langle |\vec{x}_1| \rangle &= 453 \text{ km,} \end{aligned}$$

d.h. die Ellipse, die die Sonne wegen der Erde beschreibt, liegt tief in ihrem Inneren.

### Parabel

Nach Gl. (2.23) ergeben Energien  $E \geq 0$  infinite Bahnen. Den unendlichen Abstand zum Zentrum  $r \rightarrow \infty$  erreicht man für Winkel  $\varphi_\infty$  mit

$$(1 + \epsilon \cos \varphi_\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{r} = 0 \implies \cos \varphi_\infty = -1/\epsilon. \quad (2.24)$$

	Masse $m[m_\oplus]$	Mittlerer Abstand $\langle  \vec{x}  \rangle [10^6 \text{ km}]$	num. Exzentrizität $\epsilon$	Periode $T[\text{a}]$
Sonne	333000	-	-	-
Merkur	0.055	57.9	0.206	0.241
Venus	0.82	108.2	0.007	0.613
Erde	1	149.6	0.017	1.0004
Mars	0.11	227.9	0.093	1.881
Jupiter	317.8	779.3	0.049	11.862

**Tabelle 2.1:** Einige Daten aus dem Sonnensystem.

Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 1$  (Parabel) ist  $\cos \varphi_\infty = 1$ , also  $\varphi_\infty = \pm\pi$  und die Bahnkurve führt für  $t \rightarrow \infty$  wieder in die Einfallsrichtung zurück.

### Hyperbeln

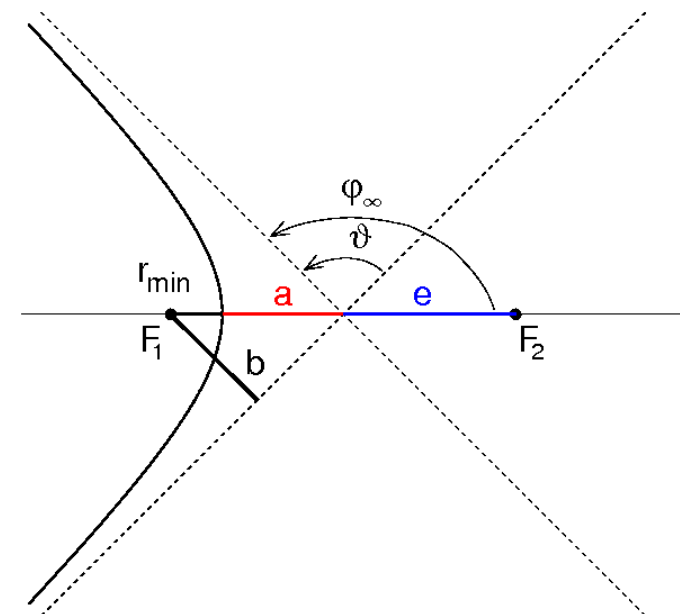
Hyperbeln sind definiert als Punktmenge  $\{P \mid ||\vec{F}_1 P| - |\vec{F}_2 P|| = 2a\}$  mit Brennpunkten  $F_1, F_2$  und großer Halbachse  $a$  (siehe Abb. 2.10).

Wir charakterisieren die Hyperbelbahn durch den Stoßparameter  $b$  (den Abstand, in dem das Teilchen am Zentrum vorbeifliege, wenn es nicht abgelenkt würde) und den Winkel  $\vartheta$ , um den es von der geraden Flugbahn abgelenkt wird (siehe Abb. 2.10). Wir ordnen dem Perihel  $r_{\min}$  den Winkel  $\varphi(t=0) = 0$  zu.

Nach Abb. 2.10 ist dann  $\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty)$ , also  $\vartheta/2 = \varphi_\infty - \pi/2$  und

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \left( \varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \varphi_\infty = \frac{1}{\epsilon} \quad (2.25)$$

wobei wir das Additionstheorem  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$  verwendet haben. Wie in Kap. 2.4 verwenden wir die Erhaltungsgrößen Energie



**Abbildung 2.10:** Hyperbolische Streubahn.  $b$  ist hier der Stoßparameter, nicht die imaginäre Halbachse.

und Drehimpuls:

$$E = \frac{\mu}{2} [\dot{\vec{x}}(t = -\infty)]^2 > 0 \implies \dot{\vec{x}}(t = -\infty) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$$

$$l = \mu |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \mu |\vec{x}(t = -\infty) \times \dot{\vec{x}}(t = -\infty)| = \mu b |\dot{\vec{x}}(t = -\infty)| = \mu b \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$$

Das ergibt den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Stoßparameter

$$l^2 = 2\mu E b^2 \quad (2.26)$$

Für den sonnennächsten Punkt gilt  $\dot{r}(t = 0) = 0$  und aus der Bahngleichung  $r_{\min} = r(\varphi = 0) = d/(1 + \epsilon)$  und damit für die (erhaltene) Gesamtenergie

$$E = \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{\gamma\mu M}{r_{\min}} = \gamma\mu M \left( \frac{d}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right)$$

Mit der Beziehung  $d = l^2/(\gamma\mu^2 M)$  für den Halbparameter (siehe Gl. (2.23)) folgt

$$E = \gamma\mu M \left( \frac{(1 + \epsilon)^2}{2d} - \frac{1 + \epsilon}{d} \right) = \gamma\mu M \frac{\epsilon^2 - 1}{2d}$$

und durch nochmalige Verwendung des Halbparameters  $d$  sowie von Gl. (2.26)

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2dE}{\gamma\mu M} = \frac{2l^2 E}{\gamma^2 \mu^3 M^2} = \frac{4E^2 b^2}{\gamma^2 \mu^2 M^2}$$

Andererseits ist mit Gl. (2.25)

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} - 1 = \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \cot^2 \frac{\vartheta}{2}$$

sodass wir die Zusammenhänge

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma\mu M}{2Eb} \quad \text{und} \quad b = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}} \quad (2.27)$$

finden, letzteres aus Gl. (2.26). Energie  $E$  und Drehimpuls  $l$  legen also Stoßparameter  $b$  und Ablenkwinkel  $\vartheta$  fest. Den Zusammenhang (2.27) leiten wir ab:

$$b(\vartheta) = \frac{\gamma\mu M}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2} \implies \frac{db(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\gamma\mu M}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Damit können wir nach Gl. (2.18) den differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \vartheta} \frac{db}{d\vartheta} \right| = \left| \frac{b}{2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}} \left( -\frac{\gamma\mu M}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) \right| = \left| \frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right|$$

wobei wir  $b(\vartheta)$  aus Gl. (2.27) im letzten Schritt verwendet haben. Somit ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 \quad (2.28)$$

Für geladene Teilchen erscheint das Produkt der Ladungen  $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$  anstelle von  $\gamma\mu M$  (die Coulombwechselwirkung ist wie die Gravitationswechselwirkung ein  $1/r$ -Potential), und dann heißt diese Gleichung (2.28) die *Rutherford'sche Streuformel*.

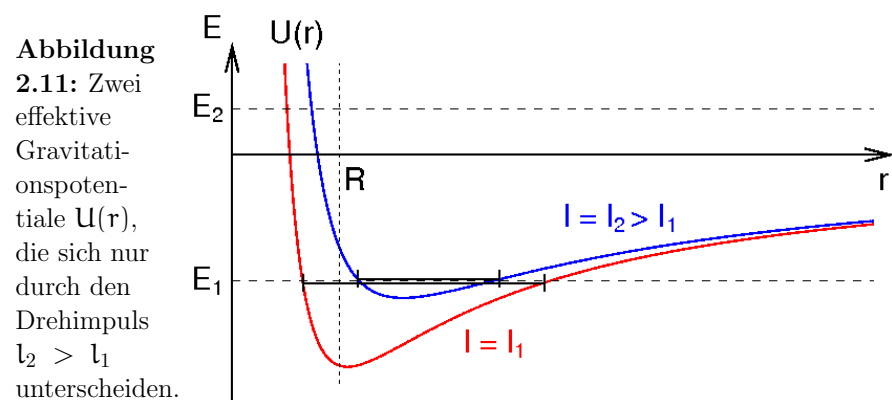
### Bewegungsarten im Gravitationspotential

Der Massenpunkt kann  $r$ -Werte erreichen, für die gilt

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma\mu M}{r} \leq E$$

d.h. bei denen das effektive Potential  $U(r)$  unterhalb der Energie liegt (siehe Abb. 2.11). Das Zentrifugalpotential ist dabei ein repulsiver Beitrag zum Gravitationspotential, der für kleine Abstände  $r$  dominiert.

Für Satelliten ist  $E < 0$  (d.h. die Bahn ist gebunden), aber es müssen Abstände  $r \leq R$  mit Erdradius  $R$  verboten sein (um Kollision zu vermeiden). Also ist ein hinreichender Drehimpuls erforderlich, oder äquivalent eine Mindestgeschwindigkeit tangential zur Erdoberfläche; daraus ergibt sich



die 1. kosmische Geschwindigkeit  $v_1 = 7.9$  km/s. Zum Verlassen der Erde braucht ein Flugkörper mindestens  $E = 0$ ; mit der potentiellen Energie an der Erdoberfläche  $V(R) = -\gamma\mu M/R$  (Erdbziehungskraft  $m\mathbf{g} = \gamma\mu M/R^2$ , Flugkörpermasse  $m \approx \mu$ ) folgt aus

$$E = 0 = \frac{m}{2}v_1^2 - m\mathbf{g}R$$

die 2. kosmische Geschwindigkeit  $v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2$  km/s.

## 2.6 Der Virialsatz

In einem N-Teilchen-System mit endlichen Bahnen findet eine ständige Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt statt. Der Virialsatz sagt aus, wie viel die kinetische und die potentielle Energie jeweils im zeitlichen Mittel zur Gesamtenergie beitragen. Diese sehr allgemeine Aussage hängt nur von der Potenz ab, mit der der Abstand der Teilchen  $r$  ins Potential eingeht.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Streuproblem zurück (also zu einem allgemeinen Zentralpotential) und nehmen an, dass das Potential  $V(\vec{x})$  eine homogene Funktion  $n$ -ten Grades von  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  ist, also

$$V(\lambda\vec{x}) = \lambda^n V(\vec{x}), \quad (2.29)$$

für alle Skalenfaktoren  $\lambda \in \mathbb{R}$ . In Worten: eine Skalierung der Abstände mit einem Faktor  $\lambda$  führt zu einer Skalierung des Potentials mit  $\lambda^n$ . Dann gilt für alle  $\lambda$

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda\vec{x}) = \frac{dV(\vec{y})}{d\vec{y}} \frac{d\vec{y}}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{dV(\lambda\vec{x})}{d\vec{x}} \cdot \vec{x}$$

Andererseits erhalten wir aus der rechten Seite von Gl. (2.29)

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda\vec{x}) = \frac{d}{d\lambda} \lambda^n V(\vec{x}) = n\lambda^{n-1} V(\vec{x}).$$

Speziell für  $\lambda = 1$  erhalten wir daraus die Beziehung

$$\vec{x} \cdot \frac{d}{d\vec{x}} V(\vec{x}) = n V(\vec{x}), \quad (2.30)$$

aus der wir (Beweis folgt) den "Virialsatz"

$$2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle \quad (2.31)$$

herleiten können. Dabei notieren wir mit  $\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$  den Mittelwert einer Funktion;  $\langle T \rangle$  und  $\langle V \rangle$  sind die Mittelwerte der kinetischen, bzw. der potentiellen Energie für gebundene Bahnen,

$$\langle T \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) \quad (2.32)$$

und

$$\langle V \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i V(\vec{x}_i(t)). \quad (2.33)$$

**Kepler-Problem:** Speziell für das  $1/r$ -Potential des Kepler-Problems  $V(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{-1}$  ist  $n = -1$  und

$$2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle.$$

Zum Beweis von (2.31) betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i &= \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i + \sum_i \vec{x}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \\ &= 2T - \sum_i \vec{x}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V = 2T - nV, \end{aligned} \quad (2.34)$$

wobei wir (2.29) in der Verallgemeinerung auf ein System von  $N$  Massenpunkten

$$V(\lambda\vec{x}_1, \dots, \lambda\vec{x}_N) = \lambda^n V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

verwendet haben. Wir bilden nun das zeitliche Mittel von Gl. (2.34) und finden

$$\begin{aligned} 2 \langle T \rangle - n \langle V \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_i \vec{x}_i(t) \cdot \vec{p}_i(t) \Big|_{t=0}^{t=\tau} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für begrenzte Bahnen. Die Größe  $\sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i$ , deren zeitlicher Mittelwert für endliche Bahnen verschwindet, heißt Virial.

### 3. Schwingungen

#### 3.0 Einführung

Schwingende Systeme lassen sich für kleine Amplituden im allgemeinen auf ein System linearer Differentialgleichungen zurückführen. Das gedämpfte mathematische Pendel, z.B., wird durch

$$m \ddot{x} = -f x - K \dot{x} \quad (3.1)$$

beschrieben. Hierbei ist  $m$  die Masse,  $f$  die Federkonstante und  $K$  die Reibungskonstante. Gl. (3.1) lässt sich elementar mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad m\lambda^2 + K\lambda + f = 0 \quad (3.2)$$

lösen. Unser Ziel ist es hier, einen allgemeinen Formalismus zu entwickeln, der zum einen Gl. (3.2) reproduziert und zum anderen auch auf komplizierte Probleme, wie z.B. ein System von gekoppelten Oszillatoren anwendbar ist. Hierzu werden wir eine Darstellung mit Hilfe von Operatoren und Propagatoren verwenden, wie sie in der Quantenmechanik üblich ist.

#### 3.1 Gedämpftes mathematisches Pendel

Zur Einführung betrachten wir das (gedämpfte) mathematische Pendel, Gl. (3.1). Wir führen einen Vektor

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}; \quad \beta = \frac{K}{2m},$$

ein, mit  $\alpha, \beta > 0$ . Die Bewegungsgleichung,

$$\ddot{x} = -\frac{f}{m}x - \frac{K}{m}\dot{x} = -\alpha^2 x - 2\beta\dot{x},$$

wird dann zu

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x} = \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\ddot{x}}{\alpha} = -\alpha x - 2\beta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \alpha \end{pmatrix},$$

oder in Matrix-Form

$$\dot{\vec{z}} = A \vec{z}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Wir haben also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt. Der Vorteil ist die Anwendbarkeit der Methoden der linearen Algebra.

Wir verwenden Exponentialansatz

$$\vec{z} = \vec{a} e^{\lambda t}; \quad \vec{a} \in \mathbb{C}^2,$$

mit der Eigenschaft  $\dot{\vec{z}} = \lambda \vec{z}$ . Einsetzen in Gl. (3.3) ergibt  $A \vec{a} e^{\lambda t} = \lambda \vec{a} e^{\lambda t}$ . Also finden wir die *Eigenschwingungen* durch Lösung des Eigenwertproblems

$$A \vec{a} = \lambda \vec{a} \iff (A - \lambda \mathbb{1}) \vec{a} = 0$$

Nicht-triviale Lösungen (also solche, für die  $\vec{a} \neq 0$  in  $\mathbb{C}^2$  ist) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\alpha & -\lambda - 2\beta \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 = \lambda^2 + \frac{K}{m}\lambda + \frac{f}{m} = 0$$

gegeben (vergl. Gl.(3.2)). Die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = -\frac{K}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2m}\right)^2 - \frac{f}{m}}. \quad (3.4)$$

Die entsprechenden Eigenvektoren finden wir mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \implies a_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha} a_1$$

und damit

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_i}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.5)$$

Es gibt drei Möglichkeiten für die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$ :

$$\begin{array}{lll} \alpha > \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, & \text{unterkritische Dämpfung} \\ \alpha = \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta, & \text{kritische Dämpfung} \\ \alpha < \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \text{überkritische Dämpfung.} \end{array}$$



Wir betrachten jetzt den Fall  $\alpha > \beta$  genauer und passen die zwei Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$  an. Wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; die Lösung erhalten wir als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\alpha} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + B^* \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2}{\alpha} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Da  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  gilt  $e^{\lambda_1 t} = (e^{\lambda_2 t})^*$ , und um eine reelle Lösung  $x(t)$  zu erhalten, müssen die zu bestimmenden Koeffizienten  $B$  und  $B^*$  zueinander konjugiert komplex sein. Mit  $B = C_1 + iC_2$ ,  $B^* = C_1 - iC_2$  und  $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= B e^{(-\beta+i\tilde{\omega})t} + B^* e^{(-\beta-i\tilde{\omega})t} = (C_1 + iC_2) e^{(-\beta+i\tilde{\omega})t} + (C_1 - iC_2) e^{(-\beta-i\tilde{\omega})t} \\ &= C_1 e^{-\beta t} (e^{i\tilde{\omega}t} + e^{-i\tilde{\omega}t}) + iC_2 e^{-\beta t} (e^{i\tilde{\omega}t} - e^{-i\tilde{\omega}t}) \\ &= 2C_1 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t) + 2C_2 e^{-\beta t} \sin(\tilde{\omega}t) \end{aligned}$$

Aus  $x(t=0) = 2C_1 \stackrel{!}{=} x_0$  folgt  $C_1 = x_0/2$ . Die Zeitableitung liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= -2\beta e^{-\beta t} (C_1 \cos(\tilde{\omega}t) + C_2 \sin(\tilde{\omega}t)) \\ &\quad + 2e^{-\beta t} (-C_1 \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t) + C_2 \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t)) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\dot{x}(t=0) = -2\beta C_1 + 2C_2 \tilde{\omega} \stackrel{!}{=} \dot{x}_0 \implies C_2 = \frac{\dot{x}_0}{2\tilde{\omega}} + \frac{x_0 \beta}{2\tilde{\omega}}$$

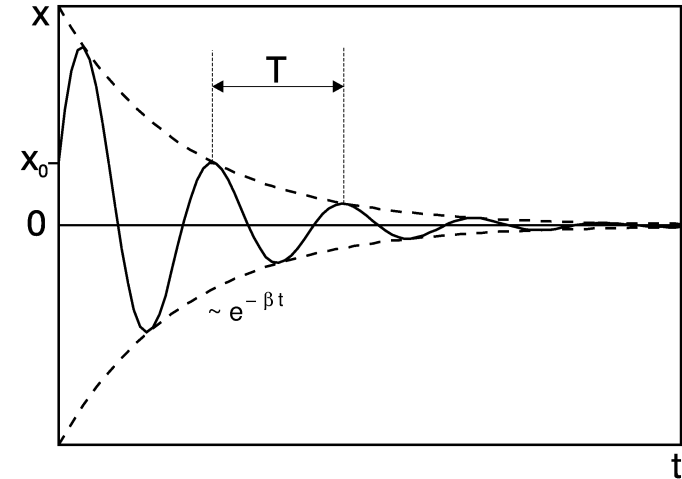
Damit finden wir als Lösung für die schwach gedämpfte Schwingung ( $\alpha > \beta$ )

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \left( \cos \tilde{\omega}t + \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \right) + \dot{x}_0 e^{-\beta t} \frac{1}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \quad (3.6)$$

Im Falle der unterkritischen Dämpfung ist die Frequenz

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{K^2}{4m^2}}$$

gegenüber der Frequenz  $\omega = \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$  der ungedämpften Schwingung verringert. Die Dämpfung  $\beta$  führt zu einer Halbwertszeit  $1/\beta$  für die Amplitude. Ein Beispiel für eine unterkritisch gedämpfte Schwingung ist in Abb. 3.1 gezeigt, eines für eine überkritisch gedämpfte Schwingung in Abb. 3.2.



**Abbildung 3.1:** Illustration einer unterkritischen Schwingung mit einer Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\tilde{\omega}$  und einer Dämpfung  $\beta$ .

Im Spezialfall des ungedämpften harmonischen Oszillators ( $\beta = 0$ ,  $\omega = \alpha$ ) vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

$$x = B e^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t} = 2C_1 \cos(\omega t) + 2C_2 \sin(\omega t)$$

$$\implies x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \sin(\omega t)$$

Dabei handelt es sich um die parametrische Darstellung einer Ellipse im Phasenraum  $(x, \dot{x})$ .

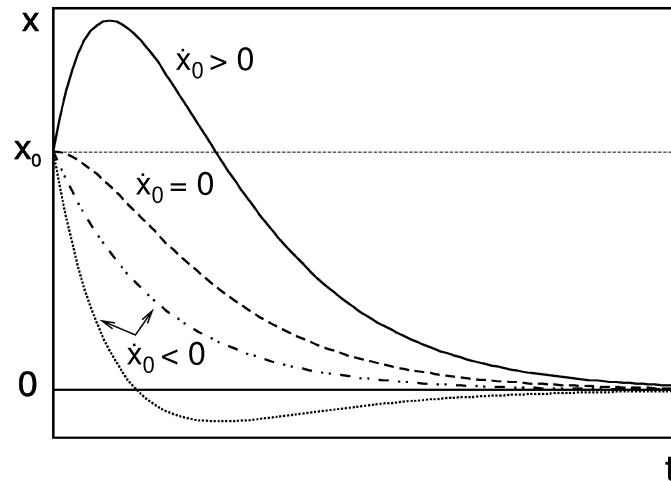
### Propagator

Mit  $\vec{z}(0) = (x(0), \dot{x}(0)/\alpha)$  definieren wir durch

$$\vec{z}(t) = P(t, 0) \vec{z}(0)$$

den Propagator  $P(t, 0) : \{\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2\}$ , der den Zustand des Systems zur Zeit  $t = 0$  auf den zur Zeit  $t$  abbildet (propagieren=ausbreiten). Der Propagator ist durch

$$P(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\beta t} (\cos \tilde{\omega}t + \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t) & e^{-\beta t} \frac{\alpha}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \\ -e^{-\beta t} \frac{\alpha}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t & e^{-\beta t} (\cos \tilde{\omega}t - \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t) \end{pmatrix}$$



**Abbildung 3.2:** Illustration einer überkritischen Schwingung mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten  $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$ .

gegeben.

### Beispiel

Als weiteres Beispiel diskutieren wir die Gleichung dritten Grades

$$\frac{d^3}{dt^3}x + a\frac{d^2}{dt^2}x + b\frac{d}{dt}x + cx = 0$$

mittels des Vektors  $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$ ,

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ -a\ddot{x} - b\dot{x} - cx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \equiv A\vec{z}.$$

Demnach ist auch der Propagator in diesem Beispiel eine  $3 \times 3$  Matrix und es gibt drei Anfangsbedingungen,  $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)$ . In der Mechanik ist die Bewegungsgleichung dagegen nur zweiter Ordnung und die Bahn ist durch nur zwei Anfangsbedingungen, Ort und Geschwindigkeit, festgelegt.

## 3.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Physikalische Messungen an einem Prozess werden dadurch sinnvoll, dass man den Prozess und die Experimente wiederholen kann. Jede Wiederholung sollte dann bei gleichen Anfangsbedingungen stattfinden, d.h. sowohl die externen Einflüsse (Reibung, treibende Kraft) wie interne Anfangswerte ( $x_0, \dot{x}_0$ ) sollten dieselben sein. Allerdings wird es technisch nie möglich sein, exakt dieselben Anfangsbedingungen zu präparieren, und daher wird es immer eine kleine Abweichung in den Anfangsbedingungen geben. Wenn eine kleine Abweichung nach langer Zeit eine beschränkte Abweichung in den beobachteten Zuständen ergibt, nennt man die Bewegung *stabil*. Hier untersuchen wir die Stabilität bezüglich der internen Anfangswerte.

Betrachten wir eine allgemeine Bewegungsgleichung der Form

$$\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z}) \quad (3.7)$$

( $\vec{z}$  und  $\vec{G}$  seien Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^n$ ). Nehmen wir an, dass eine Lösung  $\vec{z}(t)$  von (3.7) bekannt sei. Wir betrachten jetzt eine zweite Lösung  $\vec{z}(t) + \delta\vec{z}(t)$ , die anfangs zu  $\vec{z}(t)$  benachbart ist; also ist  $\delta\vec{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  eine kleine Abweichung um die bekannte Trajektorie  $\vec{z}(t)$ . Die Bewegungsgleichung für diese Lösung ist

$$\dot{\vec{z}} + \delta\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \quad (3.8)$$

Die Stabilitätsanalyse fragt jetzt nach dem Langzeitverhalten der Abweichung  $\delta\vec{z}(t)$ . Dazu linearisieren wir Gl. (3.8), d.h. wir entwickeln in erster Ordnung in  $\delta\vec{z}(t)$ :

$$\dot{\vec{z}} + \delta\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z}) + \left( \delta\vec{z} \nabla_{\vec{z}} \right) \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}} + O(\delta\vec{z}^2)$$

oder komponentenweise

$$\dot{z}_i + \delta\dot{z}_i = G_i(\vec{z}) + \sum_k \delta z_k \frac{\partial}{\partial z_k} G_i(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}} + O(\delta\vec{z}^2).$$

Unter Verwendung von Gl. (3.7) finden wir für die Abweichung

$$\delta\dot{\vec{z}} = \left( \delta\vec{z} \nabla_{\vec{z}} \right) \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}}$$

Wir identifizieren die partiellen Ableitungen  $\partial G_i / \partial z_k$  mit den Elementen  $A_{ik}$  der Matrix  $A$

$$A_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial z_k} \quad (3.9)$$

und finden damit

$$\delta \dot{\vec{z}}_i = \sum_k A_{ik} \delta \vec{z}_k, \quad \delta \dot{\vec{z}} = A \delta \vec{z}$$

Die Untersuchung der Matrix  $A(t)$  ist Ausgangspunkt der Stabilitätsanalyse. Falls  $A(t)$  stetig ist, so existiert für jeden Anfangswert  $\delta \vec{z}(s) \in \mathbb{R}^n$  (zur Zeit  $s$ ) eine eindeutige Lösung  $\delta \vec{z}(t)$ .

### Propagator

Die lineare Abbildung

$$P(t, s) : \quad \vec{z}(s) \rightarrow \vec{z}(t)$$

heißt *Propagator* oder Bewegungsabbildung des Systems (wichtig insbesondere in der Quantenmechanik). Es gilt

$$P(t, r) P(r, s) = P(t, s)$$

$$P(s, s) = \mathbb{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, s) = A(t) P(t, s)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind zu der Integralgleichung

$$P(t, s) = \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) P(t_1, s)$$

äquivalent. Sie lässt sich iterativ lösen:

$$\begin{aligned} P(t, s) &= \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) \left[ \mathbb{1} + \int_s^{t_1} dt_2 A(t_2) P(t_2, s) \right] \\ &= \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) + \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) P(t_2, s) \end{aligned}$$

und nach unendlich vielen dieser iterativen Schritte

$$P(t, s) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n).$$

### Autonome Systeme

Das System heißt *autonom* (zeitunabhängig), falls  $A$  nicht von der Zeit  $t$  abhängt (in (3.7) Linearisierung um eine Gleichgewichtslage  $\vec{x}^0(t)=\text{konst.}$ ).

Dann hängt  $P(t, s)$  nur von der Differenz der Zeiten  $t - s$  ab und wir setzen  $P(t) \equiv P(t, 0)$ . Es gilt

$$P(t) P(s) = P(t + s)$$

$$P(0) = \mathbb{1}$$

(Gruppeneigenschaften von  $P(t)$ ) und

$$\frac{d}{dt} P(t) = A P(t)$$

$$P(t) = \mathbb{1} + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = e^{At}.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass  $P(t)$  die durch  $A$  erzeugte ein-parametrische Gruppe ist. Aus der Exponentialdarstellung von  $P(t)$  kann man direkt nachvollziehen, dass

$$\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A A^{n-1} = A P(t)$$

gilt.

### Beispiel

Für  $\beta = 0$  hat die Matrix für den gedämpften harmonischen Oscillator die Form (3.3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\alpha^2 \mathbb{1}.$$

Es gilt also allgemein

$$A^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} \mathbb{1}, \quad A^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n} A, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Mit diesen Formeln lässt sich die Exponentialreihe für den Propagator aufsummieren:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} A^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} A^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} (-1)^m \alpha^{2m} \mathbb{1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m \alpha^{2m} A \\ &= \cos(t\alpha) \mathbb{1} + \frac{\sin(t\alpha)}{\alpha} A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Kap. 3.1 (für  $\beta = 0$  ist  $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha$ ).

### Stabilität der Lösung

Mit dem Propagator  $P(t) = \exp(At)$  können wir wieder auf die Stabilitätsanalyse zurückkommen. Für zeitunabhängiges  $A$  ist

$$\delta\vec{z}(t) = e^{At}\delta\vec{z}_0 \quad (3.10)$$

mit der Anfangsabweichung  $\delta\vec{z}_0 = \delta\vec{z}(t=0)$ . Mithilfe der Eigenvektoren  $\vec{a}_i$  der Matrix  $A$  (d.h.  $A\vec{a}_i = \lambda_i\vec{a}_i$ ), die bei Diagonalisierbarkeit von  $A$  den  $\mathbb{C}^n$  aufspannen, können wir  $\delta\vec{z}_0$  wie folgt darstellen:

$$\delta\vec{z}_0 = \sum_i c_i \vec{a}_i$$

Dabei ergeben sich die  $c_i$  aus den Anfangsbedingungen. Da  $A^n \vec{a}_i = \lambda_i^n \vec{a}_i$  folgt aus Gl. (3.10)

$$\delta\vec{z}(t) = e^{At} \sum_i c_i \vec{a}_i = \sum_i c_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \vec{a}_i = \sum_i c_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_i^n \vec{a}_i = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \vec{a}_i$$

Im Beispiel des gedämpften harmonischen Oszillators finden wir mit  $z_1 = x$ ,  $z_2 = \dot{x}/\alpha$ ,  $\dot{z}_1 = \alpha z_2$ ,  $\dot{z}_2 = -\alpha z_1 - 2\beta z_2$  nach Gl. (3.9)

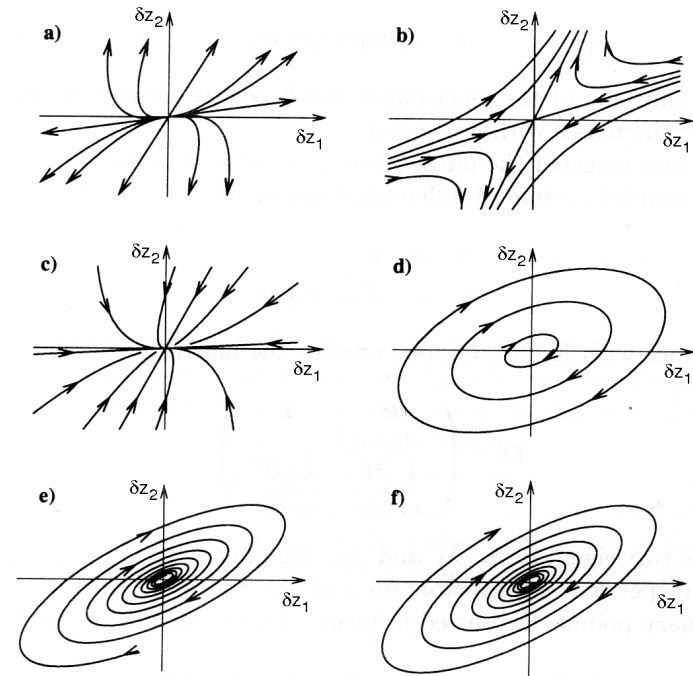
$$G(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \alpha z_2 \\ -\alpha z_1 - 2\beta z_2 \end{pmatrix} \implies A = (A_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_i}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$$

und mit den schon bekannten Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  (siehe Gl. (3.4))

$$\delta\vec{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{a}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{a}_2$$

Da  $A$  reell ist, sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  entweder beide reell oder beide komplex konjugiert, und wir können die Stabilität der Lösung  $\vec{z}(t)$  anhand der sechs Fälle in Abb. 3.3 diskutieren:

- $\lambda_1 > 0$  und  $\lambda_2 > 0$ :  $|\delta\vec{z}(t)|$  wächst unbegrenzt;  $\vec{z}$  ist ein abstoßender Punkt (Repellor).
- $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ : für  $c_1 \neq 0$  wächst die Abweichung  $|\delta\vec{z}(t)|$ , für  $c_1 = 0$  verschwindet sie ( $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$ );  $\vec{z}$  ist ein Sattelpunkt.
- $\lambda_1 < 0$  und  $\lambda_2 < 0$ :  $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$ ;  $\vec{z}$  ist ein anziehender Punkt (Attraktor).
- $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  imaginär ( $\lambda_1 = \lambda_2^*$ ):  $|\delta\vec{z}(t)|$  ist beschränkt;  $\vec{z}$  ist ein elliptischer Punkt.



**Abbildung 3.3:** Zeitentwicklung der Abweichung  $\delta\vec{z}(t)$  für verschiedene Werte der Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$ .

e)  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind komplex konjugiert,  $\text{Re } \lambda_i < 0$ :  $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$ ;  $\vec{z}$  ist Attraktor eines Spiralfusses von  $\delta\vec{z}(t)$ .

f)  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind komplex konjugiert,  $\text{Re } \lambda_i > 0$ :  $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow \infty$ ;  $\vec{z}$  ist Repellor eines Spiralfusses von  $\delta\vec{z}(t)$ .

### 3.3 Spektralzerlegung

Mit dem Ansatz  $\vec{z}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$  ( $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ ) findet man die Eigenschwingungen des autonomen Systems  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ . Die Lösungen des resultierenden Eigenwertproblems,  $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$  (in  $\mathbb{C}^n$ ) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\det(A - \lambda I) = 0$  gegeben.

Falls die Eigenvektoren  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) den ganzen  $\mathbb{C}^n$  aufspannen, dann ist

jede Lösung von  $\dot{\vec{z}} = \mathbf{A}\vec{z}$  eine Linearkombination von Eigenschwingungen. Die Matrix  $\mathbf{A}$  heißt dann *diagonalisierbar*, da  $\mathbf{A}$  in einer Basis von Eigenvektoren  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  diagonal ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \dots \lambda_n = \text{Eigenwerte}).$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn das charakteristische Polynom  $n$  verschiedene Wurzeln hat, also alle  $\lambda_i$  paarweise voneinander verschieden sind. Definieren wir nun einen Projektionsoperator  $P_\lambda$  (Matrix) als lineare Abbildung  $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ , die die Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  invariant lässt und alle anderen annulliert:

$$P_\lambda \vec{a}_\mu = \begin{cases} \vec{a}_\lambda, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Dann hat die diagonalisierbare Matrix  $\mathbf{A}$  die *Spektralzerlegung*

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} \lambda P_\lambda \quad (3.11)$$

wobei  $\sigma(\mathbf{A})$  die Menge der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  ist (trivial:  $\mathbf{A}\vec{a}_\lambda = \lambda\vec{a}_\lambda$ ). Die Projektionsoperatoren  $P_\lambda$  haben folgende Eigenschaften:

$$P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda, \quad \mathbf{A}P_\lambda = P_\lambda \mathbf{A} = \lambda P_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \sigma} P_\lambda = \mathbf{1}. \quad (3.12)$$

### Beispiel

Eine  $3 \times 3$  Matrix hat die diagonale Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + \lambda_3 P_{\lambda_3}$$

mit den Projektoren

$$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anhand dieses Beispiels kann man die allgemeinen Eigenschaften von Gl. (3.12) leicht verifizieren.

### Gedämpfter harmonischer Oszillator

Im Falle des gedämpften harmonischen Oszillators sind die Eigenvektoren  $\vec{a}_i = (1, \lambda_i/\alpha)$ , ( $i = 1, 2$ ) linear unabhängig, solange  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , also für  $\alpha \neq \beta$ . In diesem Fall hat die Lösung die Form

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei sich  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  durch die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0)$  und  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  ausdrücken lassen (vergl. (3.6)).

Für  $\alpha = \beta$  fallen nicht nur die beiden Eigenwerte zusammen,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , sondern nach (3.5) auch die Eigenvektoren,  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$ , und  $\mathbf{A}$  ist nicht mehr diagonalisierbar. Die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  lässt sich dennoch durch den Grenzübergang  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  gewinnen:

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{\alpha=\beta} = \mathbf{x}(0) (1 + \beta t) e^{-\beta t} + \dot{\mathbf{x}}(0) t e^{-\beta t}$$

### Dissipation

Allgemein gilt für den Dämpfungsexponenten  $\text{Re } \lambda$

$$\text{Re } \lambda = \begin{cases} -\beta, & 0 \leq \beta \leq \alpha \\ -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \beta > \alpha \geq 0 \end{cases}$$

also immer  $\text{Re } \lambda \leq 0$ . Die Ursache für die Dämpfung ist der dissipative Term  $-\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}$  in der Differentialgleichung, dessen Leistung stets negativ ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{f}{2} \mathbf{x}^2 \right) &= m\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} + f\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(-f\mathbf{x} - \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}) + f\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Die Energie  $\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{f}{2}\mathbf{x}^2$  ist also nicht erhalten, sie nimmt kontinuierlich ab, sie wird *dissipiert*. (In Wirklichkeit geht die Energie nicht verloren, sie wird nur auf ein anderes System übertragen, das in der Beschreibung (3.7) nicht mitgenommen wurde.) Allgemein heißt ein System  $\dot{\vec{z}} = \mathbf{A}\vec{z}$  *dissipativ* falls es eine positiv definite quadratische Form  $(\vec{z}, \vec{z})$  gibt, die nie zunehmen kann:

$$\frac{d}{dt} (\vec{z}, \vec{z}) = (\mathbf{A}\vec{z}, \vec{z}) + (\vec{z}, \mathbf{A}\vec{z}) \leq 0, \quad (3.13)$$

für alle  $\vec{z}$ . Dies schließt unbeschränkt wachsende Lösungen aus, also muss  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  sein, für alle  $\lambda \in \sigma$ . In diesem Fall ist die Lösung  $\mathbf{x}^0(\mathbf{t})$ , um die die ursprüngliche Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$  linearisiert wurde, stabil. In der Sprache der Stabilitätsanalyse bezeichnet man  $\lambda$  auch als *Liapunov-Exponenten*.

Falls  $(\vec{z}, \vec{z})$  sogar eine Erhaltungsgröße ist, so ist  $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}$  (in dieser Metrik) eine 1-parametrische Gruppe von Drehungen des  $\mathbb{R}^n$ . Nach (3.13) ist  $\mathbf{A}$  antisymmetrisch und daher (in  $\mathbb{C}^n$ ) stets diagonalisierbar. Mit  $\mathbf{A}$  ist auch  $-\mathbf{A}$  konservativ, also sind alle Eigenwerte rein imaginär.

### 3.4 Erzwungene Schwingungen

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\vec{z}(\mathbf{t}) + \vec{b}(\mathbf{t})$$

ist durch die Duhamel-Formel

$$\vec{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{s})\vec{z}(\mathbf{s}) + \int_{\mathbf{s}}^{\mathbf{t}} d\tau \mathbf{P}(\mathbf{t}, \tau) \vec{b}(\tau) \quad (3.14)$$

gegeben, wobei  $\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$  der Propagator des homogenen Systems ist. Für eine harmonische Anregung

$$\vec{b}(\mathbf{t}) = \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}} \quad (\vec{b} \in \mathbb{C}^n)$$

erhält man als Lösung

$$\vec{z}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{a}(\omega)] + e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega), \quad (3.15)$$

mit (Achtung: Reihenfolge der Matrizen!)

$$\vec{a}(\omega) = (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \vec{b}.$$

Die Größe  $i\omega - \mathbf{A}$  ist eine Matrix und sollte als  $i\omega \mathbf{1} - \mathbf{A}$  gelesen werden. Die Invertierbarkeit von  $i\omega - \mathbf{A}$  setzt  $i\omega \notin \sigma(\mathbf{A})$  voraus. Man kann Gl. (3.15) entweder aus der Duhamel-Formel gewinnen oder direkt verifizieren, was wir nun machen wollen. Die Anfangsbedingung  $\vec{z}(\mathbf{t} = 0) = \vec{z}(0)$  ist offensichtlich von Gl. (3.15) erfüllt. Ferner gilt

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{a}(\omega)] + i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A} \underbrace{(e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{a}(\omega)] + e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega))}_{=\vec{z}(\mathbf{t})} + \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}} \\ &\quad + \underbrace{(i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega) - \mathbf{A} e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega) - \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}})}_{=0} \\ &= \mathbf{A} \vec{z}(\mathbf{t}) + \vec{b}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

mit  $\vec{b}(\mathbf{t}) = \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}}$  (nach Voraussetzung) da der Term

$$\begin{aligned} i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega) - \mathbf{A} e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega) - \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}} &= e^{i\omega \mathbf{t}} (i\omega - \mathbf{A}) \vec{a}(\omega) - \vec{b} e^{i\omega \mathbf{t}} \\ &= e^{i\omega \mathbf{t}} [(i\omega - \mathbf{A}) (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \vec{b} - \vec{b}] = e^{i\omega \mathbf{t}} [\vec{b} - \vec{b}] = 0 \end{aligned}$$

verschwindet.

#### Beispiel

Für den gedämpften harmonischen Oszillator ist

$$\begin{aligned} i\omega - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} i\omega & -\alpha \\ \alpha & i\omega + 2\beta \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{i\omega - \mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \frac{1}{i\omega(i\omega + 2\beta) + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Für  $\beta > 0$  verschwindet der erste Term in (3.15) für große Zeiten ( $\mathbf{t} \rightarrow \infty$ , Einschwingvorgang) und es bleibt nur die erzwungene Schwingung übrig. Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{z}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t} \rightarrow \infty}^{\beta > 0} &= e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{a}(\omega) = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{1}{i\omega - \mathbf{A}} \vec{b}, \\ \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{t}) \\ z_2(\mathbf{t}) \end{pmatrix} &= \frac{e^{i\omega \mathbf{t}}}{i\omega(i\omega + 2\beta) + \alpha^2} \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also, z.B. für  $b_2 = 0$  (keine Kopplung der treibenden Kraft an  $\dot{x}/\alpha$ , nur an den Ort)

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \alpha^2} b_1 = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} b_1.$$

Dabei ist (wie erwartet)  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  für  $\alpha > \beta$ , es gibt also *Resonanzen* für  $\omega = \pm \tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ , da bei schwacher Dämpfung  $\beta$  für diese Anregungsfrequenzen  $\omega$  die Amplitude von  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  sehr groß werden kann.

## Resonanzen

Allgemein (also nicht nur für den eindimensionalen Oszillator) gilt: Wenn  $\mathbf{A}$  strikt dissipativ ist, also  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , für alle Eigenwerte  $\lambda$ , so ist der erste Term in (3.15) exponentiell abklingend und nach dem *Einschwingvorgang* bleibt für  $t \rightarrow \infty$  nur noch die erzwungene Schwingung

$$\mathbf{z}(t) = e^{i\omega t} \vec{\mathbf{a}}(\omega)$$

übrig. Der Frequenzverlauf der Amplitude  $\vec{\mathbf{a}}(\omega)$  zeigt typische Resonanzen. Falls  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar ist, so ist nach Gl. (3.11)

$$(i\omega - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{\mathbf{P}_\lambda}{i\omega - \lambda},$$

denn  $i\omega - \mathbf{A} = i\omega \mathbf{1} - \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} \lambda \mathbf{P}_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} (i\omega - \lambda) \mathbf{P}_\lambda$ , d.h.  $i\omega - \lambda$  sind die Eigenwerte von  $i\omega - \mathbf{A}$ , und die Eigenwerte eines Matrixinversen sind die Inversen der Eigenwerte. Es gilt

$$(i\omega - \mathbf{A})^{-1} (i\omega - \mathbf{A}) = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{\mathbf{P}_\lambda (i\omega - \lambda)}{i\omega - \lambda} = \sum_{\lambda \in \sigma} \mathbf{P}_\lambda = \mathbf{1}.$$

Für Anregungsfrequenzen  $i\omega$  nahe einer Resonanz  $\lambda_0$  dominiert der entsprechende Term und die erzwungene Schwingung wird durch die Anregung einer einzigen Eigenmode dominiert:

$$\mathbf{z}(t) \Big|_{\omega \approx \lambda_0} = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - \lambda_0} \mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}} \equiv \frac{1}{\gamma} e^{i(\omega t - \delta)} \mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}}.$$

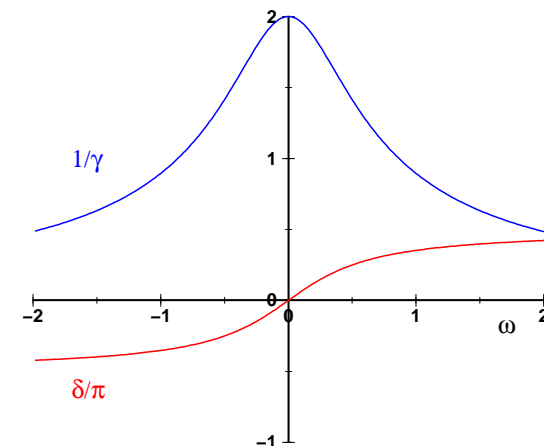
Hier haben wir komplexe Größe  $i\omega - \lambda_0 \equiv \gamma e^{i\delta}$  in Polarkoordinaten geschrieben. Für die Phase  $\delta$  und die Amplitude  $1/\gamma$  findet man für den Fall einer schwach gedämpften Schwingung,  $\lambda_0 = -\beta + i\tilde{\omega}$ ,

$$\frac{1}{i\omega - \lambda_0} = \frac{1}{i(\omega - \tilde{\omega}) + \beta} = \frac{-i(\omega - \tilde{\omega}) + \beta}{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2} = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2}},$$

also

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2}; \quad \delta = \arctan \frac{\omega - \tilde{\omega}}{\beta}.$$

Aus der Breite der Resonanz kann man also die Zerfallskonstante  $\beta$  der resonanten Eigenschwingung entnehmen. Für einen rein imaginären Eigenwert,  $\lambda_0 = i\tilde{\omega}$  divergiert  $\vec{\mathbf{a}}(\omega)$ . Natürlich kann es vorkommen, dass  $\mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}} = 0$  ist, dann ist diese Resonanz nicht durch die äußere Störung  $e^{i\omega t} \vec{\mathbf{b}}$  anregbar.



**Abbildung 3.4:** Verlauf der Amplitude  $1/\gamma$  und der Phase  $\delta$  durch die Resonanz  $\tilde{\omega} = 0$  einer erzwungenen Schwingung (mit  $\beta = 0.5$ ).

## 3.5 Fourierzerlegung

Wir betrachten eine lineare Kette von  $N$  Massenpunkten, je mit Masse  $m$ , die durch Federn mit der Federkonstante  $f$  verbunden sind. Die Auslenkungen aus den Ruhelagen der Massenpunkte bezeichnen wir mit  $x_0(t) \dots x_{N-1}(t)$ . Die Kette soll sich schließen, also  $x_0(t) \equiv x_{N-1}(t)$ .

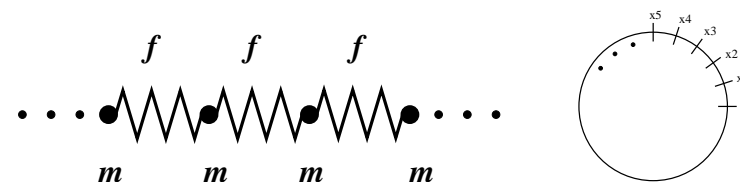
Die Bewegungsgleichungen lauten für  $n = 0 \dots (N-1)$

$$m\ddot{x}_n = f(x_{n+1} - x_n) + f(x_{n-1} - x_n) = f(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n). \quad (3.16)$$

Wir finden als Lösung laufende Wellen der Form

$$x_n(t) = e^{i\omega t} e^{-ikn}. \quad (3.17)$$

Wegen der Randbedingung sind nicht alle Werte für den Wellenvektor  $k$  zu-



**Abbildung 3.5:** Illustration einer Kette von Massenpunkten  $m$ , die untereinander mit Federn der Federkonstante  $f$  verbunden sind. Die unendlich lange Kette kann man sich auch als Ring mit periodischen Randbedingungen vorstellen.

gelassen, denn es muss

$$x_0(t) = x_N(t), \quad 1 = e^{-ik0} = e^{-ikN}$$

gelten. Das bedeutet aber  $1 = e^{ikN} = \cos kN + i \sin kN$ , was durch die  $k$ -Werte  $k_0 = 0, k_1 = 2\pi/N, k_2 = 4\pi/N, \dots, k_{N-1} = (N-1)\pi/N$  erfüllt wird. Die erlaubten Werte von  $k$  sind also ganze Vielfache von  $2\pi/N$ ,

$$k = \frac{2\pi}{N} l, \quad (l = 0, 1 \dots (N-1)),$$

da größere Werte von  $l$  zu keinen neuen Funktionen führen ( $\exp[ik_1 n] = \exp[ik_2 n]$  für  $k_1 - k_2$  Vielfache von  $2\pi$ , denn mit  $k_1 - k_2 = m2\pi, m \in \mathbb{N}$  folgt  $k_2 = m2\pi - k_1$  und damit  $e^{ik_2 n} = e^{-imn2\pi} e^{ik_1 n} = e^{ik_1 n}$ ). Wir setzen nun den Ansatz (3.17) in die Bewegungsgleichung (3.16) ein:

$$m(i\omega)^2 e^{i\omega t} e^{-ikn} = f \left[ e^{-ik(n+1)} + e^{-ik(n-1)} - 2e^{-ikn} \right] e^{i\omega t},$$

$$m(i\omega)^2 = f \left[ e^{-ik} + e^{ik} - 2 \right] = f \left[ 2 \cos k - 2 \right],$$

$$\omega^2 = \frac{f}{m} 2 \left[ 1 - \cos^2 \frac{k}{2} + \sin^2 \frac{k}{2} \right] = 4 \frac{f}{m} \sin^2 \frac{k}{2}.$$

wobei wir das Additionstheorem für den Kosinus in der Form  $\cos \alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$  verwendet haben. Also finden wir für die *Dispersionsrelation*  $\omega(k)$  der elastischen Wellen (Schallwellen) mit der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$ :

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{f}{m}} \left| \sin \frac{k}{2} \right|, \quad k = \frac{2\pi}{N} (0 \dots (N-1)).$$

Allgemein versteht man unter einer Dispersionsrelation den Zusammenhang zwischen Frequenz  $\omega$  oder Energie  $E$  und Wellenvektor  $k$  oder Impuls  $p$ .

Wir können nun eine Beziehung zum Eigenwertproblem herstellen. Lässt man die räumliche Abhängigkeit der Lösung offen und macht man nur einen harmonischen Ansatz für den zeitlichen Teil der Lösung, also

$$x_n(t) = e^{i\omega t} x_n,$$

so erhält man eine *zeitunabhängige Bewegungsgleichung* für die  $x_n$ ,

$$\omega^2 x_n = -\frac{f}{m} \left[ x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n \right]$$

die man mit  $\vec{x} = (x_0 \dots x_{N-1})$  auch in Matrixform

$$\omega^2 \vec{x} = -A \vec{x}, \quad A = \frac{f}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & \\ & & & & \ddots \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

schreiben kann. Mit anderen Worten ist die gesuchte Lösung  $\vec{x}$  ein Eigenvektor zu der symmetrischen Matrix  $A$ . Die respektiven Eigenwerte  $\lambda = \omega^2$  bestimmen damit die Frequenz  $\omega$ . Wir wissen schon, dass die normierten Eigenvektoren  $\vec{x}(k)$  durch

$$\vec{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( 1, e^{ik}, e^{2ik}, e^{3ik}, \dots, e^{(N-1)ik} \right)$$

gegeben sind, mit  $\lambda = \omega^2 = 4 \frac{f}{m} \sin^2 \frac{k}{2}$ . Hieraus schließen wir, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, und damit auch zu verschiedenen  $k$ -Werten, orthogonal sind, wie man auch direkt nachprüfen kann, indem man das Skalarprodukt

$$(\vec{x}(k)|\vec{x}(p)) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^*(k) x_n(p)$$

ausrechnet:

$$(\vec{x}(k)|\vec{x}(p)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k-p)n} = \begin{cases} 1, & k = p \\ \frac{e^{i(k-p)N} - 1}{e^{i(k-p)} - 1} = 0, & k \neq p \end{cases}$$

da  $(k-p)N = \frac{2\pi}{N}(l_k - l_p)N$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  ist, und somit  $\exp[i(k-p)N] = 1$ . Wir haben die Beziehung  $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = (q^N - 1)/(q - 1)$  mit  $q = e^{i(k-p)}$  für die Partialsumme der geometrischen Reihe verwendet. Wir haben also die Orthogonalitätsrelationen

$$(\vec{x}(k)|\vec{x}(p)) = \delta_{k,p} \tag{3.18}$$

gefunden, und mit

$$\delta_{k,p} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k-p)n} \tag{3.19}$$



eine Darstellung der Dirac'schen Delta-Funktion. Da alle  $N$  Eigenvektoren  $\vec{x}(k)$  orthogonal sind, sind sie auch vollständig, bilden also im  $\mathbb{C}^N$  eine orthonormierte Basis. Somit lässt sich jeder Vektor  $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$ , d.h. eine beliebige Auslenkung der ganzen Kette von Massenpunkten, in dieser Basis darstellen, mit Entwicklungskoeffizienten  $y_k \equiv y(k)$ :

$$\vec{y} = \sum_{l=0}^{N-1} y_l \vec{x}(l), \quad k = \frac{2\pi}{N}l.$$

In Komponenten haben wir

$$y_n = \sum_{l=0}^{N-1} y_l x_n(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y_l \left(\frac{2\pi}{N}l\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}ln}$$

die Darstellung von  $y_n$  als (diskrete) *Fourierreihe*. Diese Fourierreihe kann man auch umdrehen und man findet mit der Darstellung (3.19) der Dirac'schen Deltafunktion

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Diese Überlegungen lassen sich auch auf schwingende Systeme verallgemeinern, die nicht aus diskreten Massepunkten sondern aus einem Kontinuum aufgebaut sind (schwingende Saite, Trommel, ...). Die entsprechenden Eigenschwingungen bilden dann wieder eine vollständige Basis.

## 4. Lagrange-Formalismus

### 4.0 Einführung

Ziel ist es, einen einfachen Zugang zu komplizierten mechanischen Systemen zu entwickeln. Nach einer etwas komplizierten Herleitung wird sich der Lagrange-Formalismus als sehr einfach in der Anwendung zeigen. Zudem erlaubt er, einige tiefere Zusammenhänge mit Symmetrieüberlegungen aufzuzeigen.

### 4.1 Zwangsbedingungen

In physikalischen Problemen sind uns häufig nicht nur Kräfte, die auf Teilchen oder Körper wirken, gegeben, sondern auch Bedingungen, die deren Bahn erfüllen müssen; diese Bedingungen reduziert die Zahl der *Freiheitsgrade* des Systems: Ein System mit  $f$  *Freiheitsgraden* besteht aus  $N$  Teilchen, deren mögliche Konfigurationen  $\mathbf{x} = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$  zur Zeit  $t$  durch  $f$  unabhängige Lagekoordinaten  $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_f)$  ( $\equiv$ generalisierte Koordinaten) beschreibbar sind ( $\equiv$ Definition von Freiheitsgraden):

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1 \dots q_f, t) \quad (i = 1 \dots N). \quad (4.1)$$

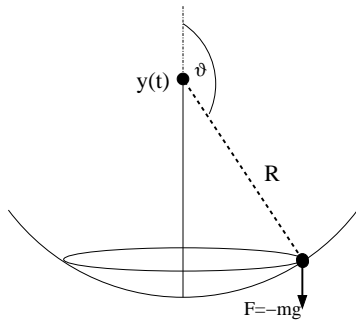
Die Komponenten der  $\vec{x}_i$  sind nicht unabhängig voneinander, die generalisierten Koordinaten  $q_\alpha$  aber schon. Man kann sagen, dass die Zwangsbedingungen die Bewegung behindern bzw. einschränken.

### Beispiel 1: Sphärisches Pendel

Sphärisches Pendel mit fester Seillänge  $R$  und mit vorgegebenem beweglichen Aufhängepunkt  $\vec{y}(t)$  (siehe Abb. 4.1).

$$\vec{x}(t) = \vec{y}(t) + R\vec{e}(t),$$

wobei  $\vec{e}(t)$  über die Einheitskugel variieren kann, auf der man z.B. die Polarkoordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$  als Lagekoordinaten benutzen kann ( $f = 2$ ). (Notation:  $\vec{e}$  steht für einen Einheitsvektor.)



**Abbildung 4.1:** Das sphärische Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt.

### Beispiel 2: Geführte Bewegung

Teilchen im Schwerfeld auf einer festen Bahn (Achterbahn, siehe Abb. 4.2). Die Bewegung ist festgelegt durch zwei *Zwangsbedingungen*

$$y = 0; \quad f(x, z) = 0.$$

Also bleibt nur ein Freiheitsgrad übrig ( $f = 1$ ).

Die Zwangsbedingungen üben auf das Teilchen sogenannte *Zwangskräfte* aus, die für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen. Wir verfolgen jetzt das Ziel, diese nicht explizit bekannten Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren.

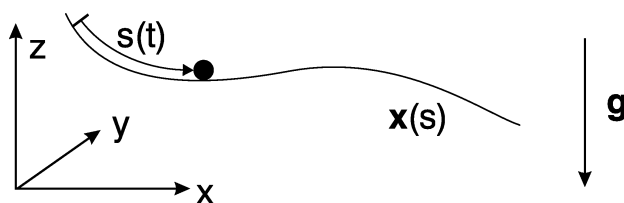
### Virtuelle Verschiebungen

*Virtuelle Verschiebungen* (auch *virtuelle Verrückungen* genannt) zur Zeit  $t$  sind kleine Änderungen der Koordinaten, die mit den Zwangsbedingungen vereinbar sind. Beim sphärischen Pendel wäre dies eine Auslenkung der Winkel (bei konstantem  $r = R$ ):

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r, \vartheta + \delta\vartheta, \varphi + \delta\varphi).$$

Bei der Achterbahn wäre dies eine Änderung der Koordinaten  $(x, y, z)$  mit

$$(x, 0, z) \mapsto (x + \delta x, 0, z + \delta z)$$



**Abbildung 4.2:** Die Achterbahn ist mathematisch äquivalent zum geführten Fall auf einer Schiene.

mit

$$f(x, z) = 0, \quad \text{und} \quad f(x + \delta x, z + \delta z) = 0.$$

Es ist klar, dass im letzteren Falle die *virtuellen Verschiebungen*  $\delta x$  und  $\delta z$  nicht voneinander unabhängig sein können. Per Definition sind jedoch die generalisierten Koordinaten  $(q_1 \dots q_f)$  voneinander unabhängig (Freiheitsgrade). Damit ist jede Verschiebung der Form

$$\delta \vec{x}_i = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i(q, t)}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (4.2)$$

für alle  $\{\delta q_\alpha\}$  eine zulässige virtuelle Verschiebung. Die Bezeichnung *virtuell* besagt hier, dass diese Verschiebung nicht durch die Dynamik (Bewegungsgleichungen) verursacht wird, sondern momentan (mit  $\delta t = 0$ ) als Gedankenexperiment geschieht. In anderen Worten, die  $\delta \vec{x}_i$  müssen mit dem tatsächlichen Ablauf der Bewegung nichts zu tun haben.

### Zwangskräfte

Die *virtuelle Arbeit* ist durch

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_\alpha \underbrace{\left( \sum_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{F}_i \right)}_{Q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (4.3)$$

gegeben, wobei  $\vec{F}_i$  die augenblickliche Kraft auf das Teilchen  $i$  ist. Die

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha}$$

sind die generalisierten Kräfte. Da die generalisierten Koordinaten nicht notwendig die Dimension Länge haben, haben die zugehörigen generalisierten Kräfte nicht immer die Dimension der Kraft; allerdings gilt immer  $[Q_\alpha q_\alpha] = [\text{Energie}]$ , d.h. das Produkt aus generalisierter Koordinate und zugehöriger Kraft hat die Dimension Energie. *Zwangskräfte* sind per Definition Kräfte, die keine virtuelle Arbeit leisten, da virtuelle Verschiebungen in Richtung einer Zwangskraft per Definition nicht möglich sind. In Beispiel 1 ist die Fadenspannung eine Zwangskraft, in Beispiel 2 die Kräfte, die das Teilchen auf der vorgegebenen Bahn halten.

Zwangskräfte können a priori nicht angegeben werden, da sie als *Reaktionskräfte* auf die Bewegung des Systems entstehen. Es ist daher wichtig, Bewegungsgleichungen für Systeme mit Zwangsbedingungen zu finden, in denen

die Zwangskräfte gar nicht erst vorkommen. Solche Bewegungsgleichungen sind die Lagrange-Gleichungen für den Fall von Potentialkräften bzw. die d'Alembert'schen Gleichungen im allgemeinen Fall.

## 4.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wirkt auf das Teilchen  $i$  die Kraft  $\vec{F}_i$ , die sich aus

$$\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

der Zwangskraft  $\vec{Z}_i$  und der dynamischen Kraft  $\vec{K}_i$  zusammensetzt. Nur die dynamische Kraft trägt zur Bewegung (Beschleunigung) des Teilchens bei. Ziel ist es, die Zwangskräfte aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

zu eliminieren. Hierfür benutzen wir das *Prinzip der virtuellen Arbeit*, das besagt, dass

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0 \quad (i = 1 \dots N),$$

d.h. die Zwangskräfte verrichten keine Arbeit. Infolgedessen enthält die virtuelle Arbeit (Gl. (4.3))

$$\delta A = \sum_i (\vec{K}_i + \vec{Z}_i) \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_i \vec{K}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha$$

keine Zwangskräfte, was wir im folgenden verwenden werden.

Wir gehen von den Newton'schen Bewegungsgleichungen aus und multiplizieren sie mit zulässigen virtuellen Verschiebungen  $\delta \vec{x}_i$ . Wir erhalten so das *d'Alembert'sche Prinzip*

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{x}_i = 0, \quad (4.4)$$

das wir nun auf verallgemeinerte Koordinaten transformieren wollen.

### Generalisierte Koordinaten

Ziel ist es, aus Gl. (4.4) einen Ausdruck der Form

$$\sum_\alpha g_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \delta q_\alpha = 0 \quad (4.5)$$

zu erhalten. Da alle  $\delta q_\alpha$  zulässige virtuelle Verschiebungen sind (z.B. auch  $\delta q_1 \neq 0, \delta q_\beta = 0$  für  $\beta = 2 \dots f$ ), muss dann jeder einzelne Summand in Gl. (4.5) verschwinden und aus Gl. (4.5) könnten wir dann sofort folgern

$$g_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, f). \quad (4.6)$$

Dies wären dann die gewünschten  $f$  unabhängigen Bewegungsgleichungen für unsere  $f$  Freiheitsgrade.

Für die Transformation auf generalisierte Koordinaten verwenden wir

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha$$

(Definition der verallgemeinerten Kräfte  $Q_\alpha$ ) und

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_\alpha \left( \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha.$$

Das d'Alembert'sche Prinzip Gl. (4.4) wird somit zu

$$\sum_\alpha \left( \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0. \quad (4.7)$$

Hieraus könnten wir sofort die Bewegungsgleichungen

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1 \dots f) \quad (4.8)$$

ablesen. Dieses Ergebnis befriedigt uns jedoch noch nicht und in der Tat kann man die Bewegungsgleichungen auf eine schönere Form bringen. Man kann zeigen (kommt gleich), dass

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \quad (4.9)$$

ist, wobei

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

die kinetische Energie (in generalisierten Koordinaten) ist. Damit werden Gl. (4.8) zu den *d'Alembertschen Gleichungen*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0} \quad (\alpha = 1 \dots f). \quad (4.10)$$

Diese Bewegungsgleichungen sind nun schon sehr viel nützlicher, da es häufig leicht ist, die kinetische Energie in generalisierten Koordinaten anzugeben.

Es bleibt Gl. (4.9) herzuleiten. Wir setzen dabei voraus, dass die Transformationen  $\vec{x}_i = \vec{x}_i(\mathbf{q}_\alpha)$  stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Wir beginnen mit der rechten Seite und verwenden  $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha}$$

Wir verwenden nun

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \quad \text{wegen} \quad \frac{d}{dt} \vec{x}_i = \dot{\vec{x}}_i = \sum_{\beta=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \mathbf{q}_\beta} \dot{\mathbf{q}}_\beta + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \vec{x}_i = \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha}$$

und erhalten somit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = \sum_i m_i \left( \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} + \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha},$$

also Gl. (4.9) mit  $\dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ .

### 4.3 Lagrange-Funktion

Die d'Alembert'schen Gleichungen (4.10) gelten allgemein, auch für Kräfte, die kein Potential haben. Für den Fall von Potentialkräften,

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1 \dots f), \quad (4.11)$$

können wir die *Lagrange-Funktion*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

definieren, und die d'Alembert'schen Gleichungen werden dann zu den *Lagrange-Gleichungen*: Dazu ergänzen wir im ersten Term von Gl. (4.10) ein  $V$ , das ja bei Potentialkräften nicht von  $\dot{\mathbf{q}}$  abhängt, und finden mit Gl. (4.11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = 0,$$

und damit die Lagrange-Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = 0} \quad (\alpha = 1 \dots f). \quad (4.12)$$

Jedes System, das in dieser Weise durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden kann, heißt ein *Lagrange'sches System*.

### Verallgemeinerter Impuls

Die Lagrange-Gleichungen (4.12) legen nahe, dass es sinnvoll ist, zu jeder verallgemeinerten Koordinate  $\mathbf{q}_\alpha$  einen *verallgemeinerten Impuls*  $\mathbf{p}_\alpha$  via

$$\boxed{\mathbf{p}_\alpha \equiv \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha}}$$

zu definieren, denn dann kann man die Lagrange-Gleichungen in der Form  $\dot{\mathbf{p}}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha}$  schreiben. Der verallgemeinerte Impuls  $\mathbf{p}_\alpha$  heißt auch (zu  $\mathbf{q}_\alpha$ ) *konjugierter Impuls*. Natürlich sind die Lagrange-Gleichungen bei Wegfall von Zwangsbedingungen mit den Newton'schen Gleichungen identisch.

### Beispiel: Sphärisches Pendel

Sphärisches Pendel (Aufhängepunkt fest) im Schwerfeld. Die beiden generalisierten Koordinaten sind  $\varphi$  und  $\vartheta$ , die Lagrange-Funktion

$$L(\varphi, \vartheta; \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) - mgR \cos \vartheta$$

kann man unter Verwendung der Transformationsgleichungen

$$\mathbf{x} = R \cos \varphi \sin \vartheta, \quad \mathbf{y} = R \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \mathbf{z} = R \cos \vartheta$$

aus  $L = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{x}}^2 + \dot{\mathbf{y}}^2 + \dot{\mathbf{z}}^2) - mgz$  herleiten. Die beiden Lagrange-Gleichungen lauten demnach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0.$$

### Beispiel: Geladenes Teilchen

Für ein geladenes Teilchen (mit Ladung  $e$ ) in einem äußeren elektrischen und magnetischen Feld sind die Kräfte keine Potentialkräfte. Trotzdem gibt

es eine Lagrange-Funktion:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e \left( \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right). \quad (4.13)$$

Dabei sind  $\phi(\vec{x}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  die elektromagnetischen Potentiale und

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}; \quad \vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

die Komponenten des elektromagnetischen Feldes. (Bemerkung: Die Möglichkeit  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  so darzustellen wird durch die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen  $\text{div} \vec{B} = 0$  und  $\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  gegeben, siehe Elektrodynamik.)

Die zu Gl. (4.13) gehörenden Lagrange-Gleichungen lauten ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m \dot{x}_k + \frac{e}{c} A_k \right) &= m \ddot{x}_k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{e}{c} \sum_i \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \dot{x}_i \\ &= -e \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

oder

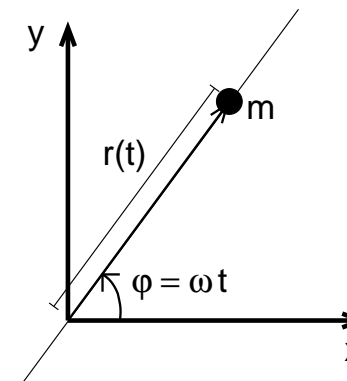
$$m \ddot{x}_k = e \underbrace{\left( -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right)}_{E_k} + \frac{e}{c} \sum_i \dot{x}_i \underbrace{\left( \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right)}_{(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_k},$$

was genau der Lorentz-Kraft (siehe Kap. 1.4) entspricht.

### Allgemeine Vorgehensweise beim Lagrange-Formalismus

Bei der Beschreibung eines mechanischen Systems mithilfe des Lagrange-Formalismus können wir in der Regel folgendermaßen vorgehen:

1. Zwangsbedingungen formulieren (oft einfach in kartesischen Koordinaten).
2. Generalisierte Koordinaten festlegen (d.h. Transformationsgleichungen von generalisierten zu kartesischen Koordinaten bestimmen).
3. Lagrangefunktion  $L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$  aufstellen.
4. Lagrangegleichungen aufstellen und lösen.
5. Auf anschauliche Koordinaten zurücktransformieren und interpretieren.



**Abbildung 4.3:** Ein Massenpunkt ist beweglich an einer Stange befestigt, die mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert.

### Beispiel: Massenpunkt auf rotierender Stange

Ein Massenpunkt bewege sich radial auf einer rotierenden Stange,

$$x = r(t) \cos \omega t, \quad y = r(t) \sin \omega t, \quad z = 0,$$

in Abwesenheit eines externen Potentials (siehe Fig. 4.3). Die kinetische Energie schreibt sich in der generalisierten Koordinaten  $r$  als

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + \frac{m}{2} r^2 \omega^2 ((-\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2)$$

und die Lagrange-Funktion somit als

$$L(\dot{r}, r) = T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \omega^2.$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m \ddot{r} - m \omega^2 r = 0, \quad \ddot{r} = \omega^2 r,$$

mit der Lösung

$$r(t) = a_1 e^{\omega t} + a_2 e^{-\omega t}.$$

Wir finden also einen exponentiellen Verlauf.

**Frage:** Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit der Massenpunkt nicht nach außen geschleudert wird?

#### 4.4 Prinzip der kleinsten Wirkung

Als *Wirkung*  $I$  definiert man die zeitlich integrierte Lagrange-Funktion

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt. \quad (4.14)$$

Die Wirkung ist ein *Funktional* von  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ , da für jede Bahnkurve (physikalisch oder nicht)  $I[\mathbf{q}]$  einen anderen Wert hat. Ein Funktional ist eine Abbildung, die einer gegebenen Funktion  $\mathbf{q}(t)$  eine Zahl zuordnet. Man betrachte nun alle die Bahnkurven  $\mathbf{q}(t)$ , die *festen Randbedingungen* genügen, das heißt für die

$$\mathbf{q}(t^{(1)}) = \mathbf{q}^{(1)} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}(t^{(2)}) = \mathbf{q}^{(2)},$$

für feste  $\mathbf{q}^{(1)}$  und  $\mathbf{q}^{(2)}$  gilt. Man schreibt Gl. (4.14) dann auch symbolisch in der Form

$$I[\mathbf{q}] = \int_{(1)}^{(2)} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt,$$

wobei die Integralgrenzen die festen Randbedingungen andeuten sollen.

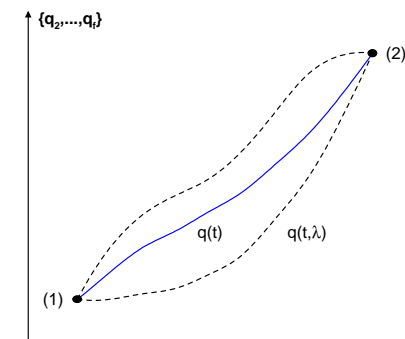
Wir können nun den Lagrange-Formalismus aus der folgenden Forderung ableiten:

##### Hamilton'sches Extremalprinzip

*Postulat:* Einem mechanischen System mit  $f$  Freiheitsgraden  $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_f\}$  sei eine  $C^2$ -Funktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  der Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  sowie der Zeit  $t$ , die Lagrange-Funktion, zugeordnet. Weiter sei eine physikalische Bahnkurve (d.h. eine Lösung der Bewegungsgleichungen) gegeben:  $\phi(t) = \{\phi_1(t), \dots, \phi_f(t)\}$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , die die Randbedingungen  $\phi(t_1) = \mathbf{a}$  und  $\phi(t_2) = \mathbf{b}$  erfüllt. Diese Bahnkurve macht die Wirkung  $I[\mathbf{q}] = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  extremal.

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung* (Hamilton'sches Extremalprinzip) besagt also, dass unter allen möglichen Bahnkurven  $\mathbf{q}(t)$  die physikalisch realisierte diejenige ist, die die Wirkung  $I[\mathbf{q}]$  minimiert (extremal macht). Hierbei ist als *physikalische Bahnkurve* diejenige definiert, die die Lagrange-Gleichungen erfüllt.

Für den Beweis ist die Variationsrechnung nötig, da man allgemein mit  $\delta I[\mathbf{q}]$  die Variation eines Funktionals bezeichnet, also die *Ableitung* von  $I[\mathbf{q}]$  nach



**Abbildung 4.4:** Variation der Bahn im Raum der verallgemeinerten Koordinaten.

der Bahnkurve  $\mathbf{q}(t)$ . Das Hamilton'sche Extremalprinzip besagt nun, dass

$$\delta I[\mathbf{q}(t)] = 0 \quad (4.15)$$

ist. Da man nicht gut nach  $\mathbf{q}(t)$  differenzieren kann, betrachtet man in der Variationsrechnung eine ein-parametrische Schar von Bahnkurven,

$$\mathbf{q}(t, \lambda)$$

wobei man die funktionale Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$  zu diesem Zeitpunkt offen lässt, um jede mögliche Bahnkurve mit  $\mathbf{q}(t, \lambda) = (q_1(t, \lambda), \dots, q_f(t, \lambda))$  beschreiben zu können. O.B.d.A. können wir jedoch annehmen, dass die physikalische Bahn für  $\lambda = 0$  realisiert wird. Damit wird das Hamilton'sche Prinzip (Gl. (4.15)) zu

$$\delta I[\mathbf{q}(t)] = 0 \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{d}{d\lambda} I[\mathbf{q}(t, \lambda)] \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (4.16)$$

einer einfachen Rechenaufgabe im Differenzieren bezüglich eines Parameters  $\lambda$ .

##### Variation

Wir führen die Variation nun aus.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \int_{(1)}^{(2)} L(\mathbf{q}(t, \lambda), \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t, \lambda), t) dt \Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \frac{\partial^2 q_{\alpha}}{\partial t \partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Bezeichnungen  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$  und  $\delta q_\alpha = \frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}$

$$0 = \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + p_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta q_\alpha \right),$$

und integrieren den zweiten Summanden partiell, um die Zeitableitung von  $\delta q_\alpha$  loszuwerden. Wir erhalten

$$0 = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} p_\alpha \right) \delta q_\alpha \quad (4.17)$$

Nun verschwindet wegen der festen Randbedingungen die Variation der Bahn an Anfangs/End-Punkt:

$$\delta q_\alpha(t^{(j)}) = \frac{d}{d\lambda} q_\alpha(t^{(j)}, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \equiv \frac{d}{d\lambda} q_\alpha^{(j)} \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Damit wird der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (4.17) zu Null. Wir erhalten also

$$0 = \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} p_\alpha \right) \delta q_\alpha$$

Ferner bemerken wir, dass wir bisher beliebige Variationen  $\delta q_\alpha(t)$  der Bahn zugelassen haben, die mit den Randbedingungen konsistent sind. Insbesondere könnten wir z.B.  $\delta q_1(t) = \delta(t-t_0)$  und  $\delta q_\beta(t) = 0$  für  $\beta = 2 \dots f$  wählen (mit  $t^{(1)} < t_0 < t^{(2)}$  beliebig und  $\delta(t-t_0)$  der Dirac'schen Delta-Funktion). Somit ist klar, dass die Klammer auf der rechten Seite von Gl. (4.17) für alle Zeiten  $t$  und alle  $\alpha = 1 \dots f$  separat verschwinden muss. Also erfüllt die ExtremalBahn die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1 \dots f),$$

die mit den Lagrange-Gleichungen (4.12) identisch sind.

### Äquivalenz-Transformationen

Aus dem Hamilton'schen Prinzip folgt unmittelbar, dass zwei Lagrange-Funktionen  $L$  und  $L'$  äquivalent sind, falls

$$L - L' = \frac{d}{dt} F(q, t)$$

ist, denn in diesem Fall unterscheiden sich die zugehörigen Wirkungen

$$I[q] - I'[q] = \int_{(1)}^{(2)} \frac{d}{dt} F(q, t) dt = F(q, t) \Big|_{(1)}^{(2)} = \text{const.}$$

nur durch eine Konstante, da die  $t^{(i)}$  und die  $q^{(i)} = q(t^{(i)})$  fest sind. Dann sind ihre Variationen  $\delta I[q] - \delta I'[q] = \delta(\text{const.}) = 0$  gleich. Nach dem Hamilton'schen Prinzip Gl. (4.15) führen somit äquivalente Lagrange-Funktionen auf identische Bewegungsgleichungen.

### Beispiel: Eichtransformation

Als Beispiel betrachten wir die Lagrange-Funktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das skalare Potential  $\phi$  sind nicht eindeutig bestimmt, da eine *Eichtransformation*

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\chi; \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht ändert ( $\chi = \chi(\vec{x}, t)$  beliebig). Da eine Eichtransformation die physikalischen elektromagnetischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht ändert, müssen die Lagrange-Funktionen vor und nach der Eichtransformation äquivalent sein:

$$L' = L + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \text{grad}\chi \right) = L + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}$$

wegen

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

d.h. die Lagrangefunktion wird um ein totales Zeitdifferential einer Funktion von  $q$  und  $t$  geändert. Also ist die Lagrangefunktion keine Messgröße, da sie nicht eindeutig ist.

### 4.5 Erhaltungssätze

Falls eine Koordinate  $q_\beta$  in  $L$  nicht vorkommt, so ist der dazugehörige verallgemeinerte Impuls  $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$  erhalten, denn nach den Lagrange-Gleichungen ist dann

$$\frac{d}{dt} p_\beta = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0. \quad (4.18)$$

$q_\beta$  heißt dann eine *zyklische Koordinate*. Jede zyklische Koordinate führt zu einem Erhaltungssatz; es ist also günstig, die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass möglichst viele zyklisch sind.

### Beispiel: Ebene Zentralkraft

Zum Beispiel ist

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

die Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten für das ebene Zentralkraftproblem. Da  $\phi$  in  $L$  nicht vorkommt, ist

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \quad (4.19)$$

erhalten:  $p_\phi$  ist der Drehimpuls.

Die Voraussetzung, dass  $L$  nicht von  $q_\beta$  abhängt, gilt aber nur in passend gewählten Lagekoordinaten. Im obigen Beispiel ist etwa die Drehimpulserhaltung in kartesischen Koordinaten ( $x, y, z = 0$ ) nicht evident, da dann die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2})$$

sowohl von  $x$  wie von  $y$  abhängt. Trotzdem sollte es möglich sein, die Drehimpulserhaltung auch in diesem Fall zu erhalten. Dies ist mittels Symmetrieüberlegungen möglich, wie im folgenden gezeigt werden wird.

### Beispiel: Symmetrietransformation

Falls die Lagrange-Funktion invariant unter einer Schar von Transformationen

$$\phi^\lambda : \begin{cases} q_\beta \mapsto q_\beta + \lambda \\ q_\alpha \mapsto q_\alpha \end{cases} \quad \text{für } \alpha \neq \beta \quad (4.20)$$

ist, dann ist  $L$  offensichtlich von  $q_\beta$  unabhängig ( $0 = \partial L / \partial \lambda \Leftrightarrow 0 = \partial L / \partial q_\beta$ ) und somit nach Gl. (4.18)  $p_\beta$  erhalten. Die Abbildung Gl. (4.20) können wir nun verallgemeinern.

### Flüsse und Vektorfelder

Wir kommen jetzt auf den Satz von Noether zurück, mit dem man die diversen Erhaltungssätze unter einem gemeinsamen Prinzip zusammenfassen kann. Dazu verwenden wir die Methode der Flüsse  $\phi^\lambda$ , die eine sehr allgemeine Methode zur Untersuchung von Symmetrieeigenschaften einer Lagrange-Funktion darstellt.

Wir definieren als einen *Fluss* eine ein-parametrische Schar  $\phi^\lambda$  von Abbildungen des Konfigurationsraums auf sich selbst

$$q \mapsto \phi^\lambda(q), \quad q(\lambda) = \phi^\lambda(q)$$

(in Komponenten:  $q_\alpha \mapsto \phi^\lambda_\alpha(q)$ ) falls sie die Eigenschaften (Gruppeneigenschaften) haben:

$$\phi^0 = \text{Identität}; \quad \phi^\lambda \cdot \phi^\mu = \phi^{\lambda+\mu}. \quad (4.21)$$

Jeder Fluss hat ein erzeugendes *Vektorfeld* (Geschwindigkeitsfeld einer Strömung)

$$v(q) = \left. \frac{d}{d\lambda} \phi^\lambda(q) \right|_{\lambda=0}. \quad (4.22)$$

Sei nun  $q(t)$  eine Kurve im Konfigurationsraum. Der Fluss  $\phi^\lambda$  bildet die Kurve  $q(t)$  auf  $\phi^\lambda(q(t))$  ab. Wir nennen den Fluss  $\phi^\lambda$  eine *kontinuierliche Symmetrie* einer Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$ , falls

$$L(\phi^\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t} \phi^\lambda(q(t)), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t).$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und für jede Kurve  $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^f$ .

### Satz von Noether

Falls eine Lagrange-Funktion  $L$  eines autonomen (abgeschlossenen) Systems unter einem Fluss  $\phi^\lambda$  invariant ist, d.h. falls  $\phi^\lambda$  eine kontinuierliche Symmetrie von  $L$  ist, dann ist

$$\langle p, v(q) \rangle = \sum_\alpha p_\alpha v_\alpha(q) \quad (4.23)$$

erhalten, d.h.

$$\frac{d}{dt} \langle p, v(q) \rangle = 0. \quad (4.24)$$

In anderen Worten, zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

Beweis: Wir bemerken, dass sich  $\dot{q}$  unter dem Fluss  $\phi^\lambda$  wie

$$\dot{q} \mapsto \dot{\phi}^\lambda(q) = \frac{d}{dt} \phi^\lambda(q)$$



transformiert. Nach Voraussetzung ist  $L$  invariant, also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} L(\phi^\lambda(\mathbf{q}), \dot{\phi}^\lambda(\mathbf{q})) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{\alpha}} \frac{d\phi^{\lambda}}{d\lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\alpha}} \frac{d\dot{\phi}^{\lambda}}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} \\ &= \sum_{\alpha} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\alpha}} \right) \frac{d\phi^{\lambda}}{d\lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\alpha}} \frac{d}{dt} \frac{d\phi^{\lambda}}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\alpha}}}_{\mathbf{p}_{\alpha}} \underbrace{\frac{d\phi^{\lambda}}{d\lambda}}_{\mathbf{v}_{\alpha}} \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

In der Umformung haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen verwendet; der Satz von Noether Gl. (4.24) gilt also nur auf der physikalischen Bahn, d.h. wenn  $\mathbf{q}(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

### Beispiel: Ebene Zentralkraft

Die Lagrange-Funktion vom ebenen Zentralkraftproblem ist in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$L$  ist invariant unter dem Fluss  $\phi^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi_x^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \phi_y^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  der Rotationen um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\lambda$ , gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \phi_x^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \phi_y^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \lambda + y \sin \lambda \\ -x \sin \lambda + y \cos \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Das Integral der Bewegung Gl. 4.23 ist dann (mit  $\alpha = \mathbf{x}, \mathbf{y}$ ):

$$\sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\alpha}} \frac{d}{d\lambda} \phi_{\alpha}^{\lambda}(\mathbf{q}) \Big|_{\lambda=0} = m \dot{x} \underbrace{(+y)}_{v_x} + m \dot{y} \underbrace{(-x)}_{v_y}.$$

In anderen Worten: Der Drehimpuls  $\mathbf{m}(\mathbf{x}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}})$  ist erhalten. Das wussten wir schon von Gl. (4.19), doch der Satz von Noether erlaubt es uns, die Erhaltungssätze in beliebigen Koordinatensystemen herzuleiten und die wichtige Verbindung mit den damit verbundenen Symmetrien aufzudecken.

### Beispiel: N-Teilchen-System

Die Lagrange-Funktion von einem autonomen  $N$ -Teilchen-System

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$$

ist invariant unter dem Fluss der Translationen entlang einer beliebigen Richtung  $\vec{e}$ :

$$\phi^\lambda: \vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \lambda \vec{e}.$$

Dann ist mit  $\vec{v} = \vec{e}$  der Schwerpunktimpuls entlang der  $\vec{e}$  Richtung,

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{e},$$

erhalten.

## 4.6 Infinitesimale Erzeugende

Ein kleiner Exkurs (wichtig für die Quantenmechanik). Für einen (infinitesimal) kleinen Winkel  $\Delta\lambda$  wird die Matrix (Gl. (4.25)) für Drehungen um die  $z$ -Achse zu

$$\begin{pmatrix} \phi_x^{\Delta\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \phi_y^{\Delta\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \phi_z^{\Delta\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}_{\Delta\lambda \ll 2\pi} \approx \begin{pmatrix} x & y\Delta\lambda & 0 \\ -x\Delta\lambda & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\lambda & 0 \\ -\Delta\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei wir die invariante Koordinate  $z \mapsto z$  mitgenommen und  $\cos \lambda \approx 1 - \lambda^2/2$  sowie  $\sin \lambda \approx \lambda - \lambda^3/6$  verwendet haben. Wir definieren nun

$$\begin{pmatrix} 1 & \Delta\lambda & 0 \\ -\Delta\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \Delta\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} + \Delta\lambda J_z.$$

Man bezeichnet die antisymmetrische Matrix  $J_z$  als *infinitesimale Erzeugende* für Drehungen um die  $z$ -Achse (in der Quantenmechanik wird  $J_z$  der Drehimpulsoperator (Operator  $\simeq$  Matrix) sein).

### Exponentialdarstellung

Wegen der Gruppeneigenschaft Gl. (4.21) von einparametrischen Flüssen kann man eine Drehung um einen Winkel  $\lambda$  durch Hintereinanderschalten von  $N$  Drehungen um den Winkel  $\Delta\lambda = \lambda/N$  erreichen. Für große  $N$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi^\lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{(\mathbb{1} + \Delta\lambda J_z)(\mathbb{1} + \Delta\lambda J_z) \dots (\mathbb{1} + \Delta\lambda J_z)}_{N \text{ Terme}} \vec{x} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + \frac{\lambda}{N} J_z \right)^N \vec{x} = e^{\lambda J_z} \vec{x}, \end{aligned}$$

wobei die Exponentialfunktion einer Matrix durch ihre Taylorreihe  $e^{\lambda z} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} J_z^n$  definiert ist.

### Allgemeine Drehungen

Man kann diese Formel verallgemeinern (ohne Beweis). Nehmen wir an, wir wollen um eine Achse  $\vec{e}$  eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  durchführen. Man kann nun zeigen, dass diese Drehung durch

$$\vec{x} \mapsto e^{\vec{\varphi} \cdot \vec{J}} \vec{x}$$

gegeben ist mit  $\vec{x} = (x, y, z)$ ,  $\vec{\varphi} = \varphi \vec{e}$  und den Erzeugenden

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere erfüllt die Transformation  $R(\mathbf{t})\vec{x} \equiv e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{J}} \vec{x}$  die Gleichung

$$R^T \dot{R} \vec{x} = \underbrace{R^T R}_{=1} (\vec{\omega} \cdot \vec{J}) \vec{x} = -\vec{\omega} \times \vec{x},$$

siehe Kap. 1.8 (beachte die andere Definition (Vorzeichen) von  $\vec{\omega}$  in Kap. 1.8). Mit  $\vec{J}$  fassen wir symbolisch die drei Erzeugenden  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  (selbst Matrizen) zu einem Vektor zusammen.

### 4.7 Energieerhaltung

Aus den Lagrange-Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\alpha} (\dot{p}_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + p_{\alpha} \ddot{q}_{\alpha}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Falls also die Variable  $t$  in  $L$  nicht explizit vorkommt, so ist

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L} \quad \text{erhalten.}$$

Man kann diesen Erhaltungssatz auch mit dem Satz von Noether in Zusammenhang bringen, indem man mit  $t = q_0$  die Zeit als zusätzliche Variable betrachtet und die Invarianz der Lagrange-Funktion unter Translationen in der

Zeit betrachtet. Falls also die Lagrange-Funktion von der Wahl des Zeitnullpunktes unabhängig ist, dann ist die verallgemeinerte Energie  $\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L$  erhalten.

### Beispiel

Wir betrachten eine Lagrange-Funktion der Form

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} - V(\mathbf{q}),$$

wobei die kinetische Energie also eine homogene, quadratische Form in  $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f$  ist (allgemeiner Fall). Also ist

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = 2T,$$

und unsere Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie:

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

### Beispiel

Für ein Teilchen in einem statischen äußeren elektromagnetischen Feld Gl. (4.13) ist

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + e\phi(\vec{x})$$

die erhaltene Gesamtenergie. Fragen: Warum kommt in der Gesamtenergie das Magnetfeld  $\vec{B}$ , bzw. das Vektorpotential  $\vec{A}$  nicht vor? Wie lautet der generalisierte Impuls  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}$ ?

### 4.8 10 Erhaltungsgrößen des abgeschlossenen konservativen Systems

Für ein abgeschlossenes System, dessen Kräfte ein Potential besitzen und das unter Galileitransformationen invariant ist, hatten wir 10 Erhaltungsgrößen notiert (Kap. 1.7). Jetzt sind wir in der Lage, diese Erhaltungsgrößen auf die 10 kontinuierlichen Parameter der Galileigruppe zurückzuführen und damit formal herzuleiten.

Wegen der Galileiinvarianz hat die Lagrange-Funktion eines solchen Systems die Form

$$L(\underbrace{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N}_x; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \equiv T - V,$$

mit

$$V(\mathbf{R}\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots, \mathbf{R}\vec{x}_N + \vec{b}) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad \forall \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \vec{b} \in \mathbb{R}.$$

Die Impulse sind dann

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = m_i \dot{\vec{x}}_i$$

a) Zeittranslationen führen, wie bereits besprochen, zur Erhaltung der Energie  $E = T + V$ .

b) Räumliche Translationen:  $L$  ist invariant unter der gemeinsamen Translation

$$\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{x}_1 + \lambda \vec{b}, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{b})$$

Das zugehörige Vektorfeld ist  $v(\mathbf{x}) = (\vec{b}, \dots, \vec{b})$ . Die zugehörige Erhaltungsgröße ist

$$\langle \mathbf{p}, v(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{b} \equiv \vec{P} \cdot \vec{b}$$

Da  $\vec{b}$  beliebig ist, ist der Gesamtimpuls  $\vec{P}$  erhalten.

c) Drehungen:  $L$  ist invariant unter Drehungen

$$\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\mathbf{R}(\vec{e}, \lambda)\vec{x}_1, \dots, \mathbf{R}(\vec{e}, \lambda)\vec{x}_N)$$

wobei  $\mathbf{R}(\vec{e}, \lambda)$  die Drehung um einen Winkel  $\lambda$  um die Achse  $\vec{e}$  ist. Das zugehörige Vektorfeld ist

$$v(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{e} \times \vec{x}_1, \dots, \vec{e} \times \vec{x}_N),$$

und die Erhaltungsgröße ist daher

$$\langle \mathbf{p}, v(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{e} \times \vec{x}_i) = \vec{e} \cdot \sum_{i=1}^N \underbrace{m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i}_{\vec{L}_i} \equiv \vec{e} \cdot \vec{L}$$

Da  $\vec{e}$  beliebig gewählt werden kann, bedeutet das die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses  $\vec{L}$ .

d) Invarianz des Systems unter speziellen Galileitransformationen, die die Translation in ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegtes Koordinatensystem beschreiben. Das entspricht der Schar

$$\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{x}_1 + \lambda \vec{v}t, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{v}t) \quad \tau^\lambda(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$$

Das zugehörige Vektorfeld ist

$$v(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{v}t, \dots, \vec{v}t),$$

Man hat hier den allgemeineren Fall, dass die transformierte Lagrange-funktion sich von der ursprünglichen um die totale Zeitableitung von

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \lambda) = \sum_{i=1}^N (\lambda \vec{x}_i \cdot \vec{v} + \frac{\lambda^2}{2} \vec{v}^2 t)$$

unterscheidet. Man erhält dann als Erhaltungsgröße (Details siehe z.B. [Goldstein]) das Schwerpunktintegral

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v}t - \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v} = -(\mathbf{M}\vec{X} - \vec{P}t) \cdot \vec{v}$$

Es gilt übrigens auch umgekehrt, dass jeder Erhaltungsgröße zu einer kontinuierlichen Symmetrie führt.

#### 4.9 Prinzip von Euler-Maupertuis

Das Prinzip von Hamilton besagt, dass die Variation der Wirkung  $I[\mathbf{q}(t)] = \int_{(1)}^{(2)} L dt$  für die physikalische Bahn  $\mathbf{q}(t)$  verschwindet. Dabei waren für die Variation nur solche Bahnen zugelassen, für die bei festen Anfangs- und Endzeiten  $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}$  die Endpunkte der Bahn,  $\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}(\mathbf{t}^{(1)})$  und  $\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{q}(\mathbf{t}^{(2)})$  fest vorgegeben waren.

#### Variation der Endzeiten

Wir wollen nun die Klasse der zugelassenen Bahnen verallgemeinern: Der Anfangs-/Endpunkt der Bahn,  $\mathbf{q}_1$  und  $\mathbf{q}_2$  sollen immer noch fest vorgegeben sein, doch dem System wird jetzt erlaubt, zu einer *beliebigen* Zeit  $\mathbf{t}^{(1)}$  zu starten und zu einer beliebigen Zeit  $\mathbf{t}^{(2)}$  anzukommen. Damit ist  $\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t}^{(1)}(\lambda)$  und  $\mathbf{t}^{(2)} = \mathbf{t}^{(2)}(\lambda)$  für eine beliebige Bahn  $\mathbf{q}(\mathbf{t}, \lambda)$ . Wir betrachten die Variation der Endpunkte

$$\Delta \mathbf{t}^{(j)} = \left. \frac{d\mathbf{t}^{(j)}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad \delta \mathbf{q}_\alpha^{(j)} = \left. \frac{d\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{t}^{(j)}, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (j = 1, 2)$$

$$\Delta \mathbf{q}_\alpha^{(j)} = \left. \frac{d}{d\lambda} \mathbf{q}_\alpha(\mathbf{t}^{(j)}(\lambda), \lambda) \right|_{\lambda=0} = \delta \mathbf{q}_\alpha^{(j)} + \dot{\mathbf{q}}_\alpha \Delta \mathbf{t}^{(j)}. \quad (4.26)$$

Das (j) in  $q_\alpha^{(j)}$  deutet hier die Abhängigkeit von den Anfangs- und Endzeiten an. Wir berechnen nun, analog zu Gl. (4.17), die Variation der Wirkung  $I[q]$ :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{(1)}^{(2)} L dt &= \frac{d}{d\lambda} \int_{t^{(1)}(\lambda)}^{t^{(2)}(\lambda)} dt L(q(t, \lambda), \dot{q}(t, \lambda)) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda} \right) + [L\Delta t^{(j)}]_{(1)}^{(2)} \\
&= \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right) + [L\Delta t^{(j)}]_{(1)}^{(2)} \\
&= \sum_{\alpha} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) + [L\Delta t^{(j)}]_{(1)}^{(2)} \\
&= \left[ \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha^{(j)} + L\Delta t^{(j)} \right]_{(1)}^{(2)} = \left[ \sum_{\alpha} p_\alpha \delta q_\alpha^{(j)} + L\Delta t^{(j)} \right]_{(1)}^{(2)} \\
&= \left[ \sum_{\alpha} p_\alpha \Delta q_\alpha^{(j)} - \left( \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right) \Delta t^{(j)} \right]_{(1)}^{(2)} \\
&= [-E\Delta t^{(j)}]_{(1)}^{(2)} = -\delta \int_{(1)}^{(2)} E dt,
\end{aligned}$$

wobei wir Gl. (4.26) verwendet haben, mit der Annahme, dass die Gesamtenergie  $E = \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$  erhalten ist, und dass die Endpunkte der Bahn fest sind, also  $[\Delta q_\alpha]_{(1)}^{(2)} = 0$ . Mit  $E = T + V$  finden wir

$$0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} (L + E) dt = \delta \int_{(1)}^{(2)} (T - V + T + V) dt = \delta \int_{(1)}^{(2)} 2T dt. \quad (4.27)$$

Dieses Zwischenergebnis wird jetzt nützlicher, wenn man die Geometrie der Bahnkurve ins Spiel bringt.

### Metrischer Tensor

Wir nehmen nun an, dass die kinetische Energie eine positiv definite quadratische Form ist,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad \text{mit} \quad T(q, \dot{q}) > 0, \quad \forall q, \dot{q}.$$

Im Konfigurationsraum definieren wir durch das Bogenelement  $ds$  mit

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) dq_\alpha dq_\beta \quad (4.28)$$

eine (Riemannsche) *Metrik*. Im  $\mathbb{R}^3$  ist das Bogenelement in kartesischen Koordinaten durch  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  gegeben und der metrische Tensor ist  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  (mit  $\alpha, \beta = x, y, z$ ). Im  $\mathbb{R}^2$  ist das Bogenelement in ebenen Polarkoordinaten durch  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$  gegeben und der metrische Tensor ist  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$  (mit  $q = (r, \phi)$ ). Zweck der Parametrisierung nach der Bogenlänge ist, die Zeit als Kurvenparameter im Konfigurationsraum zu ersetzen.

### Geometrie der Bahnkurve

Die Bogenlänge einer Kurve  $q(t)$  ist durch

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt} \quad (4.29)$$

bestimmt. Also haben wir

$$ds = \sqrt{\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta} dt = \sqrt{2T} dt = \sqrt{2(E - V(q))} dt. \quad (4.30)$$

Es gilt also allgemein: Für eine Bewegung zu fester Energie  $E$  bestimmt die geometrische Gestalt der Bahnkurve im Konfigurationsraum via Gl. (4.30) auch den zeitlichen Durchlauf, denn  $dt = ds/\sqrt{2(E - V(q))}$  (Vergleiche auch Kap. 2.2).

Die geometrische Gestalt der Bahn lässt sich aus einem Variationsprinzip gewinnen, dem *Prinzip von Euler-Maupertuis*:

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{E - V(q)} ds = 0, \quad (4.31)$$

wobei wir Gleichungen (4.27) und (4.30) verwendet haben (denn  $2T dt = \sqrt{2T} ds = \sqrt{2(E - V)} ds$ ). Die Variation ist hierbei bei festen Endpunkten der Bahn im Konfigurationsraum auszuführen. Dieses Variationsprinzip wird manchmal auch als *Jacobi-Prinzip* bezeichnet.

Anmerkung:

In Gl. (4.31) kommt die Zeit nicht mehr vor und  $ds$  ist durch Gl. (4.28) als Funktion der  $dq_\alpha$  gegeben. Die Variation betrifft also nur noch den räumlichen Verlauf der Bahn im Konfigurationsraum. Alternativ kann man

hier  $s$  auch als Kurvenparameter auffassen, also  $\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha(s)$  betrachten, wobei  $s$  in der Metrik (Gl. (4.28)) die Länge der Kurve  $\mathbf{q}(s)$  ist.

### Beispiel: Geodätische Linien

Für  $V(\mathbf{q}) = 0$  ist  $\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0$ , d.h. die Bahnen zu jeder Energie  $E$  sind durch die kürzeste Verbindung (geodätische Linien in der Metrik Gl. (4.28)) zwischen den beiden Punkten  $\mathbf{q}^{(1)}$  und  $\mathbf{q}^{(2)}$  gegeben. In anderen Worten, das System sucht sich die kürzeste Konfigurationslaufbahn. Die Bewegung findet also auf Geraden (im freien Raum) oder Großkreisen (auf einer Kugel) statt.

### Fermatsches Prinzip

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen im einem Potential  $V(\vec{x})$  ist

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}).$$

Die Metrik Gl. (4.28) ist dann (bis auf unwesentliche Zahlenfaktoren) die gewöhnliche euklidische Metrik im  $\mathbb{R}^3$  und das Variationsprinzip lautet

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \underbrace{\sqrt{E - V(\vec{x})}}_{\equiv n(\vec{x})} ds = 0. \quad (4.32)$$

Fasst man  $n(\vec{x})$  als Brechungsindex eines optisch inhomogenen Mediums auf, so ist dies das *Fermatsche Prinzip für die Lichtstrahlen* (das Prinzip des kleinsten Lichtwegs). Die Analogie wird plausibel, wenn man bedenkt, dass die optische Weglänge durch

$$L_{\text{opt}} = \int_C n(\vec{x}) ds$$

gegeben ist; mit der Identifikation  $n(\vec{x}) \rightarrow \sqrt{E - V(\vec{x})}$  bedeutet die Variation, dass wir mit  $\delta L_{\text{opt}} = 0$  einen extremalen Lichtweg suchen. Interessant ist das, weil wir jetzt die Methode der Euler-Lagrange-Gleichungen auf ein Problem der Optik übertragen können.

### Strahlengleichungen

Um die Variation von Gl. (4.32) ausführen zu können, müssen wir noch eine kleine Schwierigkeit überwinden, die darin besteht, dass das Integral  $\int(\dots) ds$  keine festen Grenzen hat, da ja die geometrische Länge der Bahn a priori nicht festgelegt ist.

Wir führen nun einen Bahnparameter  $\tau$  ein, so dass die Bahn  $\mathbf{q}_\alpha(\tau)$  die Randbedingungen  $\mathbf{q}^{(j)} = \mathbf{q}(\tau^{(j)})$  ( $j = 1, 2$ ), für feste  $\tau^{(j)}$  erfüllt. Nach Gl. (4.28) wird dann das Bahnelement wegen  $ds^2 = d^2\vec{x}$  ( $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ) zu

$$ds = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} d\tau \quad (\cdot = \frac{d}{d\tau}).$$

Damit wird Gl. (4.32) zu

$$\delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \underbrace{n(\vec{x}) \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}_{L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})} d\tau = 0.$$

Die Differentialgleichungen für die gesuchten Extremalkurven sind nun nichts anderes als die Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion  $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ , d.h.

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left( n \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

oder

$$\frac{d}{d\tau} \left( n \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} \right) - \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} \frac{\partial n}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.33)$$

Man kann verifizieren, dass Gl. (4.33), für  $n(\vec{x}) = \sqrt{E - V(\vec{x})}$ , zu den Newton'schen Gleichungen  $m\ddot{x}_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} V(\vec{x})$  äquivalent ist. Führen wir wieder die Kurvenlänge  $s$  als Kurvenparameter ein, so erhalten wir mit  $\frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{ds}$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) - \text{grad } n = 0.$$

Dies ist die *Strahlengleichung der geometrischen Optik*.

### Übergang zur Quantenmechanik

Also gibt es eine formale Analogie zwischen der Mechanik eines Massenpunktes in einem Potential  $V(\vec{x})$  und der geometrischen Optik (Lichtwellen) in einem Medium mit dem Brechungsindex  $n(\vec{x}) = \sqrt{E - V(\vec{x})}$ . Diese Analogie kann man als Ausgangspunkt für die Wellenmechanik von Schrödinger benutzen, in der die Massenpunkte zu Materiewellen werden (siehe die Quantenmechanik).

### 4.10 Variation mit Nebenbedingungen

#### Klassifikation der Zwangsbedingungen

1) *Holonome Zwangsbedingungen*

Darunter versteht man Verknüpfungen der Koordinaten (und eventuell der Zeit) der Form

$$g_r(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, R$$

für ein System von  $N$  Teilchen mit  $R$  Zwangsbedingungen. Die kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  bilden zur Zeit  $t$  eine glatte  $f$ -dimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^{3N}$ , wobei  $f = 3N - R$  die Zahl der Freiheitsgrade ist.

Beispiele sind der starre Körper, für dessen Massen in festen Abständen  $(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$  gilt; oder das Teilchen, das sich entlang einer Kurve oder Fläche bewegen muss.

Bei expliziter Zeitabhängigkeit der  $g_r$  (d.h.  $\partial g_r / \partial t \neq 0$ ) spricht man von *rheonomen Zwangsbedingungen* (Beispiel Teilchen im Aufzug), bei Abwesenheit der Zeitabhängigkeit (d.h.  $\partial g_r / \partial t = 0 \forall r = 1, \dots, R$ ) von *skleronomen Zwangsbedingungen*.

2) *Nicht-holonome Zwangsbedingungen*

a) Zwangsbedingungen sind durch Ungleichungen gegeben

Beispiele sind Teilchen in einer Box; oder ein Teilchen, das von einer Kugel herabrutscht und sich von der Oberfläche lösen kann.

b) Zwangsbedingungen sind differentiell gegeben und nicht integrierbar (stellen keine totale Ableitung dar). Sie sind also von der Form

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{rm} dx_m + f_{it} dt = 0, \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (4.34)$$

Nicht integrierbar heißt, dass es keine Funktion  $F_r$  gibt mit

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_m} = f_{rm} \quad \forall m = 1, \dots, 3N, \quad \frac{\partial F_r}{\partial t} = f_{it}$$

(sonst könnte man die holonome Zwangsbedingung  $F_r(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \text{const}$  gewinnen). Dieser Fall von differentiellen Zwangsbedingungen ergibt sich z.B. aus Zwangsbedingungen, die die Teilchengeschwindigkeiten enthalten. Ein Beispiel ist das auf einer Ebene rollende Rad.

Die im Folgenden behandelte Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren* wird vor allem für den Fall 2b) eingeführt, eignet sich aber auch für den Fall 1), da man holonome Zwangsbedingungen durch Differenzieren auch in der Form von Gl. (4.34) darstellen kann.

Die Lagrange-Gleichungen (4.12) gelten in den generalisierten Koordinaten  $(q_1 \dots q_f)$ . In dieser Darstellung sind für ein  $N$ -Teilchen-System alle  $r = 1, \dots, R$  Zwangsbedingungen der Form

$$g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = 0, \quad (r = 1, \dots, R)$$

von vornherein berücksichtigt worden. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist  $f = 3N - R$ . Häufig ist es jedoch wünschenswert, die Bewegungsgleichungen in der ursprünglichen Koordinaten  $\mathbf{x} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}$  zu formulieren, also

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i, \quad (i = 1 \dots N), \quad (4.35)$$

zu lösen, wobei wir die Kraft wie in Kap. 4.2 aufgeteilt haben:

$\vec{K}_i$  : dynamische Kraft,

$\vec{Z}_i$  : Zwangskraft.

Bei dem Versuch Gl. (4.35) zu lösen sieht man sich der Schwierigkeit gegenüber, dass die Zwangskraft als Reaktionskraft á priori nicht bekannt ist. Diese Schwierigkeit lässt sich beheben, da man die Richtung, wenn auch nicht die Stärke der Zwangskräfte á priori berechnen kann. Dazu bemerken wir

(i) Die Zwangsbedingungen

$$g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (r = 1 \dots R) \quad (4.36)$$

definieren im  $\mathbb{R}^{3N}$  Flächen  $F_r$ . Die erlaubten Bahnen liegen in der Schnittmenge aller  $R$  Flächen, siehe Abbildung 4.5.

(ii) Wir zerlegen die Zwangskräfte in  $R$  Komponenten,

$$\vec{Z}_i = \sum_{r=1}^R \vec{Z}_i^{(r)}.$$

Die Komponenten  $\vec{Z}_i^{(r)}$  sind dabei senkrecht auf den jeweiligen Flächen  $F_r$ , da sie keine Arbeit leisten.

(iii) Für beliebige erlaubte Variationen der Bahn  $\delta \vec{x}_i$  gilt

$$0 = \delta g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_r}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta \vec{x}_i.$$

Also ist der Gradient

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \perp F_r$$

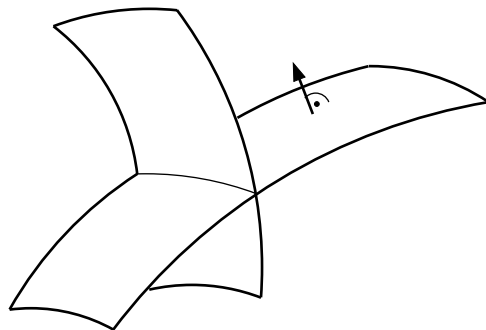


Abbildung 4.5: Illustration von zwei Zwangsbedingungen.

senkrecht auf der Fläche  $F_r$ . Beispiel: Eine Bewegung eines Teilchen in der  $xy$ -Ebene ist durch die Zwangsbedingung  $g(\vec{x}) = z = 0$  charakterisiert, und der Gradient  $\nabla g = \nabla z = \vec{e}_z$  ist dann senkrecht zur  $xy$ -Ebene.

### Lagrange-Parameter

Wir finden also, dass

$$\vec{Z}_i = \sum_{r=1}^R \lambda_r(t) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (4.37)$$

wobei wir mit den  $\lambda_r(t)$  (unbekannte) Proportionalitätskonstanten eingeführt haben, den sogenannten *Lagrange-Parametern* oder *Lagrange-Multiplikatoren*. Damit haben wir eine Möglichkeit gefunden Gl. (4.35) zu lösen. Man geht folgendermaßen vor:

1) Löse die Gleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{K}_i + \sum_{r=1}^R \lambda_r \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (i = 1 \dots N) \quad (4.38)$$

für beliebige Lagrange-Parameter  $\lambda_r$ .

2) Setze dann die so erhaltenen Lösungen

$$\vec{x}_i(t, \lambda_1 \dots \lambda_R), \quad (i = 1 \dots N)$$

in Gl. (4.36) ein und bestimme aus den hieraus resultierenden  $R$  Gleichungen die Werte für die Lagrange-Parameter  $\lambda_r(t)$ .

### Beispiel: Schiefe Ebene

Wir betrachten die schiefe Ebene mit Steigungswinkel  $\alpha$ .

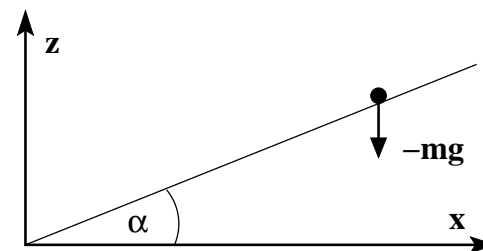


Abbildung 4.6: Massenpunkt auf der schiefen Ebene.

Es gilt

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \tan \alpha = z/x,$$

das heißt wir haben die Zwangsbedingung

$$g(x, z) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0.$$

Für den Gradient gilt

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Mit dem Potential  $V = gmz$  werden die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.38)

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gm \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{x} = \lambda \sin \alpha, \quad m\ddot{z} = -\lambda \cos \alpha - gm.$$

Die Lösung ist

$$x(t, \lambda) = \frac{\lambda \sin \alpha}{2m} t^2 + \dot{x}(0) t + x(0),$$

$$z(t, \lambda) = -\frac{\lambda \cos \alpha + gm}{2m} t^2 + \dot{z}(0) t + z(0).$$

Wir setzen nun einfachheitshalber

$$x(0) = 0 = \dot{x}(0), \quad z(0) = 0 = \dot{z}(0)$$

und setzen die Lösung in die Zwangsbedingung ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x \sin \alpha - z \cos \alpha &= \frac{\lambda \sin \alpha}{2m} t^2 \sin \alpha + \frac{\lambda \cos \alpha + gm}{2m} t^2 \cos \alpha \\ &= \frac{\lambda}{2m} t^2 + \frac{gm \cos \alpha}{2m} t^2 = 0. \end{aligned}$$

Nun haben wir den Lagrange-Parameter bestimmt,

$$\lambda = -g m \cos \alpha,$$

und können diesen Wert in die allgemeine Lösung einsetzen, also

$$x(t) \Big|_{\lambda=-g m \cos \alpha} = -\frac{g}{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha t^2,$$

$$z(t) \Big|_{\lambda=-g m \cos \alpha} = -\frac{g}{2} \underbrace{(-\cos^2 \alpha + 1)}_{\sin^2 \alpha} t^2.$$

Damit finden wir für die Zwangskraft

$$\vec{Z} = \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} -g m \sin \alpha \cos \alpha \\ g m \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

### Variationsprinzip

Die Gleichung (4.38) lässt sich aus einem Variationsprinzip ableiten:

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} dt L^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \dots \dot{\vec{x}}_N) = 0,$$

mit einer verallgemeinerten Lagrange-Funktion

$$L^* = L(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \dots \dot{\vec{x}}_N) - \sum_{r=1}^R \lambda_r g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (4.39)$$

denn die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \frac{\partial L^*}{\partial \vec{x}_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}}_{\vec{K}_i} - \underbrace{\sum_{r=1}^R \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial \vec{x}_i}}_{\vec{Z}_i},$$

und sind also mit Gl. (4.38) identisch. Die Variation der verallgemeinerten Lagrange-Funktion Gl. (4.39) bewirkt, dass der zweite Term minimiert wird, sodass Erfüllung der Zwangsbedingungen  $g_r(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = 0$  erzwungen wird. Das ist eine sehr allgemeine Methode, um Nebenbedingungen in Variationsprobleme einzubauen.

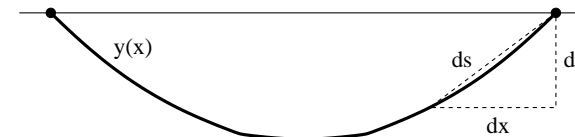


Abbildung 4.7: Die durchhängende Kette im Schwerfeld.

### 4.11 Weitere Anwendungen der Variationsrechnung

Das Hamilton'sche Extremalprinzip Gl. (4.15) ist nur eine physikalische Anwendung einer allgemeinen mathematischen Methode, der *Variationsrechnung*. Bei der Variationsrechnung geht es darum, eine Funktion

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}) \dots y_N(\mathbf{x}))$$

zu finden, die ein bestimmtes Funktional

$$I[\mathbf{y}] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x)$$

unter Berücksichtigung bestimmter Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen)

$$g_r(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad (r = 1 \dots R)$$

minimiert. Aus den vorhergehenden Betrachtungen wissen wir, dass hierfür das Funktional

$$I^*[\mathbf{y}] = \int_{x_0}^{x_1} dx \left( F(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) - \sum_r \lambda_r g_r(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \right) \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx F^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x)$$

minimal sein muss. Die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten mit  $(x \leftrightarrow t, \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{q}, \mathbf{y}' \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}})$  wie immer

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{y}'_i} - \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{y}_i} = 0}, \quad (i = 1 \dots N). \quad (4.40)$$

### Beispiel: Durchhängende Kette

Wir betrachten eine durchhängende Kette mit der festen Gesamtlänge  $L$ .

Die Kette sei fest aufgehängt und wird im Schwerfeld eine Form  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  annehmen, die die potentielle Energie,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx g \mu y(x) \sqrt{1 + (\mathbf{y}')^2} \quad (4.41)$$



minimiert. Hierbei ist  $\mu$  die Masse der Kette pro Längeneinheit. Gl. (4.41) erhalten wir aus

$$V = \int_{x_0}^{x_1} ds \, g\mu, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

Die Nebenbedingung der festen Länge ist durch

$$L = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

gegeben. Im folgenden werden wir o.B.d.A. die Einheiten  $g\mu = 1$  verwenden. Wir müssen also das Funktional

$$I^*[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx F^*(y, y', x), \quad F^* = (y - \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}$$

minimieren.

### Verallgemeinerte Energie

Wir können das Minimum von  $I^*[y]$  via der Euler-Lagrange-Gleichungen (4.40) finden oder wir können bemerken, dass das  $F(y, y', x) = F(y, y')$  nicht von  $x \leftrightarrow t$  abhängt und somit nach Kap. 4.7 die verallgemeinerte Energie erhalten ist:

$$\text{für } q(t) \text{ gilt: } L = L(q, \dot{q}) \implies \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \text{ erhalten,}$$

$$\text{für } y(x) \text{ gilt: } F^* = F^*(y, y') \implies y' \frac{\partial F^*}{\partial y'} - F^* \text{ erhalten.}$$

Es gilt also

$$\frac{\partial F^*}{\partial y'} = (y - \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

und damit

$$(y - \lambda) \frac{(y')^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + (y')^2}} - (y - \lambda) \sqrt{1 + (y')^2} = a, \quad \leadsto \quad -\frac{y - \lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = a,$$

wobei  $a$  eine Konstante ist. Diese Differentialgleichung kann man nach  $y'$  auflösen und integrieren. Man erhält für die Form der Kette

$$y(x) = \lambda + a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right),$$

wobei die Integrationskonstanten  $a$  und  $b$ , sowie der Lagrange-Parameter  $\lambda$  durch

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad L = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

festgelegt sind. Mit der Wahl

$$(x_0, y_0) = (-1, 0), \quad (x_1, y_1) = (1, 0)$$

erhält man

$$b = 0, \quad \lambda = -a \cosh\left(\frac{1}{a}\right).$$

Damit hat die Lösung die Form

$$\boxed{y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a \cosh\left(\frac{1}{a}\right)}, \quad y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Die Nebenbedingung wird zu

$$L = \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 + (y')^2} = \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \int_{-1}^1 dx \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

also

$$\boxed{L = 2a \sinh\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Diese Gleichung hat keine (!) Lösung für  $L < 2$  und zwei Lösungen für  $L > 2$ , eine Lösung entspricht der nach unten hängenden Kette, die andere (maximale potentielle Energie) dem optimalen Torbogen.

## 5. Starre Körper

### 5.1 Der starre Körper als Vielteilchensystem

Starre Körper können als Systeme von Vielteilchensystemen modelliert werden, die durch ihre Wechselwirkungskräfte starr an ihren Plätzen festgehalten sind. Das ist ein Grenzfall des allgemeineren Problems, in dem  $N$  Punktmassen an Positionen  $\vec{x}_i, i = 1, \dots, N$  durch Paarpotentiale wechselwirken mit einem Gesamtpotential

$$V(\{\mathbf{r}_{ij}\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|.$$

Die Orte  $\vec{x}_k = \vec{a}_k, k = 1, \dots, N$ , für die alle internen Kräfte verschwinden,

$$\vec{F}_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \right|_{\{\vec{x}_k = \vec{a}_k, k=1, \dots, N\}} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

sind die Gleichgewichtspositionen  $\vec{a}_i$ . Ein stabiles Gleichgewicht existiert, wenn die  $\vec{a}_i$  Minima des Gesamtpotentials sind. Das bedeutet, dass die Eigenwerte  $\omega_n^2$  der Matrix  $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\{\vec{x}_k = \vec{a}_k\}}$  (die Koeffizienten der Taylorentwicklung von  $V$  um die Gleichgewichtslage) positiv sein müssen. Der starre Körper entspricht dem Grenzwert sehr großer  $\omega_n^2$ .

### Freiheitsgrade des starren Körpers

Im idealen starren Körper sind die Abstände zwischen jedem Paar von  $N$  Punktmassen fixiert:

$$r_{ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Wegen  $r_{ij} = r_{ji}$  sind das  $N(N-1)/2$  Bedingungen. Allerdings können diese Bedingungen nicht alle unabhängig sein, denn für große  $N$  (d.h.  $N > 7$ ) sind das mehr Bedingungen als die  $3N$  Freiheitsgrade des Systems. Um zu überlegen, wie viele Freiheitsgrade der starre Körper hat, stellen wir zuerst

fest, dass wir nicht alle Abstände von jedem Teilchen zu jedem anderen Teilchen benötigen. Zunächst wählen wir 3 Teilchen, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist eine vierte Punktmasse eindeutig fixiert durch ihre drei Abstände zu den ersten 3 Teilchen, und dasselbe gilt für jede weitere Punktmasse. Das ergibt  $3(N-3)$  Bedingungen für alle  $N-3$  Punktmassen. Also ist die Zahl der Freiheitsgrade reduziert auf  $3N - 3(N-3) = 9$ ; weitere 3 Bedingungen sind erforderlich, um die Lage der ersten drei Punktmassen zueinander festzulegen. Damit hat der starre Körper 6 Freiheitsgrade. Davon sind 3 die Translationsfreiheitsgrade des Schwerpunkts, und 3 sind Rotationsfreiheitsgrade. Die Zahl 6 der Freiheitsgrade ist unabhängig von der Zahl  $N$  der Punktmassen und gilt sogar im Kontinuuumlimites  $N \rightarrow \infty$ .

Die Zwangsbedingungen (Punktmassenabstände) des starren Körpers sind holonom; wir implementieren sie dadurch, dass wir direkt im 6-dimensionalen Konfigurationsraum des Systems arbeiten, in dem dann keine Zwangsbedingungen mehr auftreten.

### 5.2 Grundlagen der Statik

Die Statik des starren Körpers beruht auf Gleichgewichtsbedingungen von 6 einfachen Maschinen, Hebel, Rad, Flaschenzug, schiefer Ebene, Keil und Schraube.

Statistisches Gleichgewicht eines Systems von Punktmassen ist gewährleistet, wenn sowohl Gesamtimpuls  $\vec{P}$  als auch Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  zeitlich konstant sind.

Gleichgewichtsbedingungen:

- a) Kräftegleichgewicht (d.h. keine Translation des Körpers):

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

(wobei alle Kräfte externe, an den Punktmassen angreifende Kräfte sind).

- b) Gleichgewicht der Drehmomente (d.h. keine Rotationen des Körpers):

$$\sum_{i=1}^N \vec{x} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0$$

Dies sind die Grundgleichungen der Statik. Die zweite Bedingung besagt, dass die Summe der Drehmomente für einen gemeinsamen Bezugspunkt verschwinden muss. Man macht sich leicht klar, dass dieser Bezugspunkt beliebig gewählt werden kann.

Die Hauptaufgabe der Statik ist dann die folgende: Angenommen, die Kräfte oder Drehmomente eines starren Körpers sind nicht im Gleichgewicht; welche Kräfte oder Drehmomente sind erforderlich, um das Gleichgewicht herzustellen? Die zwei Grundaufgaben sind:

- i)  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \neq 0$ , aber  $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0$ . Dann genügt es, die Kraft  $\vec{F} = -\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  am gemeinsamen Bezugspunkt der Drehmomente anzugreifen zu lassen, was das Gleichgewicht der Drehmomente unberührt lässt und das Kräftegleichgewicht herstellt.
- ii)  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$ , aber  $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i \neq 0$ . Hier hilft nur ein Kräftepaar, keine Einzelkraft; dieses besteht aus zwei gleichgroßen Kräften in entgegengesetzter Richtung, was nur das Gesamtdrehmoment, aber nicht die Gesamtkraft ändert.

### 5.3 Der Kreisel

Beim starren Körper ist oft der Fall interessant, dass der Körper in einem Punkt (nicht unbedingt dem Schwerpunkt) festgehalten wird, sodass es keine Schwerpunktttranslation gibt. Das lässt nur den Rotationsfreiheitsgrad übrig, und einen solchen starren Körper nennt man *Kreisel*.

#### Körperfestes Koordinatensystem

Bei der Behandlung des Kreisels ist die Wahl eines geeigneten Bezugssystems von großer Bedeutung, da sich dadurch die Bewegungsgleichungen dramatisch vereinfachen. Wir bezeichnen mit  $\vec{x}$  das Laborsystem und mit  $\vec{y}$  das (rotierende) körperfeste Koordinatensystem. Es gilt die Transformationsgleichung  $\vec{x} = R(t)\vec{y}$ , wobei  $R(t) \in SO(3)$  die Matrix der Rotation  $e^{-t\vec{\omega} \cdot \vec{J}}$  ist (siehe Kap. 4.6 und beachte für das Vorzeichen im Exponenten, dass  $\vec{y}$  das rotierende Koordinatensystem ist). Ferner gilt

$$R^T \dot{R} \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}, \quad \frac{d}{dt} \vec{x} = \frac{d}{dt} R \vec{y} = \dot{R} \vec{y}, \quad (5.1)$$

(siehe Kap. 4.6) da der Körper im  $\vec{y}$ -System starr ist, sich also nicht bewegt.

### Die Eulerschen Winkel

Bislang hatten wir die Rotation eines Vektors  $\vec{x}' = R(t)\vec{x}$  durch eine Drehachse in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{n}$  und einen Drehwinkel  $\alpha$  parametrisiert; der Zusammenhang zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{x}'$  folgt dann aus der Beziehung

$$\vec{x}' = \vec{x} \cos \alpha + \vec{n} (\vec{n} \times \vec{x}) (1 - \cos \alpha) - (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \alpha.$$

Für infinitesimal kleine Winkel  $\epsilon$  lautet diese Beziehung

$$\vec{x}' = \vec{x} - \epsilon (\vec{n} \times \vec{x}).$$

Es ist wichtig, bei Rotationen darauf zu achten, ob von einer *aktiven Rotation* die Rede ist (bei festgehaltener Basis wird der Vektor  $\vec{x}$  nach  $\vec{x}'$  gedreht), oder von einer *passiven Rotation* (das Koordinatensystem, in dem  $\vec{x}$  dargestellt ist, wird gedreht). Für einen infinitesimal kleinen Winkel  $\epsilon$  ist das in Abb. 5.1 dargestellt. Für die Koordinaten des Vektors entspricht eine aktive Rotation um  $\epsilon$  einer passiven Rotation um  $-\epsilon$ , d.h. gerade der inversen Rotation.

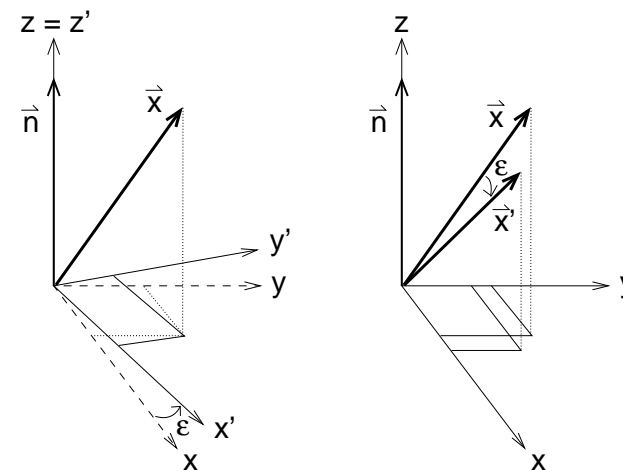


Abbildung 5.1: Infinitesimale Drehung um die z-Achse. Links: passive Drehung. Rechts: aktive Drehung.

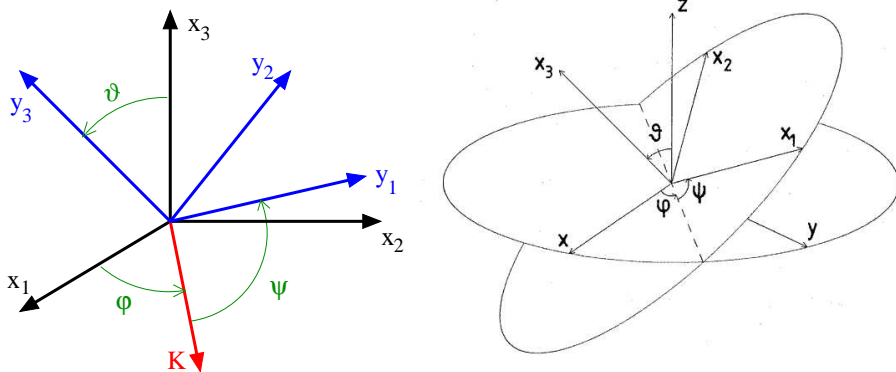
Als Lagekoordinaten werden in der Theorie des starren Körpers gerne die sogenannten *Eulerschen Winkel* verwendet. Das ist neben  $\{\vec{n}, \alpha\}$  eine zweite wichtige Methode, die drei Rotationsfreiheitsgrade zu parametrisieren. Hierbei stellt man eine beliebige Rotation  $R$  des Körpers als Produkt dreier aufeinander folgender Rotationen  $R_\varphi$ ,  $R_\theta$  und  $R_\psi$  dar:

$$R = R_\psi \cdot R_\theta \cdot R_\varphi. \quad (5.2)$$

Für genaue Definition der Eulerschen Winkel, d.h. um die drei Achsen gedreht wird, gibt es in der Literatur verschiedene Konventionen. Wir verwenden die folgende Sequenz von Drehachsen und -winkeln:

	Drehachse	Drehwinkel
1. Drehung $R_\varphi$ :	$x_3$	$\varphi$
2. Drehung $R_\vartheta$ :	K	$\vartheta$
3. Drehung $R_\psi$ :	$y_3$	$\psi$ ,

wobei die *Knotenlinie* K das Bild der  $x_1$ -Achse nach der ersten Drehung ist.



**Abbildung 5.2:** Die Eulerschen Winkel. Rechte Figur: Die gestrichelte Linie entspricht der Knotenlinie K. Die zwei um den Winkel  $\vartheta$  (2. Drehung) gegeneinander verkippten Kreisscheiben repräsentieren die Ebenen, in denen die 1. Drehung um  $\varphi$  beziehungsweise die 3. Drehung um  $\psi$  stattfinden.

Als Rotationsmatrizen haben wir also

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus kann man mit Gl. (5.2) die Rotationsmatrix berechnen:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

### Winkelgeschwindigkeiten

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im  $y$ -System,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  und den Winkelgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Diese kann man entweder aus  $R^T \dot{R} \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$  gewinnen oder aus dem Additionstheorem für Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \hat{e}_\vartheta + \dot{\psi} \hat{e}_\psi,$$

wobei  $\hat{e}_\varphi$ ,  $\hat{e}_\vartheta$  und  $\hat{e}_\psi$  die Einheitsvektoren der Rotationsachsen sind, deren  $y$ -Komponenten durch

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta) \\ \hat{e}_\vartheta &= (\cos \psi, -\sin \psi, 0) \\ \hat{e}_\psi &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

gegeben sind.

Diesen Zusammenhang kann man mit folgender Überlegung verstehen: Wegen

$\varphi \equiv$  Winkel zwischen  $x_1$ -Achse und Knotenlinie K

$\vartheta \equiv$  Winkel zwischen  $x_3$ -Achse und  $y_3$ -Achse

$\psi \equiv$  Winkel zwischen Knotenlinie K und  $y_1$ -Achse

(siehe Abb. 5.2) bedeuten die Änderungen der Winkel  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  Drehungen um die jeweils dazu senkrechte Achse, also

$\dot{\varphi} \equiv$  Drehung um  $x_3$ -Achse

$\dot{\vartheta} \equiv$  Drehung um Knotenlinie

$\dot{\psi} \equiv$  Drehung um  $y_3$ -Achse

Somit lassen sich diese Teildrehungen um  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\psi}$  durch die drei Vektoren  $\vec{e}_{x_3}$ ,  $\vec{e}_K$  und  $\vec{e}_{y_3}$  ausdrücken als  $\dot{\varphi} \vec{e}_{x_3}$ ,  $\dot{\vartheta} \vec{e}_K$ ,  $\dot{\psi} \vec{e}_{y_3}$ . Allerdings gehören diese drei Einheitsvektoren zu drei verschiedenen Koordinatensystemen,  $\vec{e}_{x_3}$  zum Laborsystem,  $\vec{e}_K$  zu einem intermediären System und  $\vec{e}_{y_3}$  zum körperfesten System, und wir bräuchten Sie ausgedrückt im körperfesten  $y$ -System, denn in diesem ist die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  gegeben. Um das zu erreichen, ist es am einfachsten, die Tatsache auszunutzen, dass die Drehmatrix  $R_\psi$  (Gl. (5.3)) den Vektor  $\dot{\vartheta} \vec{e}_K = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$  aus dem intermediären System ins  $y$ -System dreht, und dass konsekutive Drehungen mit  $R_\vartheta$  und dann  $R_\varphi$  den Vektor  $\dot{\varphi} \vec{e}_{x_3} = (0, 0, \dot{\varphi})$  aus dem Laborsystem ins  $y$ -System

drehen ( $\dot{\psi}\vec{e}_{y_3} = (0, 0, \dot{\psi})$  ist bereits im  $\mathbf{y}$ -System):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach dem Additionstheorem für Winkelgeschwindigkeiten setzt sich  $\vec{\omega}$  dann aus den drei Beiträgen zusammen:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv \dot{\psi} \vec{e}_\psi + \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (5.5)$$

Damit haben wir Gl. (5.4) gezeigt, und wir haben die Einheitsvektoren der Drehachsen  $\vec{e}_\psi$ ,  $\vec{e}_\vartheta$  und  $\vec{e}_\varphi$ , ausgedrückt in Koordinaten des  $\mathbf{y}$ -Systems gefunden; um diese Drehachsen ist der Kreisel bezüglich des Laborsystems verkippt.

#### 5.4 Der Trägheitstensor

Wir denken uns einen festen (starrten) Körper aus vielen Massenpunkten zusammengesetzt. Wir betrachten den Drehimpuls im Laborsystem:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{R} \vec{y}_i \times \dot{\mathbf{R}} \vec{y}_i)$$

wobei wir Gl. (5.1) verwendet haben. Mit  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \Omega$ ,  $\Omega = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$  und  $\Omega \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$  folgt

$$\vec{L} = \mathbf{R} \sum_i m_i \vec{y}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_i)$$

Dabei ist  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit im  $\mathbf{y}$ -System. Mit der “bac-cab-Regel” für das doppelte Vektorprodukt finden wir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mathbf{R} \sum_i m_i [\vec{\omega} (\vec{y}_i \cdot \vec{y}_i) - \vec{y}_i (\vec{y}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \mathbf{R} \sum_i m_i \begin{pmatrix} \omega_1 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i1} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \\ \omega_2 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i2} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \\ \omega_3 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i3} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

An dieser Gleichung sehen wir, dass  $\vec{L}$  linear in  $\vec{\omega}$  ist, sodass wir schreiben können

$$\vec{L} = \mathbf{R} \vec{S} = \mathbf{R} \theta \vec{\omega},$$

und aus Gl (5.6) können wir die Komponenten der Matrix  $\theta$  ablesen:

$$\theta = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_{i1}^2 + y_{i2}^2 & y_{i1} y_{i2} & y_{i1} y_{i3} \\ y_{i1} y_{i2} & y_{i1}^2 + y_{i3}^2 & y_{i2} y_{i3} \\ y_{i1} y_{i3} & y_{i2} y_{i3} & y_{i2}^2 + y_{i3}^2 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrix  $\theta$  handelt es sich um eine Darstellung des *Trägheitstensors* im  $\mathbf{y}$ -System, den wir auch durch die Vektoren  $\vec{y}$  ausdrücken können:

$$\theta = \sum_i m_i (\vec{y}_i^2 \mathbf{1} - \vec{y}_i \otimes \vec{y}_i),$$

mit den Matrixelementen

$$\theta_{jk} = \sum_i m_i (\vec{y}_i^2 \delta_{jk} - y_i^j y_i^k). \quad (5.7)$$

Für das Tensorprodukt zwischen Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gilt  $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T$ . Damit haben wir den folgenden Zusammenhang zwischen Drehimpuls  $\vec{L}$  im  $\mathbf{x}$ -System und Drehimpuls  $\vec{S}$  im  $\mathbf{y}$ -System gefunden:

$$\vec{L} = \mathbf{R} \vec{S} \quad \text{mit} \quad \vec{S} = \theta \vec{\omega}, \quad \text{d.h.} \quad S_j = \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} \omega_k$$

Für kontinuierliche starre Körper wird die Summation über die Punktmassen durch eine Volumenintegration, d.h. eine Integration über die Massenverteilung, ersetzt:

$$\sum_i m_i \rightarrow \int d\mathbf{m}(\vec{y}) = \int d^3\mathbf{y} \mu(\vec{y}),$$

wobei  $\mu(\vec{y})$  die Massendichte und  $d^3\mathbf{y}$  das Volumenelement sind. Dann ist  $\mathbf{M} = \int d\mathbf{m}$  die Gesamtmasse. Dann gilt wieder für den Drehimpuls im Laborsystem,

$$\vec{L} = \int d\mathbf{m} (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = \int d\mathbf{m} (\mathbf{R}\vec{y} \times \dot{\mathbf{R}}\vec{y}) = \mathbf{R} \int d\mathbf{m} (\vec{y} \times \underbrace{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\vec{y}}_{\vec{\omega} \times \vec{y}}) \equiv \mathbf{R}\vec{S}.$$

Dabei ist  $\vec{S}$  (und  $\vec{\omega}$ ) der Drehimpuls (und die Winkelgeschwindigkeit) im mitrotierenden Bezugssystem, dem  $\mathbf{y}$ -System.  $\vec{S}$  ist eine lineare Funktion der  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$S_j = \int d\mathbf{m} [\vec{y} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})]_j = \int d\mathbf{m} [\vec{y}^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{y}) \vec{y}]_j \equiv \sum_k \theta_{jk} \omega_k, \quad (5.8)$$

wobei der *Trägheitstensor*  $\theta$  die Komponenten

$$\theta_{jk} = \int d\mathbf{m} [\vec{y}^2 \delta_{jk} - y_j y_k] \quad (5.9)$$

hat. Ein rotierender Ring mit Radius  $R$  und Gesamtmasse  $M$  hat, z.B.,  $\theta_1 = \theta_2 = MR^2/2$ ,  $\theta_w = MR^2$ .

### Kinetische Energie

Die Geschwindigkeit eines Massenpunkts ist im Laborsystem  $\dot{\vec{x}} = \dot{\mathbf{R}}\vec{y}$ , im rotierenden System also  $\mathbf{R}^T \dot{\vec{x}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ . Also finden wir für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{m} (\vec{\omega} \times \vec{y}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{y}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{m} \vec{\omega} \cdot [\vec{y} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})],$$

wobei die letzte Identität eine Konsequenz der geometrischen Eigenschaften des Kreuzproduktes ist. Also können wir die kinetische Energie auch in der Form

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \omega_i \theta_{ik} \omega_k \quad (5.10)$$

schreiben.

### Hauptachsensystem

Den Trägheitstensor  $\theta$  kann man als lineare Abbildung  $\theta : \vec{\omega} \mapsto \vec{S} = \theta \vec{\omega}$  auffassen. Ferner ist  $\theta$  symmetrisch,  $\theta_{ik} = \theta_{ki}$  und die quadratische Form

$(\vec{\omega}, \theta \vec{\omega}) = 2T$  positiv definit, da dies die kinetische Energie  $T$  ist. Jede reelle, symmetrische Matrix lässt sich vollständig diagonalisieren. Es gibt somit stets ein orthonormiertes System von Eigenvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  von  $\theta$  mit positiven Eigenwerten  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Wählt man die  $\vec{e}_i$  als Basis des körperfesten Koordinatensystems, so wird die Matrix  $\theta_{ik}$  diagonal:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

und wir befinden uns im *Hauptachsensystem*. Gl. (5.8) und (5.10) vereinfachen sich zu

$$S_i = \theta_i \omega_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad T = \sum_i \theta_i \omega_i^2. \quad (5.12)$$

Im folgenden benutzen wir stets ein Hauptachsensystem.

### Eigenschaften des Trägheitstensors

- Der Trägheitstensor ist additiv: Die Trägheitsmomente eines Körpers sind gleich der Summen der Trägheitsmomente seiner Teile, wie man unmittelbar aus Gl. (5.7) oder (5.9) ablesen kann.
- Falls zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind:  $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$ , dann spricht man von einem *symmetrischen Kreisel*. Dann ist die Wahl der Hauptträgheitsrichtungen in der  $\mathbf{y}_1$ - $\mathbf{y}_2$ -Ebene beliebig.
- Falls alle drei Trägheitsmomente gleich sind, spricht man von einem *Kugelkreisel*. Dann gibt es freie Wahl für alle drei Hauptträgheitsachsen.
- Wenn der Körper eine Symmetrie besitzt, vereinfacht sich die Suche nach den Hauptachsen, denn Schwerpunkt und Hauptachsen haben gemeinsame Symmetrien.

Beispiel 1: Der Körper hat eine Symmetrieebene. Dann liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene, ebenso wie zwei der Hauptachsen. Die dritte Hauptachse steht senkrecht auf dieser Ebene.

Beispiel 2: Der Körper besitzt eine Symmetrieachse beliebiger Ordnung. Dann liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse, und eine Hauptachse fällt mit dieser Achse zusammen; die beiden anderen stehen senkrecht dazu.

Beispiele:

- 1) Dünner Stab der Länge  $l$ : Wir legen  $\mathbf{y}_3$  in Richtung der Stange und haben

in dieser Richtung kein Trägheitsmoment. Vom Schwerpunkt, der Mitte der Stange aus haben wir mit  $\mu = M/l$ :

$$I_1 = I_2 = \int d^3y \mu (y_2^2 + y_3^2) = \mu \int_{l/2}^{l/2} dy_3 y_3^2 = \mu \left[ \frac{y_3^3}{3} \right]_{l/2}^{l/2} = \frac{\mu l^3}{12} = \frac{M l^2}{12}$$

2) Kugel mit Radius  $R$ , Massendichte  $\mu = M/V = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ . Die drei Hauptträgheitsmomente sind gleich, und am leichtesten findet man ihre Summe:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3}(I_{11} + I_{22} + I_{33}) \\ &= \frac{1}{3} \left( \int d^3y \mu (y_2^2 + y_3^2) + \int d^3y \mu (y_1^2 + y_3^2) + \int d^3y \mu (y_1^2 + y_2^2) \right) \\ &= \frac{2\mu}{3} \int d^3y \bar{y}^2 = \frac{2\mu}{3} 4\pi \int_0^R dr r^4 = \frac{8\pi\mu}{3} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{8\pi\mu R^5}{15} \\ &= \frac{8\pi R^5}{15} \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned}$$

### Satz von Steiner

Bislang hatten wir als Bezugspunkt für die Berechnung des Trägheitstensors  $\theta$  den Schwerpunkt, d.h. den Ursprung des körperfesten  $y$ -Systems gewählt. Wir wollen jetzt den Trägheitstensor  $\theta'$  bestimmen, der sich ergibt, wenn wir den Schwerpunkt des starren Körpers in einen beliebigen Punkt  $\vec{a}$  im  $y$ -System verschieben. Er lässt sich leicht zu  $\theta$  in Beziehung setzen. Die Massenpunkte befinden sich jetzt an Orten  $\vec{y}'_i = \vec{y}_i + \vec{a} \forall i$ , und damit folgt:

$$\begin{aligned} \theta'_{jk} &= \sum_i m_i ((\vec{y}_i + \vec{a})^2 \delta_{jk} - (\vec{y}_i + \vec{a})^j (\vec{y}_i + \vec{a})^k) \\ &= \sum_i m_i ((\vec{y}_i^2 + \vec{a}^2 + \underbrace{\vec{y}_i \vec{a}}_{=0}) \delta_{jk} - \underbrace{\vec{y}_i^j \vec{y}_i^k}_{=0} - \underbrace{\vec{a}^j \vec{a}^k}_{=0} - \underbrace{\vec{y}_i^j \vec{a}^k}_{=0} - \underbrace{\vec{a}^j \vec{y}_i^k}_{=0}) \end{aligned}$$

Die linearen Terme in  $\vec{y}$  bzw. den Komponenten von  $\vec{y}$  sind Null, weil der Ursprung des  $y$ -Systems mit dem Schwerpunkt übereinstimmt:  $\sum_i m_i \vec{y}_i = \vec{0}$ . Damit erhalten wir den Satz von Steiner:

$$\theta'_{jk} = \theta_{jk} + M(\vec{a}^2 \delta_{jk} - \vec{a}^j \vec{a}^k), \quad (5.13)$$

mit  $M = \sum_i m_i$ .

### 5.5 Freier Kreisel

Der Drehimpulssatz  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  (siehe Kap. 1.7) gilt im Laborsystem und führt auf die Bewegungsgleichungen für den Kreisel. Für den freien Kreisel verschwindet das Drehmoment  $\vec{M} = 0$ . Mit  $\vec{L} = R\vec{S}$  finden wir

$$0 = \dot{\vec{L}} = \dot{R}\vec{S} + R\dot{\vec{S}}$$

und

$$\dot{\vec{S}} = -R^T \dot{R} \vec{S} = -\vec{\omega} \times \vec{S}. \quad (5.14)$$

Drücken wir nun  $\vec{S}$  mithilfe von Gl. (5.12) durch  $\omega_i$  aus, so erhalten wir für die  $\omega_i$  ein nicht-lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung, die *Eulerschen Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Im Allgemeinen, d.h. für nichtverschwindendes Drehmoment  $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3) \neq \vec{0}$  lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 &= \theta_1 \dot{\omega}_1 - (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 &= \theta_2 \dot{\omega}_2 - (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 &= \theta_3 \dot{\omega}_3 - (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

### Konstruktion von Poinsot

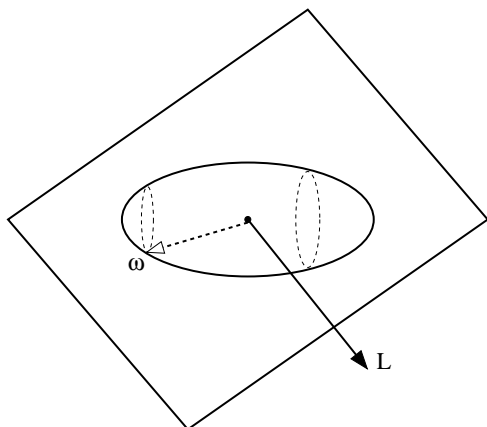
Die Bahnkurve des freien Kreisels  $\vec{L} = \text{const.}$  lässt sich geometrisch bestimmen durch die *Konstruktion von Poinsot*. Dazu betrachten wir die raumfeste (da  $\vec{L}$  fest) Ebene

$$(\vec{x}, \vec{L}) = (\vec{y}, \vec{S}) = 2E \quad (5.17)$$

(die Identität folgt aus  $\vec{x} = R\vec{y}$  und  $\vec{L} = R\vec{S}$ ), und das körperfeste Ellipsoid

$$(\vec{y}, \theta \vec{y}) = 2E, \quad (5.18)$$

wobei jeweils  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  als freie Variablen zu sehen sind und  $E$  die (erhaltene) kinetische Energie ist. Wie üblich notieren wir mit  $(, )$  das Skalarprodukt,



**Abbildung 5.3:** Die Konstruktion von Poinso mit dem körperfesten Ellipsoid  $(\vec{y}, \theta\vec{y}) = 2E$  und der Labor-festen Ebene  $(\vec{x}, \vec{L}) = 2E$

und Gl. (5.18) sollte mit der allgemeinen Gleichung für ein Ellipsoid,  $y_1^2/a^2 + y_2^2/b^2 + y_3^2/c^2 = 1$  verglichen werden.

Wir wollen nun zeigen, dass sich die raumfeste Ebene und das körperfeste Ellipsoid genau in einem Punkt ( $\vec{y} = \vec{\omega}$ ) schneiden. Haben wir dies gezeigt, so folgt, dass das Ellipsoid auf der Ebene abrollt, womit die Bahnkurve gefunden wäre.

Wir beginnen mit der Bemerkung, dass  $\vec{y} = \vec{\omega}$  sowohl (5.17) sowie (5.18) löst, da

$$(\vec{\omega}, \vec{S}) = (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) = 2E.$$

Damit ist jedes  $\vec{y}$  der Ebene (5.17) von der Gestalt  $\vec{y} = \vec{\omega} + \Delta\vec{y}$  (weil  $\vec{\omega}$  die Ebenengleichung erfüllt), mit  $(\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$  (weil  $\Delta\vec{y}$  in der Ebene liegt und  $\vec{S}$  senkrecht auf ihr steht). Diese Form setzen wir nun in die linke Seite von (5.18) ein:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} + \Delta\vec{y}, \theta(\vec{\omega} + \Delta\vec{y})) &= (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) + (\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) + (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \\ &= 2E + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \end{aligned}$$

da  $(\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) = (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) = (\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$ . Somit ist (5.18) dann und nur dann erfüllt, wenn  $\Delta\vec{y} = \vec{0}$  ist, denn  $(\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \geq 0$ .

### Stabilitätsanalyse

Als ersten (Spezial-)Fall betrachten wir nun

die *permanenten Rotationen* um eine Hauptachse, z.B.

$$\vec{\omega} = (\omega_1, 0, 0) = \text{konst.} \quad (5.19)$$

Man rechnet leicht nach, dass es sich dabei um eine Lösung der Eulerschen Gleichungen handelt. Wir untersuchen nun die Stabilität dieser Bewegung, indem wir die Eulerschen Gleichungen nach kleinen  $\omega_2$  und  $\omega_3$  entwickeln, d.h. wir vernachlässigen Terme mit  $\omega_2\omega_3$ .

Linear in  $\omega_2, \omega_3$  sind die Eulerschen Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

Somit bleibt  $\omega_1$  weiterhin konstant, und wir haben zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten,  $\omega_2, \omega_3$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $\mathbf{A}$  ergeben sich zu

$$\lambda^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3} \omega_1^2.$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  sind reell, falls  $\theta_1$  zwischen  $\theta_2$  und  $\theta_3$  liegt – dann hat (5.20) exponentiell wachsende Lösungen (Instabilität der permanenten Rotationen um die *mittlere* Hauptachse). Falls  $\theta_1$  das kleinste oder größte Hauptträgheitsmoment ist, so sind die Eigenwerte  $\lambda$  imaginär und das System führt kleine Schwingungen um die Lösung  $\vec{\omega} = (\omega_1, 0, 0)$  aus, die somit (marginal) stabil ist.

### Symmetrischer Kreisel

Wir betrachten nun die allgemeine Bewegung des freien *symmetrischen Kreisels* (=2 gleiche Trägheitsmomente). Sei die  $y_1$ -Achse die Figurenachse, also  $\theta_2 = \theta_3$ . Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0 & \rightarrow & \omega_1 = \text{konst.}, \text{ also} \\ \dot{\omega}_2 &= -\alpha \omega_3 & \alpha &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_3} \omega_1 = \text{konst.} \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha \omega_2 \end{aligned}$$

Diese gekoppelte Differentialgleichung lässt sich mit dem folgenden Ansatz lösen:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) + i\omega_3(t) &= (\omega_2(0) + i\omega_3(0)) e^{i\alpha t} \\ &= (\omega_2(0) \cos \alpha t - \omega_3(0) \sin \alpha t) + i(\omega_2(0) \sin \alpha t + \omega_3(0) \cos \alpha t) \end{aligned}$$



Da die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit reell sind, ist der Realteil des Ansatzes  $\omega_2(\mathbf{t})$ , und der Imaginärteil  $\omega_3(\mathbf{t})$ . Man kontrolliert leicht, dass der Ansatz die Differentialgleichung löst:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \frac{d}{dt}(\omega_2(0) \cos \alpha t - \omega_3(0) \sin \alpha t) \\ &= -\alpha \omega_2(0) \sin \alpha t - \alpha \omega_3(0) \cos \alpha t = -\alpha \omega_3(t) \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{d}{dt}(\omega_2(0) \sin \alpha t + \omega_3(0) \cos \alpha t) \\ &= \alpha \omega_2(0) \cos \alpha t - \alpha \omega_3(0) \sin \alpha t = \alpha \omega_2(t)\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass sich der Vektor  $\vec{\omega}$  im körperfesten System mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  um die Figurenachse, hier die  $\mathbf{y}_1$ -Achse, dreht. Dabei bleibt die Winkelgeschwindigkeit dem Betrag nach konstant. Diese zeitliche Änderung von  $\vec{\omega}$  heißt *Präzession* ( $\vec{\omega}$  präzediert um die Figurenachse). Sie ist in Übereinstimmung mit der Konstruktion von Poincaré. Die Präzessionsfrequenz  $\alpha$  ist kleiner als die Frequenz  $|\vec{\omega}|$ , und sie ist umso kleiner, je kleiner  $\theta_3 - \theta_1$  ist.

## 5.6 Schwerer, symmetrischer Kreisel

Der nächste wichtige Fall ist der symmetrische Kreisel im homogenen Schwerfeld der Erde, der *schwere symmetrische Kreisel*.

Wir setzen  $\theta_1 = \theta_2$  ( $\mathbf{y}_3$ -Achse = Figurenachse) und nehmen an, dass der Schwerpunkt auf der  $\mathbf{y}_3$ -Achse liegt und die körperfeste Koordinate  $(0, 0, l)$  hat ( $l > 0$  fest). In den Eulerschen Winkeln wird die kinetische Energie zu

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\theta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\theta_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2.\end{aligned}$$

Wenn die  $\mathbf{x}_3$ -Achse in der Vertikalen liegt, so ist die potentielle Energie  $V = mgl \cos \vartheta$  und die Lagrangefunktion  $L = T - V$  wird zu

$$L = \frac{\theta_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\theta_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (5.21)$$

### Erhaltungssätze

Da  $L$  nicht von  $\mathbf{t}$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  abhängt, besitzt das System die drei Erhaltungsgrößen

$$T + V = E \quad (5.22)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(\theta_1 \sin^2 \vartheta + \theta_3 \cos^2 \vartheta) + \dot{\psi} \theta_3 \cos \vartheta \equiv M_z \quad (5.23)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \equiv M_3, \quad (5.24)$$

deren Konstanten wir mit  $E$ ,  $M_z$  und  $M_3$  bezeichnen.  $p_\varphi$  und  $p_\psi$  sind die Projektionen des Drehimpulses  $\vec{S}$  auf  $\vec{e}_\varphi$  (Vertikale) beziehungsweise  $\vec{e}_\psi$  (Figurenachse):

$$p_\varphi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi \quad p_\psi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\psi$$

Mit Gl. (5.4) ist

$$\vec{S} = \theta \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \theta_1(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) \\ \theta_2(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) \\ \theta_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \end{pmatrix},$$

und mit der Definition von  $\vec{e}_\varphi$  und  $\vec{e}_\psi$  aus Gl. (5.5) rechnet man  $p_\varphi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi$  und  $p_\psi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\psi$  leicht nach. Die Größen  $E = T + V$  und  $p_\varphi$  sind auch beim allgemeinen schweren Kreisel erhalten,  $p_\psi$  jedoch nur beim symmetrischen Kreisel.

### Bewegungsgleichungen

Aus (5.23) und (5.24) erhalten wir

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{\theta_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta, \quad (5.25)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (5.26)$$

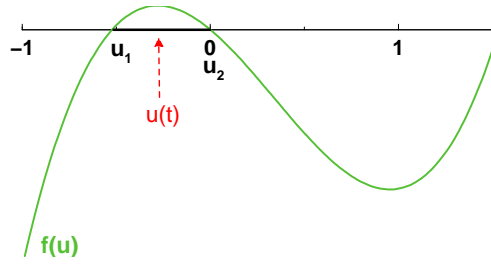
d.h.  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  sind durch  $\vartheta$  bestimmt. Kennen wir also erst einmal  $\vartheta(\mathbf{t})$ , können wir aus Integration von (5.26) und (5.25)  $\varphi(\mathbf{t})$  und  $\psi(\mathbf{t})$  erhalten.

Die Bestimmungsgleichung für die *Nutationsbewegung*  $\vartheta(\mathbf{t})$  erhalten wir, indem wir (5.26) und (5.25) in (5.22) einsetzen:

$$E = \frac{\theta_1}{2} \left( \frac{(M_z - M_3 \cos \vartheta)^2}{\theta_1^2 \sin^2 \vartheta} + \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{\theta_3 M_3^2}{2 \theta_3^2} + mgl \cos \vartheta$$

und damit

$$\frac{2E'}{\theta_1} = \frac{2}{\theta_1} \left( E - \frac{M_3^2}{2\theta_3} \right) = \dot{\vartheta}^2 + \frac{(M_z - M_3 \cos \vartheta)^2}{\theta_1^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2mgl}{\theta_1} \cos \vartheta. \quad (5.27)$$



**Abbildung 5.4:** Qualitativer Verlauf der Funktion  $f(u)$ , siehe Gl. (5.29).

Wir führen eine Variablentransformation  $u = \cos \vartheta$  (und damit  $\dot{u} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$ ,  $\dot{u}^2 = \dot{\vartheta}^2(1 - u^2)$ ) durch und setzen

$$a = \frac{M_z}{\theta_1}; \quad b = \frac{M_3}{\theta_1}; \quad \alpha = \frac{2E'}{\theta_1}; \quad \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}. \quad (5.28)$$

Dann lautet (5.27)

$$\alpha = \frac{\dot{u}^2}{(1 - u^2)} + \frac{(a - bu)^2}{(1 - u^2)} + \beta u$$

und aufgelöst nach  $\dot{u}^2$

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 \equiv f(u) \quad (5.29)$$

Hier ist  $u$  nur für  $-1 \leq u \leq 1$  definiert. Wegen  $\dot{u}^2 > 0$  ist die allgemeine Lösung auf das Gebiet mit  $f(u) \geq 0$  beschränkt. Die Lösung ist dort wegen  $du/dt = \sqrt{f(u)}$

$$t(u) - t(u_0) = \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \quad (5.30)$$

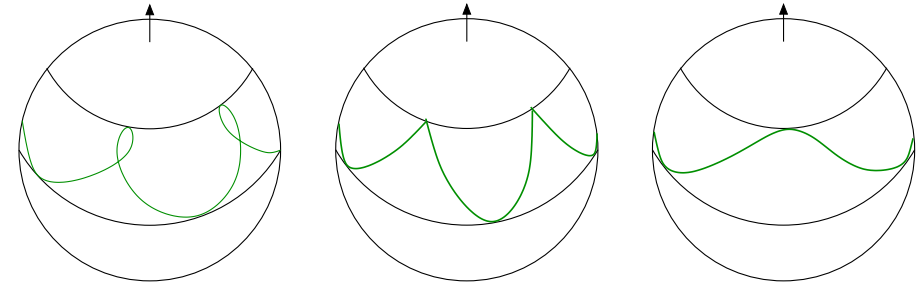
Hieraus ergibt sich  $u(t) = \cos \vartheta(t)$  und damit  $\vartheta(t) = \arccos u(t)$ .

### Diskussion der Lösungen

Die Funktion  $f(u)$  hat die Eigenschaften

$$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 \leq 0, \quad f(u) \sim \beta u^3, \quad (u \rightarrow \pm \infty)$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen muss ferner  $f(u) = \dot{u}^2$  irgendwo im Intervall  $-1 \leq u = \cos \vartheta \leq +1$  größer als Null sein.



**Abbildung 5.5:** Schematische Illustration der Nutationsbewegung des schweren, symmetrischen Kreisels. Links:  $u_1 < a/b < u_2$ , Mitte:  $a/b = u_2$ , Rechts:  $a/b > u_2$ .

Daraus ergibt sich, dass  $u_1 \leq u \leq u_2$  der Bereich energetisch zulässiger Lösungen ist (siehe Abb. 5.4). Dabei sind  $u_1$  und  $u_2$  Nullstellen erster Ordnung von  $f(u)$ , d.h. Umkehrpunkte der Nutationsbewegung.  $u(t)$  pendelt periodisch zwischen  $u_1$  und  $u_2$  mit der Periode

$$T = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}.$$

Dieselbe Periode hat

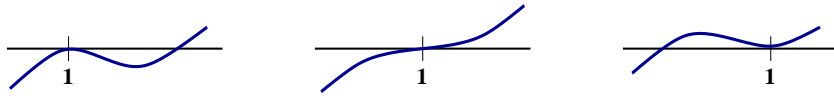
$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

$\dot{\varphi}$  wechselt das Vorzeichen nur, falls  $u_1 < a/b < u_2$ . Der Grenzfall  $u_1 = a/b$  ist ausgeschlossen, denn dann wäre auch  $u_1 = \alpha/\beta$ , d.h.  $\alpha - \beta u = \beta(\alpha/\beta - u) = \beta(u_1 - u)$  und  $f(u)$  negativ im Intervall  $[u_1, u_2]$ . Für die Richtung der Figurenachse gibt es somit drei Bewegungstypen, die wir auf der Einheitskugel darstellen können (siehe Abb. 5.5).

Die Abbildung zeigt die Position des Kreisels als Punkte  $(\vartheta(t), \varphi(t))$  auf der Einheitskugel. Der Winkel  $\psi(t)$  entspricht der Rotation des Kreisels um seine Symmetrieachse (Figurenachse) und spielt daher zur Angabe der Orientierung des Kreisels im Raum keine Rolle. Die Punkte  $(\vartheta(t), \varphi(t))$  heißen *Locus* des Kreisels. Der Locus verläuft also zwischen den zwei Kreisen  $\vartheta_1 = \arccos u_1$  und  $\vartheta_2 = \arccos u_2$  (den Umkehrpunkten). Die Gestalt der Locuskurve ist wegen

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}$$

im Wesentlichen durch den Wert der Wurzel von  $a - bu$ , also  $u_0 = a/b$  bestimmt. Die drei Fälle sind:



**Abbildung 5.6:** Illustration der Funktion  $(1-u)^2 [2\alpha - a^2]$ . Links:  $2\alpha < a^2$ , Mitte:  $2\alpha = a^2$ , Rechts:  $2\alpha > a^2$ .

- 1) Mit Anfangsbedingungen, die  $u_0 > u_2$  ergeben, wird  $\dot{\varphi}$  immer dasselbe Vorzeichen für die erlaubten Neigungswinkel zwischen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  haben (siehe Abb. 5.5 rechts); der Kreisel präzediert um die vertikale Achse, aber nicht regulär wie beim freien Kreisel, sondern mit Nutationen (Nickbewegungen).
- 2)  $u_0 = a/b$  liegt zwischen  $u_1$  und  $u_2$ . Dann ist die Richtung der Präzession an den zwei Begrenzungskreisen verschieden, und die Bewegung erfolgt in Schleifen (siehe Abb. 5.5 Mitte). Im Mittel wird  $\dot{\varphi}$  aber nicht Null sein, sodass die Präzession in eine Richtung fortschreitet.
- 3)  $u_0$  fällt mit einer Wurzel von  $f(u)$  zusammen. An dieser Stelle verschwinden  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\varphi}$ , und der Locus hat Spitzen, die einen Begrenzungskreis berühren (siehe Abb. 5.5 links).

### Stabilität des senkrecht stehenden schweren Kreisels

Der Kreisel rotiere um die  $x_3 = y_3$ -Achse. Dann ist

$$E' = mgl; \quad M_3 = M_z = M, \quad \text{also}$$

$$\alpha = \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}; \quad a = b = \frac{M}{\theta_1}, \quad \text{und}$$

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1-u)^2 [\alpha(1+u) - a^2] \approx (1-u)^2 [2\alpha - a^2] \quad (u \approx 1)$$

hat eine doppelte Nullstelle bei  $u = 1$ . Der Verlauf hängt vom Vorzeichen von  $(2\alpha - a^2)$  ab (siehe Abb. 5.6):

Für  $2\alpha > a^2$  (d.h.  $M^2 < 4\theta_1 mgl$ ) ist die Lösung  $u = 1$  instabil, da links von  $u = 1$  ein energetisch erlaubtes Intervall mit  $f(u) = \dot{u}^2 > 0$  anschließt. Der senkrecht aufgesetzte Spielkreisel beginnt also zu wackeln, sobald  $M^2$  durch Reibungsverluste unter die Stabilitätsgrenze  $4\theta_1 mgl$  sinkt.

## 6. Hamiltonische Formulierung

### 6.1 Kanonische Gleichungen

Die Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  ist eine Funktion der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_f)$  und der generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)$ . Die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1 \dots f) \quad (6.1)$$

bestimmen die Bewegungen  $\mathbf{q}(t)$  des Systems. Der generalisierte Impuls

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (6.2)$$

spielt in vielen Zusammenhängen eine wichtige Rolle, z.B. in der Quantenmechanik. Es ist daher wünschenswert, das mechanische System nicht als Funktion der generalisierten Variablen  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , sondern als Funktion der *kanonischen* Variablen  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  zu formulieren. Zweck dieser Variablentransformation ist, die mechanische Bewegung im Phasenraum  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  statt im Konfigurationsraum zu untersuchen. Wir suchen also ein Potential, das uns die Phasenraumbewegungsgleichung in Analogie zu den Euler-Lagrange-Gleichungen liefert. Dieses Potential werden wir in der *Hamilton-Funktion*  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  finden, die aus der Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  durch eine *Berührungstransformation* (auch Legendre-Transformation genannt) hervorgeht. In dieser Transformation wird die Ableitung einer Funktion nach einer Variablen  $(\partial L / \partial \dot{q}_\alpha)$  durch eine neue Variable  $p_\alpha$  ersetzt.

### Legendre-Transformation

Die Frage nach dem Austausch von einem Satz von Koordinaten durch einen anderen gibt es in der Physik mehrfach (außer in der Mechanik vor allem in der Thermodynamik); man löst sie mithilfe der Legendre-Transformation.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $f'' > 0$  und sei  $u = f'(x)$ . Dann ist  $u = f'(x)$  invertierbar (da  $u' = f'' > 0$  und daher

monoton wächst), und es gilt

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (f')^{-1}(\mathbf{u}) \quad (6.3)$$

Wir suchen nun ein Potential für  $\mathbf{x}$  als Funktion von  $\mathbf{u}$ , d.h. eine Funktion  $g(\mathbf{u})$ , sodass

$$\frac{dg}{d\mathbf{u}} = (f')^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$$

(An dieser Stelle ist das Vorzeichen von  $\pm \mathbf{x}$  frei wählbar, und  $+\mathbf{x}$  ist die Konvention in der Mechanik.) Man findet  $g$ , indem man betrachtet:

$$df = \mathbf{u}d\mathbf{x} = d(\mathbf{x}\mathbf{u}) - \mathbf{x}d\mathbf{u}$$

$$\curvearrowright d(\mathbf{x}\mathbf{u} - f) = \mathbf{x}d\mathbf{u}$$

Also ist das gesuchte Potential

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u})\mathbf{u} - f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \mathbf{x}f'(\mathbf{x}) - f,$$

und es gilt dann

$$\frac{dg}{d\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{u}}\mathbf{u} + \mathbf{x} - f'(\mathbf{x}(\mathbf{u}))\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{u}} = \mathbf{x}$$

wegen  $f'(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ .

Hängt die Funktion  $f$  noch von weiteren Variablen ab, muss man entsprechend die totalen Ableitungen durch partielle Ableitungen ersetzen:

Die Funktion  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  sei in allen  $\mathbf{x}_i$  zweimal stetig differenzierbar, und es sei

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_k \partial \mathbf{x}_i}\right) \neq 0$$

Dann sind die Gleichungen

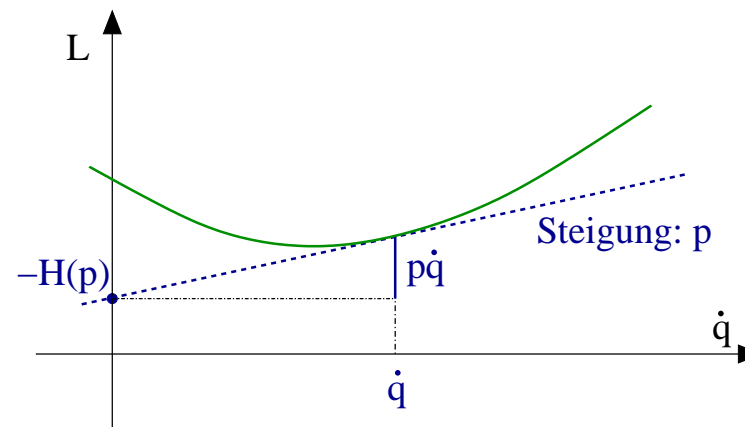
$$\mathbf{u}_k = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n), \quad k = 1, \dots, m$$

lokal eindeutig nach den  $\mathbf{x}_i$  auflösbar, d.h.

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n), \quad i = 1, \dots, m$$

Die Legendretransformierte ist dann definiert als

$$g(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{z}_k - f.$$



**Abbildung 6.1:** Graphische Interpretation der Legendre-Transformation  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Ziehen wir für festes  $\mathbf{q}$   $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}$  von  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  ab so erhalten wir  $-H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ .

Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{z}_k; \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}_i} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}_i}; \quad \det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{u}_k \partial \mathbf{u}_i}\right) \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}\right) = 1$$

Wie im eindimensionalen Fall ist die Legendretransformation umkehrbar eindeutig.

### Kanonische Gleichungen

Um nun in der Lagrangefunktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  durch Impulse zu ersetzen, löst man das System von  $f$  Gleichungen (6.2) nach  $\dot{\mathbf{q}}$  auf und setzt die so gefundenen  $\dot{\mathbf{q}}_\alpha = \dot{\mathbf{q}}_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  in die Legendretransformierte der Lagrangefunktion, die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha \dot{\mathbf{q}}_\alpha - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (6.4)$$

ein. Wir bemerken, dass für autonome (d.h. zeitunabhängige) Systeme nach Kap. 4.7 die Hamilton-Funktion (6.4) gerade die erhaltene Gesamtenergie darstellt. Die Legendre-Transformation lässt sich auch graphisch deuten, wie Abb. 6.1 für eine Dimension verdeutlicht.

Wir suchen jetzt nach den Bewegungsgleichungen für die Hamiltonfunktion, die den Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion entsprechen.

Dazu berechnen wir das totale Differential von H:

$$dH = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (6.5)$$

Genauso können wir auch das totale Differential der rechten Seite von  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  bilden:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) &= \sum_{\alpha} \left( \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} + p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha} \left( \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dabei haben wir  $p_{\alpha} = \partial L / \partial \dot{q}_{\alpha}$  verwendet. Durch Koeffizientenvergleich zwischen den Gleichungen (6.5) und (6.6) finden wir

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha}; \quad \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = -\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\frac{\partial L}{\partial t} dt$$

und mit den Euler-Lagrange-Gleichungen  $\dot{p}_{\alpha} = \partial L / \partial q_{\alpha}$  erhalten wir die *kanonischen Gleichungen* (Hamiltonsche Gleichungen)

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$$

$$(\alpha = 1 \dots f). \quad (6.7)$$

Dieses sind  $2f$  Differentialgleichungen 1. Ordnung für die  $2f$  Koordinaten

$$\mathbf{x} = (x_1 \dots x_{2f}) \equiv (\mathbf{q}_1 p_1, \mathbf{q}_2 p_2, \dots, \mathbf{q}_f p_f) \quad (6.8)$$

im *Phasenraum* mit  $x_{2j-1} = q_j$  und  $x_{2j} = p_j$  ( $j = 1, \dots, f$ ). Wir bemerken, dass die  $f$  Lagrange-Gleichungen (6.1) i.a. von 2. Ordnung sind. Eine ähnliche Umwandlung von  $f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung in  $2f$  Differentialgleichungen 1. Ordnung hatten wir schon in einem anderen Zusammenhang (Schwingungen) in Kap. 3 durchgeführt.

### Das Hamiltonsche Prinzip im Phasenraum

Nach Definition (6.4) der Hamiltonfunktion gilt für die Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

Die Bewegungsgleichungen (6.7) sollten sich also auch aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} dt \left( \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) = 0$$

herleiten lassen, wobei die Koordinaten  $q_{\alpha}(t_i)$  an den Endpunkten  $t_i$  vorgegeben sind. Das ist nicht ganz selbverständlich, da im Phasenraum  $q_{\alpha}$  und  $p_{\alpha}$  unabhängige Variable sind, während in der ursprünglichen Formulierung des Variationsprinzips die Variation von  $\dot{q}$  durch die von  $q$  vorgegeben ist. Es gilt aber:

$$\begin{aligned} \delta \int_{(1)}^{(2)} dt \left( \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) &= \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_{\alpha} \left( p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} + \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) \\ &= \left[ p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right]_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_{\alpha} \left( \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha} + \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) \\ &= \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_{\alpha} \left[ \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile den ersten Term der rechten Seite partiell integriert haben. Die Variationen  $\delta q_{\alpha}$  verschwinden an den Endpunkten (1) und (2). Also erhalten wir wieder die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

### Allgemeine Vorgehensweise beim Hamilton-Formalismus

1.  $L = T + V$  in generalisierten Koordinaten  $q, \dot{q}$  aufstellen.
2. Generalisierte Impulse  $p_{\alpha} = \partial L / \partial \dot{q}_{\alpha}$  berechnen.
3. Die Gleichungen  $p_{\alpha} = z_{\alpha}(\dot{q}_{\alpha})$  aus Schritt 2 invertieren, um die  $\dot{q}_{\alpha}$  als Funktion der  $p_{\alpha}$  zu bekommen.
4. Hamiltonfunktion  $H = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  berechnen und  $\tilde{A} \frac{1}{4}$ berall die  $\dot{q}_{\alpha} = \dot{q}_{\alpha}(p_{\alpha})$  einsetzen.
5. Hamiltonsche Gleichungen aufstellen.

### Beispiel: Teilchen im Potential

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}); \quad \vec{p} = m \dot{\vec{x}}$$



Falls  $A$  nicht explizit von der Zeit abhängig ist, also  $A = A(\mathbf{x})$ , dann ist  $A$  dann und genau dann eine Erhaltungsgröße, falls die Poissonklammer mit der Hamiltonfunktion verschwindet,

$$A(\mathbf{x}) \text{ erhalten} \iff \{A, H\} = 0.$$

Offensichtlich ist  $H$  selber erhalten, denn

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Setzt man die Koordinate  $q_j$  anstelle von  $A$  in (6.12) ein, so erhält man

$$\frac{dq_j}{dt} = \{q_j, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$

also, wie erwartet, die Bewegungsgleichung für  $q_j$ . Analog erhalten wir für  $p_j$

$$\frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Also lässt sich die gesamte Hamiltonische Dynamik mit Hilfe der Poissonklammern schreiben.

### Rechenregeln

Folgende Rechenregeln gelten für die Poissonklammern:

$$\text{Antisymmetrie} \quad \{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\},$$

$$\text{Linearität} \quad \{\varphi_1 + \varphi_2, \psi\} = \{\varphi_1, \psi\} + \{\varphi_2, \psi\},$$

und die *Jacobi-Identität*

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + \{\{\psi, \chi\}, \varphi\} + \{\{\chi, \varphi\}, \psi\} = 0.$$

Die Poissonklammern für Impuls- und Ortskoordinaten, auch als *fundamentale Poissonklammern* bezeichnet, lauten

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \quad \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (6.13)$$

Das ist leicht nachzurechnen, z.B. für die letzte Beziehung

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \sum_{\gamma=1}^f \left( \underbrace{q_\alpha}_{=\delta_{\alpha\gamma}} \underbrace{p_\beta}_{=\delta_{\beta\gamma}} - \underbrace{q_\alpha}_{=0} \underbrace{p_\beta}_{=0} \right) = \delta_{\alpha\beta}.$$

## 6.3 Quantenmechanik

An dieser Stelle ein kleiner Ausblick auf die Quantenmechanik, die kein eigentlicher Stoff dieser Vorlesung ist. Man mag sich fragen, was es denn soll, dass man eine Formulierung der Mechanik nach der anderen entwickelt, also die

- Newtonsche Mechanik
- Lagrange-Mechanik
- Hamiltonische Mechanik,

wenn man doch mit der Lagrange-Formulierung schon im wesentlichen alles berechnen kann. Wie wir gesehen haben liegt die Bedeutung der Hamiltonischen Mechanik zum einen in der Ästhetik, der vollkommenen Äquivalenz von Symmetrie und Bewegung (siehe unten, Kap. 6.4 ). Eine weitere und heutzutage sehr viel wichtigere Bedeutung der Hamiltonischen Mechanik ist ihre Bedeutung als Ausgangspunkt zum Übergang zur Quantenmechanik. Diesen Zusammenhang wollen wir nun kurz beschreiben, auch wenn man ihn vollständig erst nach dem Studium der Quantenmechanik verstehen kann.

### Quantisierung

Allgemein stellt sich das Problem: Gegeben ist ein gewisses klassisches System - wie *quantisiere* ich es? Gesucht ist also eine quantenmechanische Beschreibung, die im *klassischen Grenzfall* (Plancksches Wirkungsquantum  $\hbar \rightarrow 0$ ) die gegebenen klassischen Gleichungen reproduziert.

Ganz allgemein betrachtet man in der Quantenmechanik nicht den Phasenraum, sondern den Hilbertraum, der der Raum aller Funktionen  $f(q_1 \dots q_f)$  ist. Weiter werden generell alle Funktionen auf dem Phasenraum zu Operatoren auf dem Hilbertraum (Operatoren sind in geeigneter Basis Matrizen).

Ebenso wie nun die Poissonklammer die mathematische Struktur des Phasenraums für die Mechanik bestimmt, so stellt der Kommutator von zwei Operatoren  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  die Klammer da, die dem Hilbertraum die mathematische Struktur der Quantenmechanik verleiht. Der Unterschied zwischen klassischer und Quanten-Mechanik liegt also in den zwei Realisierungen der abstrakten Klammer, die den jeweiligen Räumen die mathematische Struktur verleihen.

### Korrespondenzprinzip

Der Übergang Hamilton-Mechanik  $\rightarrow$  Quantenmechanik (Quantisierung) geht von den *kanonisch konjugierten* Variablen  $q_i$  und  $p_i$  aus. Dabei gelten folgende Äquivalenzen.

	<u>Mechanik</u>	<u>Quantenmechanik</u>
1.	Phasenraum	Hilbertraum
2.	$A(q_i, p_i)$	linearer hermitescher Operator $\hat{A}$
3.	Messgröße (Observable)	Eigenwert (Erwartungswert) des Operators
4.	Hamiltonfunktion $H$	Hamiltonoperator $\hat{H}$
5.	$q_i, p_i$	Operatoren $\hat{q}_i, \hat{p}_i$
6.	Poissonklammer $\{A, B\}$	Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
7.	$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$	$\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \delta_{ij}$
8.	$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$	$\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$

Diese Tabelle beschreibt das sogenannte *Korrespondenzprinzip*.

#### 6.4 Kanonische Transformationen

Wir betrachten alle solche Transformationen des Phasenraumes

$$(x_1 \dots x_{2f}) \mapsto (y_1 \dots y_{2f}) = (y_1(x) \dots y_{2f}(x))$$

auf sich, die die kanonischen Gleichungen (6.7) invariant lassen. Eine Motivation, eine solche *kanonische Transformation* durchzuführen, ist die Aussicht, dass nach der Transformation die Bewegungsgleichungen besonders einfach sind.

#### Jacobi-Matrizen

Die Invarianz der kanonischen Gleichungen ist also mit

$$\sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad (i = 1 \dots 2f) \quad (6.14)$$

gleichbedeutend. Um festzustellen für welche  $y = y(x)$  (6.14) erfüllt ist, müssen wir (6.14) auf  $x$ -Koordinaten transformieren.

$$\sum_{k,l} \varepsilon_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \dot{x}_l = \sum_k \underbrace{\frac{\partial H}{\partial x_k}}_{\sum_l \varepsilon_{kl} \dot{x}_l} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$$

also nach Vertauschen der Summationsreihenfolge

$$\sum_l \left( \sum_k \varepsilon_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \right) \dot{x}_l = \sum_l \left( \sum_k \varepsilon_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \dot{x}_l.$$

Diese Gleichung muss für alle  $l$  gelten. Wir definieren die Jacobi-Matrix  $A$  als Matrix aller erster partieller Ableitungen:

$$A_{kl} = \frac{\partial y_k}{\partial x_l}, \quad (A^{-1})_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial y_i}, \quad (6.15)$$

denn

$$\sum_l A_{kl} (A^{-1})_{li} = \sum_l \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} = \frac{\partial y_k}{\partial y_i} = \delta_{ki}.$$

Wir finden somit

$$\sum_k \varepsilon_{ik} A_{kl} = \sum_k \varepsilon_{kl} (A^{-1})_{ki} = \sum_k (A^{-1})_{ik}^T \varepsilon_{kl},$$

was wir in Matrixform als

$$\varepsilon A = (A^{-1})^T \varepsilon = (A^T)^{-1} \varepsilon$$

schreiben können. Wir finden somit für die *symplektischen Matrizen*  $A$  die Bedingung

$$\boxed{A^T \varepsilon A = \varepsilon} \quad (6.16)$$

Symplektische Matrizen sind genau durch diese Gleichung definiert, in Worten: sie lassen eine antisymmetrische Bilinearform invariant. Die symplektischen Matrizen  $A$  bilden eine Gruppe und aus (6.16) folgt

$$|\det A| = 1, \quad (6.17)$$

es gilt sogar  $\det A = +1$ , was wir hier nicht beweisen. Eine Koordinatentransformation  $(x_1 \dots x_{2f}) \mapsto (y_1 \dots y_{2f})$  heißt kanonisch, falls ihre Jacobi Matrix (6.15) symplektisch ist. Für eine gegebene Koordinatentransformation  $y = y(x)$  im Phasenraum zeigt man also, dass sie kanonisch ist, indem man ihre Jacobi-Matrix  $A(y)$  berechnet und für diese die Gültigkeit von Gl. (6.16) nachweist.

#### Beispiel: Transformation der Lagekoordinaten

Beliebige Transformationen

$$(q_1 \dots q_f) \mapsto (Q_1 \dots Q_f), \quad (6.18)$$



der Lagekoordinaten (sogenannte *Punkttransformationen*) sind bei entsprechender Transformation der Impulse

$$(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_f) \mapsto (\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_f), \quad (6.19)$$

kanonische Transformationen. Begründung: Die Lagrange-Gleichungen sind invariant unter beliebigen Transformationen der Art (6.18), genauer: Es seien

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, t), \quad q_\beta = q_\beta(Q_1, \dots, Q_f, t), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, f$$

Dann folgt aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, f$$

für  $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\beta} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\beta}, \quad \beta = 1, \dots, f$$

(für den Beweis, siehe z.B. Nolting). Damit sind nach der Legendre-Transformation (6.4) auch die kanonischen Gleichungen (6.7) forminvariant unter beliebigen Punkttransformationen. Die Transformation (6.19) der Impulse ist dabei durch

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_\alpha} L(Q, \dot{Q}) = \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha}}_{p_\beta} + \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \underbrace{\frac{\partial q_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha}}_{=0} = \sum_\beta p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}, \quad (6.20)$$

gegeben, denn  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  und  $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$  sind unabhängige Variablen und somit  $\partial q_\beta / \partial \dot{Q}_\alpha = 0$ .

Die Klasse der kanonischen Transformationen ist jedoch sehr viel größer als (6.18), insbesondere können auch Lagekoordinaten und Impulse vermischt werden. Dies ist ein Vorzug der Hamiltonischen Formulierung.

### 6.5 Kanonische Flüsse

Ganz analog zur Definition eines Flusses in Kap. 4.5 ist im Phasenraum  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{q}_f \mathbf{p}_f)$  ein Fluss  $\phi^\lambda$  mit

$$\phi^\lambda : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x}, \lambda) = \phi^\lambda(\mathbf{x})$$

eine ein-parametrische Schar von Abbildungen. Jeder Fluss definiert ein Vektorfeld

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\lambda} \phi_i^\lambda(\mathbf{x}), \quad (i = 1 \dots 2f).$$

Umgekehrt definiert ein Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{y})$  via

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{d\lambda} = \mathbf{v}_i(\mathbf{y}), \quad (i = 1 \dots 2f) \quad (6.21)$$

zu jeder Anfangsbedingung  $\mathbf{y}_i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}_i$  einen Fluss  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x}, \lambda)$ .

### Vektorfelder

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, diejenigen Vektorfelder zu charakterisieren, die via (6.21) *kanonische Flüsse* erzeugen, also solche Flüsse, für die die Jacobi Matrix

$$A_{ik}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}, \lambda)$$

für alle Werte des Schar-Parameters  $\lambda$  symplektisch ist, also (6.16) erfüllt. Nach (6.21) gilt

$$\dot{A}_{ik} \equiv \frac{\partial A_{ik}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{v}_i(\mathbf{y}) = \sum_l \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial y_l}}_{V_{il}} \underbrace{\frac{\partial y_l}{\partial x_k}}_{A_{lk}},$$

also

$$\dot{A}_{ik} = \sum_l V_{il} A_{lk} \quad \text{oder} \quad \dot{A} = VA$$

in Matrixnotation. Um die Bedingung für diejenigen  $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \lambda)$  zu finden, für die der erzeugte Fluss kanonisch ist, bemerken wir zunächst, dass für  $\lambda = 0$  die Jacobi-Matrix  $A$  die Einheitsmatrix ist und somit trivialerweise symplektisch ist (denn  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$  definiert die Anfangsbedingung). Damit die Bedingung (6.16)

$$A^T(\lambda) \varepsilon A(\lambda) = \varepsilon$$

für alle  $\lambda$  erfüllt ist, genügt es also, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} (A^T \varepsilon A) = (VA)^T \varepsilon A + A^T \varepsilon VA \\ &= A^T V^T \varepsilon A + A^T \varepsilon VA = A^T (V^T \varepsilon + \varepsilon V) A \end{aligned}$$

für alle  $\lambda$  erfüllt ist. Wegen  $\det A \neq 0$  ist dies mit

$$V^T \varepsilon + \varepsilon V = 0$$

äquivalent, und wegen  $\varepsilon^T = -\varepsilon$  zu

$$-\mathbf{V}^T \varepsilon^T + \varepsilon \mathbf{V} = 0, \quad (\varepsilon \mathbf{V})^T = \varepsilon \mathbf{V},$$

d.h. (da  $\varepsilon$  konstant ist)

$$(\varepsilon \mathbf{V})_{ki} = \sum_l \varepsilon_{kl} V_{li} = \sum_l \varepsilon_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} v_l(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \underbrace{\sum_l \varepsilon_{kl} v_l(\mathbf{y})}_{\equiv g_k(\mathbf{y})}$$

und

$$(\varepsilon \mathbf{V})_{ki}^T = \sum_l \varepsilon_{il} V_{lk} = \sum_l \varepsilon_{il} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} v_l(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} \underbrace{\sum_l \varepsilon_{il} v_l(\mathbf{y})}_{\equiv g_i(\mathbf{y})}.$$

Aus  $(\varepsilon \mathbf{V})^T = \varepsilon \mathbf{V}$  folgt somit dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} g_k(\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{2f}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} g_i(\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{2f})$$

Deshalb muss  $g(\mathbf{y})$  der Gradient einer Funktion  $G(\mathbf{y})$  sein (vergleiche Kap. 1.7, Gl (1.18)), also

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} G(\mathbf{y}) = g_i(\mathbf{y}) = \sum_l \varepsilon_{il} v_l(\mathbf{y})$$

und damit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\lambda} = \frac{\partial G(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_i}} \quad (i = 1 \dots 2f). \quad (6.22)$$

Fazit: Die Differentialgleichung  $d\mathbf{y}_i/d\lambda = v_i(\mathbf{y})$ , die kanonische Flüsse charakterisiert, hat die Form von kanonischen Gleichungen (Gl. (6.22)), wobei  $\lambda$  die Rolle der Zeit und  $G$  die der Hamiltonfunktion spielt. Man kann die obige Schlussweise auch umkehren und folgern, dass  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \lambda)$  dann und genau dann ein kanonischer Fluss ist, falls eine Funktion  $G(\mathbf{y})$  auf dem Phasenraum existiert, so dass (6.22) erfüllt ist, d.h. kanonische Gleichungen erzeugen kanonische Flüsse auf dem Phasenraum.  $G(\mathbf{y})$  heißt erzeugende Funktion des kanonischen Flusses. Nun sind aber (6.22) mit den Hamiltonischen Bewegungsgleichungen (6.9) nach der Vertauschung

$$\mathbf{x} \longleftrightarrow \mathbf{y}, \quad \mathbf{t} \longleftrightarrow \lambda, \quad H(\mathbf{x}) \longleftrightarrow G(\mathbf{y}) \quad (6.23)$$

vollkommen äquivalent; "Die Differentialgleichungen kanonischer Flüsse sind also die kanonischen Gleichungen". Ein spezieller kanonischer Fluss ist die Bewegungsabbildung  $\phi^t(\mathbf{x})$  eines autonomen Hamiltonischen Systems, also der Propagator der Hamiltonischen Bewegungsgleichungen (6.9).

## 6.6 Erzeugende für kanonische Transformationen

Es gibt Rechenvorschriften, die erlauben, aus sogenannten *Erzeugenden* für kanonische Transformationen gültige kanonische Transformationen herzuleiten. Der Vorteil hierin liegt in der Tatsache, dass diese Erzeugenden frei wählbar sind, und es somit möglich ist, einfach mal auszuprobieren, ob eine gewisse Erzeugende, bzw. die aus ihr resultierende kanonische Transformation die Bewegungsgleichungen vereinfacht.

Nach (6.4) ist

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}),$$

bzw.

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{t}) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}).$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt nun, dass die Bewegungsgleichungen bei einer Transformation

$$(\mathbf{q}_1 p_1, \dots, \mathbf{q}_f p_f) \longmapsto (Q_1 P_1, \dots, Q_f P_f); \quad (6.24)$$

und

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{t}) \longmapsto H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}) \quad (6.25)$$

erhalten bleiben, falls die Variationen

$$\begin{aligned} & \delta \int dt \left[ \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}) \right] \\ &= \delta \int dt \left[ \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{t}) \right] = 0 \end{aligned}$$

dieselben sind. Da die Variation nun eine Variation über alle Wege mit festen Anfangs- und Endzeiten ist (siehe Kap. 4.4), heißt dies nun, dass die entsprechenden Integranden bis auf eine totale Ableitung übereinstimmen müssen (Äquivalenztransformation),

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{t}) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{t}),$$

wobei  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{t})$  eine beliebige Funktion sein kann, die aber nur von  $2f$  der  $4f$  Variablen  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$  abhängt, da nur  $2f$  Variablen unabhängig voneinander sein können. Es gibt vier Möglichkeiten, zwei der vier Variablensätze

$q, p, Q, P$  zu kombinieren; diese schreibt man in der Form

$$F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \quad F_4(p, P, t)$$

(es sei darauf hingewiesen, dass  $F(q, p)$  und  $F(Q, P)$  keine Transformationen erzeugen).

### Erzeugende und kanonische Transformationen

Für den ersten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} [p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}] - [H - H'] &= \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} \dot{Q}_{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Diese Gleichung ist sicherlich erfüllt, falls

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}}, \quad P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}}, \quad H' - H = \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

(6.27)

gilt (Koeffizientenvergleich). Aus (6.27) kann man also aus einer *beliebigen* Funktion  $F_1(q, Q, t)$  eine gültige kanonische Transformation erhalten. Wenn nun  $F_1(q, Q, t)$  gegeben ist, dann sind die Gl. (6.27) die Transformationsgleichungen der kanonischen Transformation in der Form  $p_{\alpha} = p_{\alpha}(q, Q, t)$  und  $P_{\alpha} = P_{\alpha}(q, Q, t)$ . Diese muss man noch nach  $(q, p)$  auflösen und in  $H(q, p, t)$  einsetzen, um die transformierte Hamiltonfunktion  $H(Q, P, t)$  zu erhalten.

Für den Fall von  $F_2(q, P, t)$  legt die Gleichung (6.27),

$$P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}},$$

nahe, die Darstellung

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha} \quad (6.28)$$

zu wählen, wonach  $F_2(q, P, t)$  die Legendre-Transformierte einer Funktion  $F_1(q, Q, t)$  bezüglich den Variablen  $P \leftrightarrow Q$  ist (beachte das umgekehrte Vorzeichen). Eine solche Darstellung ist immer möglich, man kann die Legendre-Transformation (6.28) ja auch umkehren. Wir lösen (6.28) nach  $F_1$  auf und

setzen in (6.26) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - [H - H'] &= \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} + \frac{d}{dt} \left[ F_2(q, P, t) - \sum_{\alpha} Q_{\alpha} P_{\alpha} \right] \\ &= -\sum_{\alpha} \dot{P}_{\alpha} Q_{\alpha} + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t) \\ &= -\sum_{\alpha} \dot{P}_{\alpha} Q_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} \dot{P}_{\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt nun die Transformationsgleichungen

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}}, \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}}, \quad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

(6.29)

Die kanonische Transformation lautet also  $p_{\alpha} = p_{\alpha}(q, P, t)$  und  $Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(q, P, t)$ .

Analog kann man die aus  $F_3(p, Q, t)$  und  $F_4(p, P, t)$  resultierenden Transformationsgleichungen herleiten. Sie lauten

$$q_{\alpha} = -\frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}}, \quad P_{\alpha} = \frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}}, \quad H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

(6.30)

und

$$q_{\alpha} = -\frac{\partial F_4}{\partial p_{\alpha}}, \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial F_4}{\partial P_{\alpha}}, \quad H' - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

(6.31)

Mit einer der obigen Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  ist die Transformation von  $H(q, p, t)$  nach  $H(Q, P, t)$  kanonisch, und man erhält die neue Hamiltonfunktion  $H(Q, P, t)$ , indem man die jeweiligen nach  $q$  und  $p$  aufgelösten Transformationsgleichungen  $q_{\alpha} = q_{\alpha}(Q, P, t)$  und  $p_{\alpha} = p_{\alpha}(Q, P, t)$  in  $H(q, p, t)$  einsetzt.

### Anwendungsbeispiel: Pendel

Die Hamilton-Funktion für den harmonischen Oszillator (Pendel) hat die Form

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \quad (6.32)$$

wobei wir die Definition  $\omega^2 = k/m$  verwendet haben. Wir betrachten nun die Erzeugende

$$F_1(\mathbf{q}, Q) = \frac{m\omega}{2} \mathbf{q}^2 \cot Q.$$

Die Transformationsgleichungen (6.27) werden dann zu

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} = m\omega \mathbf{q} \cot Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega \mathbf{q}^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Um die Transformation wirklich durchführen zu können, müssen wir diese Gleichungen nach  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  auflösen, d.h.

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad \mathbf{p} = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (6.33)$$

Diese Ausdrücke für  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  setzen wir nun in die Hamilton-Funktion (6.32) ein und erhalten in den neuen Koordinaten

$$H(Q, P) = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad (6.34)$$

Die Hamiltonfunktion ist also zyklisch in  $Q$  (von  $Q$  unabhängig) und der kanonisch konjugierte Impuls nach

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

eine Konstante, und zwar im wesentlichen die Energie,  $P = E/\omega$ . Die zweite Bewegungsgleichung lautet

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega, \quad Q(t) = \omega t + Q_0.$$

Wir können nun die so gewonnene Lösung für  $P = E/\omega$  und  $Q(t)$  in die Transformationsgleichungen (6.33) einsetzen und erhalten für die ursprünglichen Koordinaten die bekannte Lösung

$$\mathbf{q}(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0), \quad \mathbf{p}(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + Q_0)$$

für den harmonischen Oszillator.

### 6.7 Hamilton-Jacobi Gleichung

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, wie nützlich es ist, wenn man so verallgemeinerte Koordinaten und Impulse definiert, dass die Hamilton-Funktion

dann proportional zu einem der Impulse wird. Die kanonischen Gleichungen sind dann trivial lösbar. Anders ausgedrückt ist die Lösung des mechanischen Systems dann gefunden, wenn es gelingt eine solche Transformation zu gewinnen. Wir wollen diese Vorgangsweise nun etwas systematischer für autonome Systeme betrachten.

### Der zeitunabhängige Fall

Wir möchten eine Erzeugende  $S$  finden, so dass nach der kanonischen Transformation die Hamilton-Funktion die Form

$$H(Q, P) = P_f \equiv E \quad (6.35)$$

hat, wobei  $E$  die erhaltene Energie  $E$  ist. Ferner wäre es schön, falls  $S$  von der Energie explizit abhängt. Dann sind nämlich die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \dot{P}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} = 0 & \alpha &= 1, \dots, f \\ \dot{Q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = 0 & \alpha &= 1, \dots, (f-1) & \dot{Q}_f &= \frac{\partial H}{\partial P_f} = 1 \end{aligned}$$

trivial lösbar:

$$\begin{aligned} P_\alpha(t) &= P_\alpha(0) & \alpha &= 1, \dots, f \\ Q_\alpha(t) &= Q_\alpha(0) & \alpha &= 1, \dots, (f-1) \\ Q_f(t) &= Q_f(0) + t \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften der transformierten Hamiltonfunktion lassen sich erreichen, wenn  $S$  die gemischte Form

$$S(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{f-1}, \mathbf{q}_f; Q_1 \dots Q_{f-1}, P_f) = S(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_f; Q_1 \dots Q_{f-1}, E)$$

hat. In den ersten  $f-1$  verallgemeinerten Koordinaten ist  $S$  vom Typus  $F_1$ , in der  $f$ -ten Koordinate vom Typus  $F_2$ . Es gilt also nach (6.27)

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial Q_\alpha}, \quad (f = 1 \dots (f-1)) \quad (6.36)$$

und nach (6.29)

$$\mathbf{p}_f = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_f}, \quad Q_f = \frac{\partial S}{\partial P_f} = \frac{\partial S}{\partial E}. \quad (6.37)$$

Wir setzen nun die obigen Ausdrücke für  $p_\alpha$  in den Hamilton-Operator ein und erhalten

$$H(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f) = \boxed{H(q_1 \dots q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_f}) = E} \quad (6.38)$$

die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung*, eine Differentialgleichung für die Erzeugende  $S(q, \dots)$  bezüglich der Variablen  $q_1 \dots q_f$ . Um die Bedeutung der Variablen  $Q_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, (f-1)$ ) in  $S$  festzulegen, die in (6.38) nicht explizit vorkommen, betrachten wir zunächst die Bewegungsgleichungen und verwenden (6.35):

$$\begin{aligned} \dot{P}_\alpha &= -\frac{\partial H(Q, P)}{\partial Q_\alpha} = 0, & P_\alpha &\equiv a_\alpha, & (\alpha = 1 \dots f) \\ \dot{Q}_\alpha &= \frac{\partial H(Q, P)}{\partial P_\alpha} = 0, & Q_\alpha &\equiv b_\alpha, & (\alpha = 1 \dots (f-1)) \\ \dot{Q}_f &= \frac{\partial H(Q, P)}{\partial P_f} = \frac{\partial H(Q, P)}{\partial E} = 1, & Q_f &\equiv t + b_f, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrationskonstanten  $a = a_1 \dots a_f$  und  $b = b_1 \dots b_f$  eingeführt haben. Nun folgt aus (6.36)

$$\frac{\partial S}{\partial Q_\alpha} = -P_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial b_\alpha} = -a_\alpha, \quad (\alpha = 1 \dots (f-1)).$$

Für  $\alpha = f$  erhalten wir mit (6.37)

$$\frac{\partial S}{\partial P_f} = Q_f, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t + b_f.$$

Die letzte Gleichung bestimmt den zeitlichen Durchlauf der Lösung.

### Der zeitabhängige Fall

Für ein nichtautonomes System hängt die Hamiltonfunktion  $H(q, p, t)$  explizit von der Zeit ab. Wir suchen jetzt eine zeitabhängige kanonische Transformation, sodass in den neuen Koordinaten die Hamiltonfunktion verschwindet:

$$K(Q, P, t) = 0$$

Dann sind alle Koordinaten  $Q_1, \dots, Q_f$  und Impulse  $P_1, \dots, P_f$  konstant. Wir wollen also die Bewegung auf Ruhe transformieren. Die erzeugende Funktion

$S(q, P, t)$  erhalten wir in diesem Fall als Lösung der *zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial P_\alpha}\right) \neq 0 \quad (6.39)$$

Die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten ergibt sich aus den  $f$  Gleichungen

$$\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha \quad q_\alpha = q_\alpha(Q, P, t)$$

Einsetzen in

$$p_\alpha = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_\alpha}$$

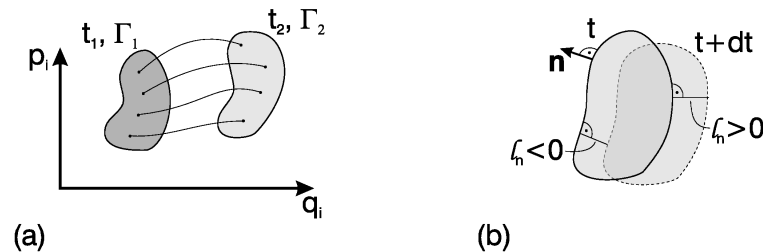
liefert dann  $p_\alpha = p_\alpha(Q, P, t)$ .

### 6.8 Satz von Liouville

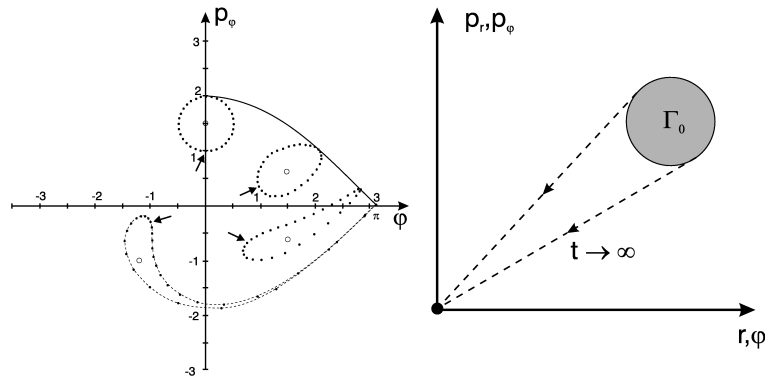
Die Jacobi-Matrix  $A_{kl} = \partial y_k / \partial x_l$  erhält das Phasenraumvolumen, denn nach (6.17) ist  $|\det A| = 1$ . Wegen der Äquivalenz (6.23) erhalten auch alle kanonische Flüsse das Phasenraumvolumen

$$\int_{\Omega} dx_1 \dots dx_{2f},$$

also insbesondere auch der Propagator  $\phi^t(x)$  der Bewegungsgleichungen. Dies ist der *Satz von Liouville*. Also stellt der Fluss der physikalischen Bewegungen im Phasenraum eine inkompressible Flüssigkeit dar.



**Abbildung 6.2:** Illustration des Satzes von Liouville. Das Phasenraumvolumen  $\Gamma$  bleibt erhalten, sowohl infinitesimal wie auch nach endlichen Zeiten.



**Abbildung 6.3:** Links: Der Satz von Liouville für das mathematische Pendel. Ein Punkt befindet sich auf der Kriechbahn in den oberen instabilen Fixpunkt. Rechts: Mit Dissipation (gedämpftes Pendel) kontrahiert das Phasenraumvolumen dagegen.

### 6.9 Satz von Poincaré

Sei  $G$  im Phasenraum  $\mathbb{R}^{2f}$  ein Gebiet mit endlichem Volumen  $V$  und  $\phi^t(x)$  ein volumenerhaltender Fluss in  $G$ . In anderen Worten, die physikalischen Bahnen sind beschränkt. Für jede Teilmenge  $K$  von  $G$  mit endlichem Volumen gibt es dann beliebig große Zeiten  $t$ , so dass

$$\phi^t(K) \cap K \neq \emptyset, \quad (6.40)$$

wobei  $\emptyset$  die leere Menge darstellt. Dies ist der *Satz von Poincaré*.

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an und zeigen einen Widerspruch auf. Falls  $\phi^t(K) \cap K = \emptyset$  für alle  $t > T$  und einem  $T < \infty$ , so ist auch

$$\phi^{nT}(K) \cap K = \emptyset, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Nach dem Satz von Liouville ist das Phasenraumvolumen erhalten, zwei disjunkte Teilmengen von  $G$  müssen nach Propagation durch  $\phi^t$  somit auch disjunkt bleiben, also insbesondere für  $t = mT$

$$\phi^{(n+m)T}(K) \cap \phi^m(K) = \emptyset, \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Teilmengen

$$\phi^T(K), \phi^{2T}(K), \phi^{3T}(K), \dots$$

sind also alle disjunkt, haben aber alle das gleiche Volumen. Ein Widerspruch zur Voraussetzung  $V < \infty$ .

### Ergodische Bewegung

Man kann den Satz von Poincaré wie folgt verallgemeinern: Für alle Teilmengen  $K'$  und  $K$  von  $G$  gibt es genügend große Zeiten  $t$  so dass

$$\phi^t(K') \cap K \neq \emptyset. \quad (6.41)$$

Hier für muss das Volumen von  $K$  endlich sein, nicht aber das von  $K'$ . Insbesondere kann  $K'$  auch nur aus einem einzigen Punkt  $x$  bestehen, dann heißt  $x$  *Wiederkehrpunkt* bezüglich  $K$ .

Der Satz von Poincaré in der allgemeineren Form (6.41) besagt, dass jedes beliebige Teilvolumen  $K$  des Phasenraumes  $G$  in hinreichend großen Zeiten  $t$  vom physikalischen Fluss besucht wird, wobei das Teilvolumen  $K'$  die Menge der Anfangsbedingungen darstellt. Man sagt auch, die Bewegung sei 'ergodisch'.

### Beispiel: Kugeln im Kasten

Zur Illustration betrachten wir  $N$  elastische Kugeln (Edelgasatome) in einem endlichen Gebiet  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^3$  mit elastisch reflektierenden Wänden. Dann ist die kinetische Energie

$$T = \sum_i^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$$

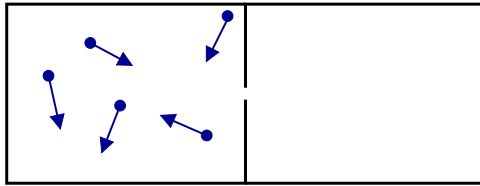
erhalten und somit das Gebiet des Phasenraums

$$G : \vec{x}_i \in \Omega, \quad \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} < E$$

invariant unter  $\phi^t$ . Denn offensichtlich ist  $\phi^t(G) \subset G$ , was zusammen mit dem Satz von Liouville  $\phi^t(G) = G$  bedeutet. Da  $G$  im  $\mathbb{R}^{6N}$  ein endliches Volumen hat, ist der Satz von Poincaré anwendbar.

### Wiederkehrzeiten

Alle Anfangsbedingungen  $\vec{x}_i(0)$  und  $\vec{p}_i(0)$  (bis auf Ausnahmen mit Maß Null) führen also zu einer Bewegung, die nach genügend langer Zeit wieder beliebig nahe an den ursprünglichen Zustand zurückführt. Dies widerspricht unserem physikalischen Verständnis. Zu Recht, denn diese *Wiederkehrzeiten* sind exponentiell groß, das heißt wesentlich größer als das Alter des Universums. Für physikalisch relevante Zeiten ist das Verhalten eines komplexen mechanischen Systems jedoch sehr kompliziert und kann im allgemeinen sogenanntes *chaotisches Verhalten* zeigen.



**Abbildung 6.4:** Illustration des Wiederkehr-Satzes von Poincaré. Nach genügend langer Zeit sind alle Atome wieder rechts in der gleichen Ausgangslage mit den gleichen Geschwindigkeiten.

## 7. Kontinuumsmechanik

### 7.1 Kontinuums-Limes

In der Kontinuumsmechanik geht es um die Beschreibung von mechanischen Systemen, die aus so vielen Massenpunkten zusammengesetzt sind, dass eine Beschreibung der Bewegung der einzelnen Massenpunkte entweder nicht mehr sinnvoll oder nicht mehr möglich ist. Beispiele sind die Dynamik von elastischen Körpern oder die von Flüssigkeiten und Gasen.

Um die Bewegungsgleichungen für ein Ensemble von Massenpunkten herzuleiten, geht man von den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte aus und macht dann den *Kontinuumsübergang*.

#### Schwingende Saite

Wir betrachten hierzu die (eindimensionale) schwingende Saite und definieren mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$$

die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage am Ort  $x$  und zur Zeit  $t$ .

Die  $x$ -Koordinaten der  $N$  Teilchen auf der Saite mit der Länge  $L$  sind

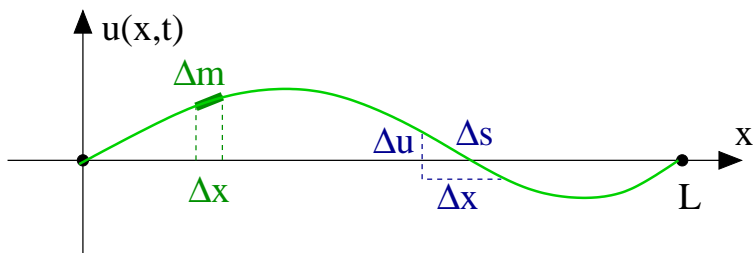
$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{L}{N}, \quad (i = 1 \dots N),$$

wobei wir der Randbedingungen halber  $x = 0$  und  $x = L$  ausgeschlossen haben. Die Saite habe die Gesamtmasse  $M$  und die einzelnen Teilchen die Masse  $\Delta m_i$ , mit

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i = M.$$

Für eine homogene Saite ist  $\Delta m_i \equiv M/N$ . Die *Massendichte*  $\rho(x)$  ist via

$$\rho(x) = \frac{\Delta m_i}{\Delta x}, \quad x = x_i$$



**Abbildung 7.1:** Eine schwingende Saite mit einem kleine Massenteil  $\Delta m$  und Längenabschnitt  $\Delta s$ .

definiert. Für eine homogene Kette ist

$$\rho(x) \equiv \rho = \frac{MN}{NL} = \frac{M}{L}.$$

### Lagrangefunktion

Um die Bewegungsgleichungen für die schwingende Saite aufzustellen, müssen wir zuerst die Lagrangefunktion finden. Die kinetische Energie ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{2} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \Delta x \frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2.$$

Wir nehmen nun an, dass zwischen allen Massenpunkten eine Feder mit der Federkonstanten  $f$  gespannt sei, so dass die Feder zwischen dem  $(i+1)$ -ten Teilchen und dem  $i$ -ten Teilchen einen Beitrag

$$\frac{f}{2} (\Delta s)^2, \quad \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

zur potentiellen Energie leistet, wobei  $\Delta s$  der Abstand der beiden Teilchen ist (wir betrachten transversale Auslenkungen). Bis auf eine Konstante ist die potentielle Energie also

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \frac{f \Delta x}{2} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2,$$

wobei wir die Beiträge vom 1-ten und dem  $N$ -ten Teilchen zum jeweiligen Einspannpunkt vernachlässigt haben, sie tragen im *thermodynamischem Limes* ( $N \rightarrow \infty$ ) nicht bei.

Wir schreiben  $u_i = u(x_i, t)$  und führen nun den Kontinuumsübergang  $N \rightarrow \infty$  durch, zunächst für die kinetische Energie:

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta x \frac{\rho(x_i)}{2} \left( \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 = \int_0^L dx \frac{\rho(x)}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2.$$

Für den Grenzübergang der potentiellen Energie verwenden wir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

und setzen zudem

$$f \Delta x = P, \quad f = \frac{P}{\Delta x},$$

das heißt, wir reskalieren mit  $N$  auch die Federkonstante zwischen den Teilchen (eine kürzere Feder wird härter).  $P$  kann dann als konstant angenommen werden. Wir erhalten

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \frac{P}{2} \left( \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 = \int_0^L dx \frac{P}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2.$$

Damit wird unsere Lagrangefunktion  $L(u, \dot{u}, u') = L(\dot{u}, u')$  zu

$$L(\dot{u}, u') = T - U = \int_0^L dx \underbrace{\left[ \frac{\rho(x)}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{P}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\mathcal{L}(u, \dot{u}, u', x, t) = \mathcal{L}(\dot{u}, u', x)},$$

wobei man  $\mathcal{L}(\dot{u}, u', x)$  als *Lagrangedichte* bezeichnet.

### Prinzip der kleinsten Wirkung

Da die Saite als Grenzfall eines Systems aus vielen Massenpunkten gewonnen wurde, gilt das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta S[u] = \delta \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(u, \dot{u}, u', x, t) = 0. \quad (7.1)$$

Um die Variation durchzuführen betrachten wir, wie im §4.4, die Schar von Funktionen  $u(x, t, \lambda)$  mit festen Randbedingungen  $u(x, t^{(j)}, \lambda) = u^{(j)}(x)$  in Zeit und Ort:  $u(0, t, \lambda) = u_0(t)$ ,  $u(L, t, \lambda) = u_L(t)$ . Dabei soll wiederum  $u(x, t, \lambda = 0)$  die physikalische Bahn sein, also die, die das Funktional (7.1) minimal macht:

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(u, \dot{u}, u', x, t)$$



$$= \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{du}{d\lambda} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}}_{\frac{d}{dt}} \underbrace{\frac{d\dot{u}}{d\lambda}}_{\int dt} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}}_{\frac{d}{dx}} \underbrace{\frac{du'}{d\lambda}}_{\int dx} \right],$$

wobei einmal nach der Zeit und einmal nach dem Ort partiell zu integrieren ist. Dabei sollen die Randterme

$$0 = \int_0^L dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \frac{du(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right]_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}}$$

$$0 = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} \frac{du(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right]_{x=0}^{x=L}$$

wegen der festen Randbedingungen verschwinden. Für die Variation der Wirkung  $S[u]$  erhalten wir somit

$$0 = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} \right] \delta u,$$

wobei wir  $\delta u = \frac{du(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}$  gesetzt haben. Da nun  $\delta u = \delta u(x, t)$  beliebig ist, muss der Integrand verschwinden; wir erhalten die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (7.2)$$

für die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ .

### Homogene Saite

Für die homogene Saite ist  $\mathcal{L} = (\rho \dot{u}^2 - P(u')^2)/2$  und (7.2) wird zu

$$\rho \ddot{u} - P u'' = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.3)$$

mit der *Wellengeschwindigkeit*

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

### Membran

Die Wellengleichung lässt sich sofort verallgemeinern. Für die homogene Membran (Trommel) ist  $u = u(x, y, t)$  die senkrechte Auslenkung. Sie befolgt die zwei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Falls die Membran horizontal gelagert ist und das Schwerfeld der Erde nicht vernachlässigbar ist, so ist ihre Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} (u_x^2 + u_y^2) - g\rho u,$$

wobei  $u_x = \partial u / \partial x$  und  $u_y = \partial u / \partial y$  ist. Die dazugehörige Lagrange-Gleichung lautet:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{g\rho}{P}.$$

Analog gilt für eine homogene schwingende Flüssigkeit (oder Luft: Schallwellen), oder auch für die Komponenten des Elektromagnetischen Feldes im Vakuum (Licht), die drei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

### 7.2 Schwingende Saite

Als Beispiel für die Lösung der Wellengleichung (7.3) betrachten wir die eingespannte Saite. Die zu lösenden Gleichungen für  $u(x, t)$  sind also

$$\begin{array}{ll} \ddot{u} - c^2 u'' = 0 & \text{Wellengleichung} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{Randbedingung} \\ u(x, 0) = F(x), \quad \dot{u}(x, 0) = G(x) & \text{Anfangsbedingung} \end{array} \quad (7.4)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (7.4) gehen wir wie in Kap. 3.5 vor und betrachten mit dem Separationsansatz

$$u(x, t) = e^{i\omega t} g(x)$$

zunächst die "zeitunabhängige" Bewegungsgleichung

$$k^2 g(x) + g''(x) = 0, \quad k = \omega/c,$$

deren allgemeine Lösungen durch  $e^{\pm ikx}$  gegeben sind. Mit der Randbedingung  $g(0) = 0$  verträglich ist die Superposition

$$g(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \sin(kx). \quad (7.5)$$

Die zweite Randbedingung verlangt

$$g(L) = 0 = \sin(kL), \quad k \equiv k_n = \frac{\pi}{L}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### Fouierreihen

Die vollständige (reelle) Lösung ist eine lineare Überlagerung der partikulären Lösungen (7.5) und hat also die Form einer Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)],$$

mit  $\omega_n = ck_n$ . Die *Entwicklungskoeffizienten*  $a_n$ ,  $b_n$  bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen

$$F(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x), \quad (7.6)$$

$$G(x) = \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n b_n \sin(k_n x), \quad (7.7)$$

Da die Anfangsbedingung  $F(x)$  beliebig ist, soweit sie mit den Randbedingungen  $F(0) = 0 = F(L)$  verträglich ist, folgt aus (7.6), dass sich eine jede Funktion  $F(x)$  auf dem Intervall  $[0, L]$  durch die *Fourierreihe* (7.6) darstellen lässt.

### Entwicklungskoeffizienten

Multiplizieren wir (7.6) mit  $\sin(k_m x)$  und integrieren über  $x$ , so erhalten wir

$$\int_0^L dx F(x) \sin(k_m x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x)$$

Wir zeigen jetzt, dass die  $\sin(k_n x)$  eine orthogonale Basis bilden, indem wir den Ausdruck  $\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x)$  durch partielle Integration umformen (man kann auch die Exponentialdarstellung des Sinus einführen und das Integral ausführen). Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall:  $m = n$

$$\int_0^L (\sin(k_n x))^2 = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_n x)}{4k_n} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

2. Fall:  $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_0^L \underbrace{\sin(k_n x)}_{\int dx} \underbrace{\sin(k_m x)}_{\frac{d}{dx}} &= \left[ -\frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_m x) \right]_0^L + \int_0^L \underbrace{\frac{\cos(k_n x)}{k_n}}_{\frac{d}{dx}} k_m \underbrace{\cos(k_m x)}_{\int dx} \\ &= \left[ -\frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_m x) + \frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_m x) \right]_0^L \\ &\quad - \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) \end{aligned}$$

und damit

$$2 \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) = 0$$

Beide Fälle zusammengefasst ergeben die gesuchte Orthogonalität:

$$\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

Damit finden wir

$$\int_0^L dx F(x) \sin(k_m x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{L}{2} \delta_{mn} = \frac{L a_m}{2}$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  lassen sich also aus

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx F(x) \sin(k_n x) \quad (7.8)$$

berechnen und analog die  $b_n$  aus

$$b_n = \frac{2}{L \omega_n} \int_0^L dx G(x) \cos(k_n x). \quad (7.9)$$

Das Gleichungspaar (7.6) und (7.8) ist die Grundgleichung der Fouriertransformation und ist die Verallgemeinerung der diskreten Fouriertransformation aus Kap. 3.5 auf kontinuierliche Werte der Variablen  $x$ . Die Verallgemeinerung auf ein unendlich großes Intervall  $x \in [-\infty, \infty]$  ist auch nicht schwer und Gegenstand der Elektrodynamik.

### 7.3 Elastizitätstheorie

Wir denken uns einen Festkörper (Werkstoff) als Sammlung von Massenpunkten (Atome, Moleküle, Mikrokristalle). Die Ruhelage eines Massenpunktes ist

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , die Auslenkung von der Ruhelage  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Dabei ist die Auslenkung (Verschiebung) eine Funktion des Ortes, also

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}))$$

ein *Vektorfeld*. In Kap. 7.1 haben wir gesehen, dass die elastische Energie (potentielle Energie) einer Saite eine quadratische Funktion der infinitesimalen Auslenkung der Saite  $u'$  war. Es liegt nahe, diesen Sachverhalt auf die elastische Energie eines Festkörpers zu verallgemeinern, solange die Auslenkung aus der Ruhelage klein (elastisch) ist, also

$$U = U(\{\partial u_i / \partial x_k\}),$$

Dazu schreiben wir für den neuen Radiusvektor des Punktes  $\vec{x}$  des Körpers nach der Verformung  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ , und damit lautet der Verschiebungsvektor

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x}$$

Infinitesimal lautet diese Gleichung (für infinitesimal benachbarte Punkte vor und nach der Deformation des Körpers)

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$$

Wir wollen jetzt den (infinitesimalen) Abstand zwischen zwei Punkten vor und nach der Deformation ermitteln; vorher ist das Abstandselement

$$dl = \sqrt{\sum_i dx_i^2},$$

und nachher

$$dl' = \sqrt{\sum_i dx_i'^2} = \sqrt{\sum_i (dx_i + du_i)^2}. \quad (7.10)$$

Wir berücksichtigen jetzt die Abhängigkeit der Verschiebung  $\vec{u}$  von  $\vec{x}$  durch

$$du_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

und setzen diese Beziehung in Gl. (7.10) ein:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \sum_i dx_i^2 + 2 \sum_i dx_i du_i + \sum_i du_i^2 \\ &= dl^2 + 2 \sum_i dx_i \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left( \sum_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right) \\ &= dl^2 + \sum_{ik} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k + \sum_{ik} \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i dx_k \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Indizes umbenannt haben: im zweiten Term wurde in einem der zwei Terme  $i$  mit  $k$  vertauscht, um die symmetrische Schreibweise zu erhalten, und im dritten Term wurden Indizes  $i$  und  $l$  ausgetauscht.

### Verzerrungstensor

Für kleine Deformationen sind die Verschiebungen  $\vec{u}$  und ihre Ableitungen nach den Koordinaten klein, und man vernachlässigt den dritten Term von Gl. (7.11), der ein Produkt von Ableitungen von  $\vec{u}$  enthält. Man definiert nun durch

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{ik} u_{ik} dx_i dx_k$$

den *Verzerrungstensor* (strain tensor)

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (7.12)$$

Aus der Forderung, dass Drehungen des gesamten Körpers unberücksichtigt bleiben sollen folgt die Symmetrie des Verzerrungstensors

$$u_{ik} = u_{ki}.$$

Deshalb hat der Verzerrungstensor nur sechs unabhängige Komponenten.

### Elastischer Tensor

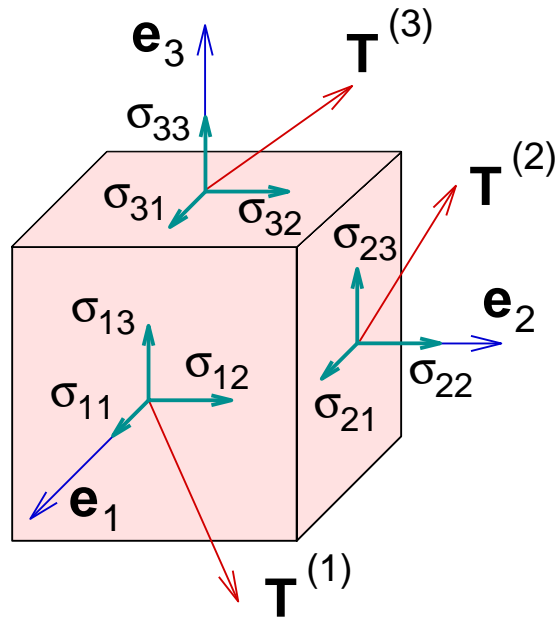
Wir führen nun  $3^4 = 81$  Zahlen

$$C_{ijkl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

ein, die man zusammengefasst den *elastischen Tensor* nennt, und definieren die potentielle Energiedichte als

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl}. \quad (7.13)$$

Natürlich sind nicht alle 81 Komponenten des elastischen Tensors voneinander verschieden, z.B. folgt aus (7.13) dass  $C_{ijkl} = C_{klij}$  ist. Im allgemeinen gibt es 21 unabhängige Komponenten. Weitere Vereinfachungen ergeben sich aus der Symmetrie (kubisch(3), hexagonal(5), ...) des betrachteten Materials. Für die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  eines elastischen Materials (ohne Reibung) mit



**Abbildung 7.2:** Komponenten des Spannungstensors auf den Flächen eines Quaders. Die  $\mathbf{T}^{(i)} = \sigma \mathbf{n}_i$  sind die auf den Flächen mit Normalenvektoren  $\mathbf{n}_i$  wirkenden Spannungsvektoren (hier  $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i$ ).

(konstanter) Massendichte  $\rho$  erhalten wir dann

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{ijkl} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl} \quad (7.14)$$

### Spannungstensor

Aus (7.14) kann man mit dem Hamilton'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen berechnen. Das ist nicht schwer, doch ein wenig unübersichtlich, der vielen Indizes wegen. Es ist daher in der Elastizitätstheorie üblich, als Zwischenschritt den *Spannungstensor* (stress tensor)

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} u_{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} \quad (7.15)$$

einzuführen. Die lineare Abhängigkeit (7.15) zwischen dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  und dem Verzerrungstensor  $u_{kl}$  nennt man auch *Hooke'sches Gesetz*. Die Elemente des Spannungstensors sind in Abb. 7.2 dargestellt. Die Diagonalelemente  $\sigma_{ii}$  stellen die Normalspannungen, die Nichtdiagonalelemente die Scherspannungen dar.

Der Spannungstensor ist sehr nützlich, da sich die Kraftdichte  $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1, f_2, f_3)$

als Divergenz des Spannungstensors

$$\rho(\vec{x}) \ddot{u}_i(\vec{x}) \equiv f_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.16)$$

dastellen lässt, wobei  $\rho(\vec{x})$  die Massendichte ist.

### Transformation auf Hauptachsen

Aus (7.16) und der Betrachtung von Impuls- und Drehimpulserhaltung folgt, dass der Spannungstensor symmetrisch

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ist. Eine Transformation auf Hauptspannungsachsen ist daher immer möglich.

### Voigt-Notation

Die Symmetrien von Verzerrungs- und Spannungstensor bedeuten, dass es nur 6 unabhängige Einträge gibt und legen eine Vereinfachung der Notation nahe:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{23} (= \sigma_{32}) &= \sigma_4 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{31} (= \sigma_{13}) &= \sigma_5 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \sigma_{12} (= \sigma_{21}) &= \sigma_6 \end{aligned}$$

und mit  $u_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}$  (einer alternativen üblichen Bezeichnung für den Verzerrungstensor)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & 2\varepsilon_{23} (= 2\varepsilon_{32}) &= \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & 2\varepsilon_{31} (= 2\varepsilon_{13}) &= \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 & 2\varepsilon_{12} (= 2\varepsilon_{21}) &= \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Damit lässt sich dann das Hooke'sche Gesetz schreiben als

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^6 C_{mn} \varepsilon_n$$

wobei die Symmetrien des Elastizitätstensors

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

bedeuten, dass man alle unabhängigen Einträge in eine symmetrische  $6 \times 6$ -Matrix eintragen kann, wobei man wie vorher Indizes 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit  $\mathbf{xx} \equiv$

11,  $\mathbf{yy} \equiv 22$ ,  $\mathbf{zz} \equiv 33$ ,  $\mathbf{yz} \equiv 23$ ,  $\mathbf{zx} \equiv 31$ ,  $\mathbf{xy} \equiv 12$  identifiziert. Ausgeschrieben ist dann das Hooke'sche Gesetz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{symm.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

### Oberflächenkräfte

Aus (7.16) folgt sofort, dass alle elastischen Kräfte *Oberflächenkräfte* sind ( $\equiv$  Definition von elastischen Kräften), da nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\text{Volumen}} dV f_i = \int_{\text{Volumen}} dV \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \int_{\text{Oberfläche}} \sum_j dA_j \sigma_{ij}$$

mit Flächenelementen  $d\vec{A} = (dA_1, dA_2, dA_3)$ . Im isotropen Fall ist der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  diagonal,

$$\sigma_{ij} \equiv -P\delta_{ij}, \quad \vec{f} = -\vec{\nabla}P(\vec{x}),$$

wobei  $P = P(\vec{x})$  der Druck (ein skalares Feld) auf ein Volumenelement ist.

### Symmetrien

Als Beispiel für die Reduktion des elastischen Tensors  $C_{ijkl}$  durch Symmetrie betrachten wir einen *homogenen Körper*. Bei einem homogenen Körper gibt es (Definition) nur zwei Arten der Deformation: Eine selbstähnliche *homogene Dilatation* (hydrostatische Kompression) und eine *reine Scherung* (Volumen-erhaltend). Hierzu schreibt man den Verzerrungstensor in der Form

$$\mathbf{u}_{ik} = \left( \mathbf{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l \mathbf{u}_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l \mathbf{u}_{ll},$$

( $\sum_l \mathbf{u}_{ll} = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{22} + \mathbf{u}_{33}$ ), wobei der erste Term auf der rechten Seite Volumen-erhaltend ist (Summe der Diagonalelemente ist null). Da für einen isotropen Körper alle Scherungen äquivalent sind, können wir die elastische Energie (7.13) durch nur zwei Konstanten  $\mu > 0$  und  $K > 0$  parametrisieren (mit Summenkonvention),

$$U = \mu \left( \mathbf{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l \mathbf{u}_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \sum_l \mathbf{u}_{ll} \right)^2. \quad (7.17)$$

Dabei nennt man  $K$  den *Kompressionsmodul* und  $\mu$  den *Torsionsmodul* (Schubmodul). Allgemein werden in der Elastizitätstheorie eine Unmenge von Proportionalitätskonstanten eingeführt, die sich alle in der einen oder anderen Weise auf die  $C_{ijkl}$  zurückführen lassen.

Aus (7.17) folgt mit (7.15) der Spannungstensor für isotrope Körper

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left( \mathbf{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l \mathbf{u}_{ll} \right) + K \delta_{ik} \sum_l \mathbf{u}_{ll}.$$

Die Bewegungsgleichung wird somit in Anwesenheit von Volumenkräften  $f_i^{(\text{Vol})}$  (Schwerkraft) und unter Verwendung von Gl. (7.12) zu

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= f_i^{(\text{Vol})} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(\text{Vol})} \\ &+ \frac{2\mu}{2} \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)}_{\Delta u_i} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \vec{u}} \delta_{ik}, \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\rho \ddot{u}_i = f_i^{(\text{Vol})} + \mu \Delta u_i + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \vec{u}} \quad (7.18)$$

### Schallwellen

Die Gleichung (7.18) lässt sich in Abwesenheit der Volumenkräfte,  $f_i^{(\text{Vol})} = 0$ , durch

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{a} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad \vec{a} = \text{konst.}$$

lösen. Einsetzen in (7.18) ergibt

$$(i\omega)^2 \rho \vec{a} = \mu (-i\vec{k})^2 \vec{a} + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) (-i\vec{k}) (-i\vec{a} \cdot \vec{k}),$$

$$\omega^2 \rho \vec{a} = \mu \vec{k}^2 \vec{a} + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) (\vec{a} \cdot \vec{k}) \vec{k}.$$

Für jeden Wellenvektor  $\vec{k}$  gibt es zwei transversale Wellen mit  $\vec{a} \perp \vec{k}$  und der Dispersionsrelation ( $k = |\vec{k}|$ )

$$\omega(k) \Big|_{\text{trans.}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k \equiv c_t k$$

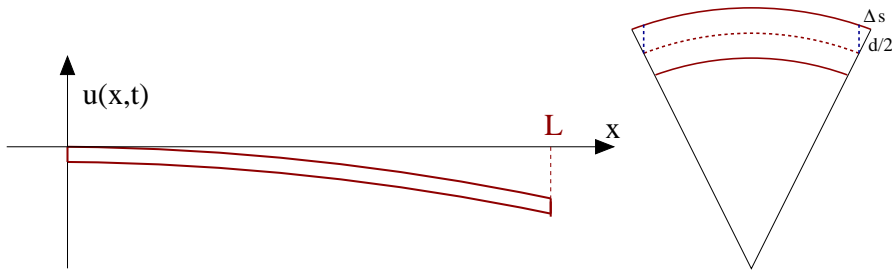


Abbildung 7.3: Der eingespannte Balken.

und eine longitudinale Welle mit  $\vec{a} \parallel \vec{k}$  und mit (betrachte o.B.d.A.  $\vec{a} = \vec{k}$ )

$$\omega^2 \rho = \mu k^2 + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) k^2, \quad \omega(k) \Big|_{\text{long.}} = \sqrt{\frac{K + 4\mu/3}{\rho}} k \equiv c_l k.$$

Offensichtlich gilt für die transversale Schallgeschwindigkeit  $c_t$  und für die longitudinale Schallgeschwindigkeit  $c_l$  die Ungleichung

$$c_l \geq \sqrt{\frac{4}{3}} c_t.$$

#### 7.4 Balkenbiegung

Wir betrachten einen homogenen eingespannten Balken im Schwerfeld der Erde mit der Länge  $L$  und Masse  $M = \rho L$ . Die Auslenkung aus der Horizontalen sei  $u(x, t)$ .

Die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie haben die Form

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L dx \dot{u}^2, \quad U_f = - \int_0^L dx u(x, t) f(x, t),$$

wobei  $f(x, t)$  die äußere Kraftdichte ist, z.B.  $-\rho g$  für die Schwerkraft.

Die elastische Energie für dünne Balken (Dicke  $d \rightarrow 0$ ) hat wie üblich die Form

$$U_{el} = \frac{P}{2} \int_0^L dx \left( \frac{\partial(u - u_0)}{\partial x} \right)^2 = \frac{P}{2} \int_0^L dx (u' - u_0')^2$$

wobei  $u_0 = u_0(x)$  die Gleichgewichtslage des Balken im äußeren Kraftfeld (Schwerfeld) ist.  $u_0(x)$  ist also die statische Lösung der noch zu bestimmen Euler-Lagrange Gleichungen und  $U_{el}$  beschreibt dann kleine Schwingungen um diese Gleichgewichtslage.

#### Dicker Balken

Die Biegung des Balkens wird durch Rückstellkräfte im Gleichgewicht gehalten, die von der endlichen Dicke  $d$  des Balkens abhängen. Ihr Beitrag zur potentiellen Energie  $U_d$  kann wie folgt abgeschätzt werden:

Die Mittelfaser des Balkens wird nicht gestaucht oder gestreckt. Zu jedem Punkt  $x$  der Horizontalen betrachtet man die Abweichung  $\Delta s$  der Außenfaser des Balkens von  $x$ , gegeben durch

$$\Delta s(x) = \frac{d}{2} u'(x).$$

Die Stauchung (Dehnung) der Außenfaser zwischen zwei Punkten  $x + \Delta x$  und  $x$  ist dann durch die Differenz

$$\begin{aligned} \Delta s(x + \Delta x) - \Delta s(x) &= \frac{d}{2} (u'(x + \Delta x) - u'(x)) \\ &= \frac{\Delta x d}{2} \left( \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta x d}{2} u''(x) \end{aligned}$$

gegeben. Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die elastische Energie proportional zum Quadrat der Stauchung, also nach dem Grenzübergang zu

$$U_d = \frac{Q}{2} \int_0^L dx (u'')^2,$$

wobei die elastische Konstante  $Q \sim d^2$  ist. Somit haben wir die Lagrange-funktion

$$L = T - U_f - U_{el} - U_d = \int_0^L dx \mathcal{L}$$

mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \rho g u - \frac{P}{2} (u' - u_0')^2 - \frac{Q}{2} (u'')^2$$

und nach Variation der Wirkung erhalten wir wie in Kap. 7.1 die Euler-Lagrange-Gleichungen, allerdings mit einem zusätzlichen Term:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u''} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

Mit  $f(x, t) = -\rho g$  folgt daraus die Bewegungsgleichung für den Balken

$$\rho \ddot{u} = -\rho g + P(u'' - u_0'') - Qu''''.$$
 (7.19)

## Statik des Balken

Im statischen Fall  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0$  (Balkenbiegung) ist also die Gleichung

$$Q\mathbf{u}_0'''' = -g\rho \quad (7.20)$$

zu lösen. Die Lösung ist ein Polynom vierten Grades,

$$\mathbf{u}_0(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

wobei die Bewegungsgleichung (7.20) zu  $24AQ = -g\rho$  führt, und die Integrationskonstanten B, C, D, E durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Für den beidseitig eingespannten Balken (Brücke) sind die Randbedingungen

$$\mathbf{u}_0(0) = \mathbf{u}'_0(0) = 0 = \mathbf{u}_0(L) = \mathbf{u}'_0(L)$$

Daraus folgt sofort  $\mathbf{u}_0(0) = E = 0$  und  $\mathbf{u}'_0(0) = D = 0$  sowie die Bestimmungsgleichungen für B und C

$$\mathbf{u}_0(L) = AL^4 + BL^3 + CL^2 = 0 \quad \mathbf{u}'_0(L) = 4AL^3 + 3BL^2 + 2CL = 0$$

mit der Lösung

$$\mathbf{u}_0(x) = Ax^2(x-L)^2, \quad A = -\frac{g\rho}{24Q}.$$

## 7.5 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen. Aus Sicht der Elastizitätstheorie handelt es sich bei Flüssigkeiten um isotrope Körper mit endlichem Kompressionsmodul  $K$ , aber mit verschwindendem Schermodul  $\mu = 0$ . Somit gibt es nach Kap. 7.3 nur longitudinale (Dichte-) Wellen, jedoch keine transversalen Wellen. Der Ansatz der Elastizitätstheorie ist offensichtlich für die Hydrodynamik ungenügend, denn offensichtlich passieren in Flüssigkeiten noch andere interessante Dinge außer den Kompressionswellen.

### Kontinuitäts-Gleichung

Die Hydrodynamik beruht auf der Annahme, dass sich eine Flüssigkeit durch zwei Variablen beschreiben lässt, zum einen der Massendichte

$$\rho(\vec{x}, t)$$

und dem Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}, t)$$

der konstituierenden Massenpunkte. In einer inkompressiblen Flüssigkeit ist die Massendichte konstant, i.a. jedoch variabel. Da man in der Hydrodynamik i.a. auch keine abgeschlossene Volumina betrachtet, gibt es auch keine erhaltene Gesamtmasse  $\int d^3x \rho(\vec{x}, t)$ . Anstelle der *globalen* Massenerhaltung betrachtet man in der Hydrodynamik die *Kontinuitätsgleichung*

$$\boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \quad \mathbf{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{c}, t) \vec{v}(\vec{c}, t), \quad (7.21)$$

wobei man  $\vec{j}$  als die *Stromdichte* bezeichnet. Die Kontinuitätsgleichung (7.21) ist eine direkte Folge der *lokalen* Massenerhaltung. Integrieren wir (7.21) über ein kleines Volumen  $\Delta V$  mit Oberfläche  $\Delta F$ , so erhalten wir

$$\int_{\Delta V} dV \dot{\rho} = - \int_{\Delta V} dV \operatorname{div} \vec{j} = - \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{j},$$

wobei wir den Satz von Gauß verwendet haben. Das bedeutet aber nun, dass die totale Massenänderung im Volumen  $\Delta V$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} dV \rho$$

gleich dem negativen totalen Massenfluss

$$\int_{\Delta F} d\vec{F} \vec{j}$$

aus dem Volumen raus (durch die Oberfläche) ist. Diese Gleichung muss natürlich für jedes noch so kleine Volumen  $\Delta V$  gelten, somit auch in der differentiellen Form (7.21).

### Euler-Gleichung

Nun wollen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Masse  $\Delta m = \rho \Delta V$  in einem kleinen Volumenelement  $\Delta V$  aufstellen:

$$\Delta m \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \Delta V \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \Delta \vec{K}_{\text{ext}} + \Delta \vec{K}_{\text{Druck}}, \quad (7.22)$$

wobei wir die Kraft  $\Delta \mathbf{K} = \Delta \vec{K}_{\text{ext}} + \Delta \vec{K}_{\text{Druck}}$  auf das Volumenelement in einen *externen* Anteil  $\Delta \mathbf{K}_{\text{ext}}$  und einen Druckanteil  $\Delta \mathbf{K}_{\text{Druck}}$  aufgespalten haben. Ein Beispiel ist das Schwerfeld mit der Kraftdichte  $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$  und der Kraft

$$\Delta \vec{K}_{\text{ext}}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{x}, t) \Delta V.$$

Die druckabhängige Komponente der Kraftdichte ist genau dann verschieden von Null, wenn der Druck auf das Volumenelement  $\Delta V$  auf der einen Seite größer als auf der gegenüberliegenden Seite ist, wenn also der Druck  $P = P(\vec{x}, t)$  nicht konstant ist. Wir betrachten ein kleines kartesisches Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  mit der Oberfläche  $F$ . Dann ist (Kraft=Druck  $\times$  Fläche)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{K}_{\text{Druck}} &= - \int_F d\vec{F}P = - \vec{e}_x \Delta y \Delta z [P(x + \Delta x) - P(x)] \\ &\quad - \vec{e}_y \Delta x \Delta z [P(y + \Delta y) - P(y)] - \vec{e}_z \Delta x \Delta y [P(z + \Delta z) - P(z)] \\ &= -(\text{grad } P) \Delta V. \end{aligned}$$

### Geschwindigkeitsfeld und Materialableitung

In der Teilchenmechanik haben wir jedes Teilchen einzeln behandelt: Jedes Teilchen wird mit seinem Ortsvektor  $\vec{x}_i(x_1, x_2, x_3)$  zum Zeitpunkt  $t$  identifiziert; bewegt sich das Teilchen, dann ändert sich  $\vec{x}_i$  mit der Zeit  $t$ , d.h.  $\vec{x}_i$  und  $t$  sind voneinander unabhängig.

In einem kontinuierlichen Medium ist es einfacher, anders zu verfahren: Man beschreibt die Bewegung im kontinuierlichen Medium durch ein Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , wobei jetzt  $\vec{x}$  im Raum fest ist.  $\vec{v}$  gibt jetzt die momentane Geschwindigkeit der Teilchen an, die zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$  sind. Also sind hier  $\vec{x}$  und  $t$  unabhängige Variable. Man kann sich  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  vorstellen, wenn man an einen Fluss denkt: Ein fließendes Teilchen, das zur Zeit  $t$  an einem Ort mit Koordinaten  $\vec{x}$  ist, bewegt sich in der Zeit  $dt$  an einen anderen Ort  $\vec{x} + \vec{v}dt$ . Wenn  $v_i(\vec{x}, t)$  und  $v_i(\vec{x} + \vec{v}dt)$  die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes an den zwei Punkten sind, dann ist die momentane Beschleunigung  $a_i(\vec{x}, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gegeben durch

$$a_i(\vec{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ v_i(x_1 + v_1 dt, x_2 + v_2 dt, x_3 + v_3 dt, t + dt) v_i(\vec{x}, t) \right]$$

Mithilfe der mehrdimensionalen Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung

$$\begin{aligned} f(x, y, z, s) &\approx f(a, b, c, d) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c, d)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c, d)(y - b) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c, d)(z - c) + \frac{\partial f}{\partial s}(a, b, c, d)(s - d) \end{aligned}$$

Mit  $x = x_1 + v_1 dt$ ,  $y = x_2 + v_2 dt$ ,  $z = x_3 + v_3 dt$ ,  $s = t + dt$ ,  $a = x_1$ ,  $b = x_2$ ,  $c = x_3$ ,  $d = t$  finden wir also für die Beschleunigung

$$a_i(\vec{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_1} v_1 dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} v_2 dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} v_3 dt + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt \right] = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right) v_i$$

Dabei bedeutet der erste Term die Änderung von  $v_i$  an einem festen Punkt im Raum ( $\partial v_i / \partial t$  wird lokale Beschleunigung genannt), und der zweite Term bedeutet die Veränderung von  $v_i$  durch den Ortswechsel der Teilchen zu einer festen Zeit  $t$ .

Man bezeichnet die Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}$$

auch als Materialableitung. Die obige Argumentation lässt sich auf beliebige Funktionen  $\psi(\vec{x}, t)$  ausdehnen, und die zeitliche Änderung lautet

$$\frac{D\psi}{Dt} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\psi$$

Also finden wir für die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}.$$

Wir setzen nun die Ausdrücke für  $\Delta K_{\text{ext}}$ ,  $\Delta K_{\text{Druck}}$  und  $d\vec{v}/dt$  in (7.22) ein und erhalten

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \right) = -\text{grad } P + \vec{f} \quad (7.23)$$

die *Euler-Gleichung* der Hydrodynamik, die die Dynamik *idealer* Flüssigkeiten (ohne Reibung) beschreibt. In realen Flüssigkeiten sind natürlich immer (innere) Reibungskräfte vorhanden (z.B.  $\sim \eta \nabla^2 \vec{v}$ ), analog der Reibungskraft  $-\gamma \dot{x}$  beim gedämpften harmonischen Oszillator in Kap. 3.1. Mit Reibungskräften heißen die Bewegungsgleichungen dann *Navier-Stokes Gleichungen*.

### Zustands-Gleichung

Wir bemerken, dass die Euler-Gleichung (7.23) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (7.21) 4 partielle Differentialgleichungen für 5 reelle Felder  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $P(\vec{x}, t)$  darstellen. Offensichtlich fehlt noch ein Zusammenhang zwischen  $\rho, \vec{v}$  und dem Druck  $P$ . Im allgemeinen ist der Druck eine Funktion der Dichte, also

$$P = P(\rho(\vec{x}, t)), \quad (7.24)$$

und weiteren externen Parametern, wie z.B. der Temperatur  $T$ . Der Zusammenhang (7.24) wird *Zustandsgleichung* genannt, die Zustandsgleichung



hängt sehr stark von der Art der Flüssigkeit ab (siehe Thermodynamik). Ein Beispiel ist die sogenannte *polytrope* Zustandsgleichung

$$P \sim \rho^\gamma, \quad (7.25)$$

die wegen

$$\rho = P^{\frac{1}{\gamma}} \quad \curvearrowright \quad \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\gamma} P^{\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{\rho}{P\gamma}$$

eine Kompressibilität  $\kappa$  der Form

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \quad (7.26)$$

impliziert. Der Exponent  $\gamma$  kann alle möglichen Werte annehmen:

$\gamma$	System
$\infty$	inkompressible Flüssigkeit
$\gg 1$	reale Flüssigkeit
1	ideales Gas (isotherm)
$\neq 1$	ideales Gas (adiabatisch)

wobei isotherm bedeutet, dass das System eine konstante Temperatur hat und adiabatisch, dass das System energetisch abgeschlossen ist. Details werden in der Thermodynamik behandelt.

## 7.6 Beispiele zur Hydrodynamik

Wir betrachten nun einige Anwendungen zur Dynamik idealer Flüssigkeiten.

### Ruhende Flüssigkeit im Schwerfeld

Dies ist der Grenzfall der *Hydrostatik*, es gilt

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}), \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad P(\vec{x}, t) = P(\vec{x}),$$

und die Kontinuitätsgleichung (7.21) ist immer erfüllt. Im homogenen Schwerfeld ist  $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$  und die Euler-Gleichung (7.23) wird wegen der Translationsinvarianz in  $x$  und  $y$  Richtung zu

$$\text{grad } P = -\rho g \vec{e}_z, \quad \frac{d}{dz} P(z) = -\rho(z)g. \quad (7.27)$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist  $\rho \equiv \rho_0$  konstant und

$$P(z) = P_0 - \rho_0 g z.$$

## Druckverteilung in der Atmosphäre

Für ein ideales Gas ist  $\gamma = 1$  in der Zustandsgleichung (7.25):

$$VP = NN_a k_B T,$$

wobei  $k_B$  die Boltzmann-Konstante,  $N_a$  die Avogadro-Zahl und  $N$  die Molanzahl ist. Sei  $m$  die Masse eines Gas-Moleküls und  $\rho$  die Massendichte, dann erhalten wir

$$mP = \frac{NN_a m}{V} k_B T = \frac{M}{V} k_B T = \rho k_B T.$$

Die Euler-Gleichung (7.27) wird damit zu

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} P.$$

Die Integration ergibt die barometrische Höhenformel

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \approx e^{-\frac{z}{8\text{km}}}$$

für die Höhenabhängigkeit des Luftdruckes, unter der (sehr groben) Annahme einer konstanten Lufttemperatur von  $T \approx 300\text{K}$ .

### Rotierende Flüssigkeit im Schwerfeld

Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeit (Wasser) in einem mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotierenden Eimer. Nach dem Einstellvorgang wird es aufgrund der residuellen Reibungskräfte zu einem statischen Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

kommen. In Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  haben wir

$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

und für Divergenz einer vektorwertigen Funktion  $\vec{A} = (A_r, A_\varphi, A_z)$  und den Gradient einer skalaren Funktion  $f$  gilt

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten ausgedrückt sind dann die Größen des Systems

$$\rho = \rho_0, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z, \quad \vec{v} = \omega r \vec{e}_\varphi, \quad \vec{f} = -g \rho_0 \vec{e}_z.$$

Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt (wegen  $\text{div } \vec{v} = 0$ ) und für das Geschwindigkeitsfeld gilt  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$  und

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \omega r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega r \vec{e}_\varphi) = \omega^2 r \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\omega^2 r \vec{e}_r.$$

Wegen der Rotationssymmetrie ist  $P = P(r, z)$ . Die Euler-Gleichung wird zu

$$-\rho_0 \omega^2 r \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z - \rho_0 g \vec{e}_z,$$

beziehungsweise zu

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g,$$

mit der Lösung

$$P(r, z) = P_0 + \rho_0 \left( -gz + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right).$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist durch die Isobare (Fläche konstanten Drucks)

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{1}{g\rho_0} (P_0 - P)$$

gegeben, wobei  $P \approx 1 \text{ bar}$  gleich dem äußeren Luftdruck ist. Die Oberfläche ist also ein Rotationsparaboloid.

### Bernoulli-Gleichung

Wir betrachten eine allgemeine stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes, also

$$\vec{f} = 0, \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}), \quad P(\vec{x}, t) = P(\vec{x}).$$

Die dazugehörige Euler-Gleichung

$$\rho_0 (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } P$$

lässt sich umformen; dafür betrachten wir zunächst die erste Komponente:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \text{grad}) v_1 &= \sum_j v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ &\quad + v_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + v_3 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{v}^2 - (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_1 \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - v_3 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ v_3 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) - v_1 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ v_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) - v_2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix}$$

Damit finden wir die umgeformte Eulergleichung

$$\frac{\rho_0}{2} \text{grad } (\vec{v}^2) - \rho_0 \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\text{grad } P \quad (7.28)$$

Wie in Kap. 4.5 definiert das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x})$  via

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{x}(\lambda) = \vec{v}(\vec{x}) \quad (7.29)$$

eine Stromlinie  $\vec{x}(\lambda)$  zu der einparametrischen Schar von Abbildungen

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}(\lambda)$$

mit dem Scharparameter  $\lambda$ . Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x})$  ist in jedem Punkt zur Stromlinie tangential. Wir multiplizieren nun die Euler-Gleichung (7.28) mit  $\vec{v}$  und beachten, dass  $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = 0$  ist. Wir erhalten

$$0 = \vec{v} \cdot \left( \frac{\rho}{2} \text{grad } (\vec{v}^2) + \text{grad } P \right) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \cdot \text{grad} \left( \frac{\rho}{2} (\vec{v}^2) + P \right),$$

also mit  $df(\vec{x})/d\lambda = (\vec{\nabla} f) \cdot \partial \vec{x} / \partial \lambda$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + P \right).$$

Damit erhalten wir die *Bernoulli-Gleichung*

$$\boxed{\left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + P \right) = \text{konstant entlang einer Stromlinie}}$$

Hierbei bezeichnet man  $\rho_0 \vec{v}^2 / 2$  als den *Staudruck*. Die Bernoulli-Gleichung erklärt einige bekannte Phänomene. So sinkt an einer Verengungsstelle (z.B. in einem Rohr) der Druck  $P(\vec{x})$ , da dort die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{x})$  erhöht ist. Aus dem gleichen Grunde werden zwei nebeneinander her fahrende Schiffe zueinander hingezogen.

### Potentialströmung

Eine *wirbelfreie* Strömung ist durch

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = 0$$

definiert. Demnach gibt es ein skalares Geschwindigkeitspotential  $\Phi(\vec{x})$  mit

$$\vec{v}(\vec{x}) = \text{grad } \Phi(\vec{x}).$$

Daher auch die Bezeichnung *Potentialströmung*. Für eine inkompressible Flüssigkeit  $\rho(\vec{x}) \equiv \rho_0$  folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung (7.21)

$$0 = \text{div } \vec{v} = \Delta \Phi$$

die sogenannte *Laplace-Gleichung*. Zu der Laplace-Gleichung gehören noch Randbedingungen. Für Flüssigkeiten verschwindet die Normalkomponente  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  am Rand. Damit lassen sich einige Dinge berechnen, z.B. das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung durch ein Rohr oder die wirbelfreie Umströmung eines Körpers.

### Schallwellen

Der gewöhnliche Schall ergibt sich aus einer Linearisierung der hydrodynamischen Gleichung für Luft um die Gleichgewichtslösung

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad P(\vec{x}, t) = P_0.$$

Wir nehmen sofort an, dass die Abweichungen von der Gleichgewichtslösung harmonisch sind, also die Form

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad \vec{v} = \Delta\vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad P = P_0 + \Delta P e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

annehmen. Die Kontinuitätsgleichung (7.21) wird somit (unter Vernachlässigung eines Terms zweiter Ordnung mit  $\Delta\rho\Delta\vec{v}$ ) zu

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = i\omega\Delta\rho e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - i\vec{k}\rho_0\Delta\vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = 0$$

und damit

$$\omega\Delta\rho - \vec{k} \cdot \Delta\vec{v}\rho_0 = 0. \quad (7.30)$$

In der Euler-Gleichung (7.23) ist der Term  $\sim (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$  zweiter Ordnung in  $\Delta\vec{v}$  und kann somit vernachlässigt werden. Wir erhalten somit für die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla P = i\omega\rho_0\Delta\vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - i\vec{k}\Delta P e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = 0$$

und damit

$$\omega\rho_0\Delta\vec{v} - \vec{k}\Delta P = 0. \quad (7.31)$$

Die differentielle Zustandsgleichung

$$\Delta P = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \Delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho_0\kappa_S} \quad (7.32)$$

ergibt nun einen Zusammenhang zwischen  $\Delta P$  und  $\Delta\rho$ . Hierbei ist die Kompressibilität  $\kappa_S$  (siehe (7.26)) mit einem Index  $S$  versehen worden, um anzuzeigen, dass bei Schallwellen die Kompression so schnell erfolgt, dass die adiabatische (ohne Energieaustausch) Kompression von Bedeutung ist.

Wir setzen nun (7.32) in (7.31) ein und schreiben (7.30) und (7.31) in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0\vec{k} \\ -\frac{\vec{k}}{\rho_0\kappa_S} & \omega\rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta\vec{v} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.33)$$

Für transversale Wellen mit  $\vec{k} \perp \Delta\vec{v}$  folgt sofort  $\omega \equiv 0$  (vergleiche Kap. 7.1 oder Gl. (7.30)). Wir interessieren uns also für longitudinale Wellen mit  $\vec{k} \parallel \Delta\vec{v}$ . Mit  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  und  $\Delta\vec{v} = \Delta v\vec{e}_z$  wird (7.33) zu

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0 k \\ -\frac{k}{\rho_0\kappa_S} & \omega\rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta v \end{pmatrix} = 0 \quad (7.34)$$

einem homogenen linearen Gleichungssystem für die beiden Unbekannten  $\Delta\rho$  und  $\Delta k$ . Es gibt nicht-triviale Lösungen nur, wenn die Determinante verschwindet, also wenn

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_0\kappa_S} = c_S^2 k^2$$

ist, was die Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\kappa_S}}$$

definiert. Zu bemerken ist, dass die Dispersionsrelation  $\omega(k) = c_S k$  linear ist, die Schallgeschwindigkeit  $c_S \approx 320 \text{ m/s}$  somit nicht von der Frequenz des Schalls abhängt. Anderenfalls wäre die akustische Kommunikation (Sprache) stark erschwert.

## 8. Relativistische Mechanik

### 8.1 Einleitung

Einige experimentelle Tatsachen zeigen, dass die Galileiinvariante Mechanik nur begrenzte Gültigkeit haben kann.

#### Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit,

$$c = 2,99992458 \times 10^5 \text{ km/s}$$

ist in Widerspruch zum Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\vec{v}' = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt auch direkt aus den Maxwellgleichungen, welche die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen vollständig bestimmen (siehe Elektrodynamik).

#### Teilchen ohne Masse tragen Energie und Impuls

Für ein kräftefreies Teilchen mit Masse  $m$  kennen wir den Energie-Impuls-Zusammenhang

$$E = T = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (8.1)$$

Wie verhält es sich aber mit masselosen Teilchen, etwa dem Photon, dem Träger der elektromagnetischen Wechselwirkung? Ein Photon hat Energie und Impuls (z.B. photoelektrischer Effekt), und Gl. (8.1) kann nicht mehr gelten (weder ist  $E$  unendlich bei endlichem  $|\vec{p}|$ , noch verschwindet  $|\vec{p}|$  bei endlicher Energie  $E$ ).

Das Photon ist charakterisiert durch Kreisfrequenz  $\omega$  und Wellenlänge  $\lambda$ , die über

$$\omega\lambda = 2\pi c$$

zusammenhängen. Da  $E \propto \omega$  und  $|\vec{p}| \propto 1/\lambda$  folgt daraus die Energie-Impuls-Beziehung

$$T \equiv E = \alpha |\vec{p}| c$$

mit dimensionslosem  $\alpha$  (es wird sich zeigen, dass  $\alpha = 1$ ).

Es gibt Prozesse, in dem ein massives Teilchen unter vollständiger Verwandlung seiner Masse in kinetische Energie in mehrere masselose Teilchen zerfällt. Beispielsweise zerfällt ein elektrisch neutrales  $\pi$ -Meson spontan in zwei Photonen:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

mit  $m(\pi^0) \approx 2.4 \cdot 10^{-25}$  g. Wenn das  $\pi^0$  vor dem Zerfall ruht, addieren sich die Impulse der beiden Photonen zu Null:

$$\vec{p}_\gamma^{(1)} + \vec{p}_\gamma^{(2)} = 0$$

und die Summe ihrer Energien ist  $m(\pi^0)$  mal dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit:

$$T_\gamma^{(1)} + T_\gamma^{(2)} = c(|\vec{p}_\gamma^{(1)}| + |\vec{p}_\gamma^{(2)}|) = m(\pi^0)c^2$$

Also hat offenbar ein masseloses Teilchen auch dann eine Energie, wenn es in Ruhe ist, die sogenannte Ruheenergie:

$$E(\vec{p}) = mc^2$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E(\vec{p}) = mc^2 + T(\vec{p})$$

mit  $T(\vec{p})$  aus Gl. (8.1) für kleine Geschwindigkeiten  $|\vec{p}|/m \ll c$ , für masselose Teilchen aber  $T(\vec{p}) = |\vec{p}|c$ . Beides lässt sich durch den Ausdruck

$$E(\vec{p}) = \sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2} \quad (8.2)$$

vereinbaren (das ist die allgemeine Energie-Impuls-Beziehung). Damit ist

$$T(\vec{p}) = E(\vec{p}) - mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2} - mc^2,$$

d.h. für  $m = 0$  ist

$$T(\vec{p}) = |\vec{p}|c,$$

und für  $m \neq 0$ , aber  $|\vec{p}|/m \ll c$  findet man wegen

$$mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2 c^2}{(mc^2)^2}} \approx mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2 c^2}{(mc^2)^2} \right)$$

$$T(\vec{p}) \approx mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2 c^2}{(mc^2)^2} - 1 \right) = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

unabhängig von  $c$ .

### Radioaktiver Zerfall bewegter Teilchen

Das Myon, eine Art "schweres Elektron" mit Masse  $m_\mu \simeq 207 m_e$ , zerfällt spontan in ein Elektron und zwei Neutrinos,

$$\mu \rightarrow e + \nu_1 + \nu_2,$$

mit einer Zerfallszeit (im Labor)

$$\tau^{(0)}(\mu) = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} \text{s}.$$

Misst man nun die Zerfallszeit von bewegten Myonen (an einem Strahl), so findet man eine Zerfallszeit, welche via

$$\tau^{(v)}(\mu) = \gamma \tau^{(0)}(\mu), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.3)$$

von der Geschwindigkeit  $v$  der Myonen abhängt. Nun ist aber der Zerfallsvorgang eines Elementarteilchens ein *intrinsischer* Vorgang, der also ohne äußeren Einfluß nur nach der *inneren* Uhr des Elementarteilchens abläuft. Gleichung (8.3) bedeutet nun, dass die innere Uhr bei erhöhten Geschwindigkeiten um den Faktor  $\gamma$  langsamer läuft.

### 8.2 Wellengleichung

Die Ausbreitung des Lichts, d.h. der 6 Komponenten des elektromagnetischen Feldes  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  wird durch die Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(\vec{x}, t) = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) u(\vec{x}, t) = 0$$

beschrieben. Wir betrachten erst einmal eine Raumdimension, d.h.

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0, \quad (8.4)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct), \quad (8.5)$$

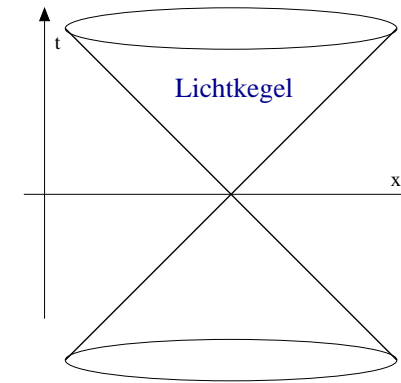


Abbildung 8.1: Der Lichtkegel.

wobei die  $u_1()$  und  $u_2()$  beliebige Funktionen sind, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

### Lichtkegel

Nach (8.5) ist somit  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Insbesondere breitet sich das Licht von einem Ereignis zur Zeit  $t_0$  und Ort  $x_0$  auf dem *Lichtkegel*

$$u(x, t) = \delta(x - x_0 + c(t - t_0)) + \delta(x - x_0 - c(t - t_0))$$

aus. Wegen der (experimentell festgestellten) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss daher die Kugelwellenfront

$$c^2(t - t_0)^2 - (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = 0 \quad (8.6)$$

invariant unter einer noch zu findenden Klasse von Transformationen sein. Diese Klasse von Transformationen soll dann nicht nur für die Wellengleichung, d.h. für die Elektrodynamik, sondern auch für die Mechanik gelten; man nennt sie *Lorentztransformationen*.

### Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Die Gesetze der Mechanik müssen demnach gegenüber der Newtonschen Mechanik modifiziert werden, da diese unter der Gruppe der Galileitransformationen invariant sind (siehe Kap. sec:galileitrafo) und eine Galileitransformation mit  $\vec{v} \neq 0$  (8.6) nicht invariant lässt. Bei der Bestimmung der neuen

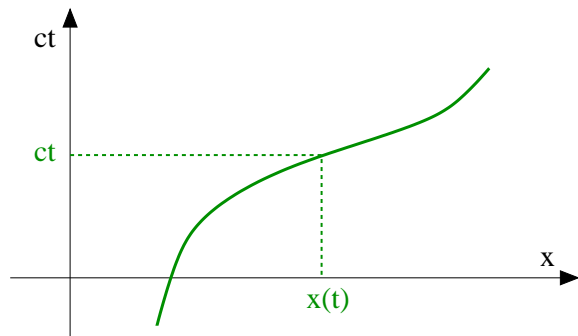


Abbildung 8.2: Eine Weltlinie.

Gesetze der Mechanik lässt Einstein sich vom *Trägheitsprinzip* leiten, welches besagt, dass für freie Teilchen das Trägheitsgesetz  $\ddot{\vec{x}} = 0$  invariant sein soll (vergl. Kap. sec:galileitrafo). Die Relativitätstheorie beruht also auf drei Postulaten:

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

2. Relativitätsprinzip

Alle Gesetze der Mechanik (und der Elektrodynamik) müssen invariant unter der Gruppe der Lorentztransformationen sein.

3. Trägheitsprinzip

Die Gleichung  $\ddot{\vec{x}}$  soll für freie Teilchen (Lorentz-)invariant sein.

### 8.3 Lorentztransformationen

Wir beschreiben die Raum-Zeit durch den  $\mathbb{R}^4$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  mit der Zeitkoordinate  $x^0 = ct$  und den kartesischen Raumkoordinaten  $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$ .

Die Bewegung eines Teilchens ist dann eine Kurve im  $\mathbb{R}^4$ , welche jede Ebene  $x^0 = \text{konst.}$  nur einmal schneidet (*Weltlinie*). Für freie Teilchen sind die Weltlinien Geraden. Die gesuchten Transformationen  $\mathbf{A}$  müssen also geradentreu sein und sogar affin, wenn kein Ereignis ins Unendliche abgebildet werden soll:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (\det \mathbf{A} \neq 0; \mathbf{a} \in \mathbb{R}^4). \quad (8.7)$$

Koordinatendifferenzen  $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  transformieren sich homogen:

$$\xi' = \mathbf{A}\xi$$

und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt nach (8.6) die Invarianz von

$$0 = c^2(t - t_0)^2 - (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = (\xi^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\xi^i)^2 = \xi^T \mathbf{g} \xi, \quad (8.8)$$

wobei

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

der *metrische Tensor* im  $\mathbb{R}^4$  ist und den *Minkowski-Raum* definiert. Die Invarianz von (8.8) bedeutet

$$0 = (\xi')^T \mathbf{g} \xi' = \xi^T \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{g} \mathbf{A}}_{\mathbf{h}} \xi,$$

dass der Tensor  $\mathbf{h}$  proportional zu  $\mathbf{g}$  sein muss, also

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^T \mathbf{g} \mathbf{A} = \mu^2 \mathbf{g}, \quad (8.10)$$

wobei die Proportionalitätskonstante i.a. positiv ist (betrachte z.B.  $\xi' = \mu \xi$ ).

#### Feste Maßstäbe

Reine Dilatationen  $\xi' = \mu \xi$  ( $\mu > 0$ ) beschreiben simultane Maßstabsänderungen für Länge und Zeit; sie sind mit allen Postulaten verträglich. Im allgemeinen wollen wir jedoch die physikalischen Gesetze unter der Annahme formulieren, dass wir in jedem Bezugssystem mit den gleichen (festen) Maßstäben messen. Dann sind Dilatationen nicht zugelassen und

$$\mu^2 \equiv 1.$$

Damit definieren wir die Gruppe der Lorentztransformationen  $\mathbf{\Lambda}$  durch

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{a}; \quad \boxed{\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{g}} \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^4. \quad (8.11)$$

## 8.4 Darstellung der Lorentztransformationen

Die allgemeine Lorentztransformation ist durch 6 Parameter bestimmt.

- (i) Drei Parameter  $\vec{\varphi} = |\vec{\varphi}| \hat{\varphi}$  beschreiben Rotationen um eine Achse  $\hat{\varphi}$  um den Winkel  $\varphi = |\vec{\varphi}|$ .
- (ii) Drei Parameter  $\vec{\phi} = |\vec{\phi}| \hat{\phi}$  beschreiben die Transformation auf ein bewegtes Bezugssystem mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = -c\hat{\phi} \cosh\phi$ , mit  $\phi = |\vec{\phi}|$ .

Die allgemeine, homogene Lorentztransformation ist durch

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\varphi}) = e^{\vec{\phi} \cdot \vec{K} + \vec{\varphi} \cdot \vec{J}} \quad (8.12)$$

gegeben, wobei die infinitesimalen Erzeugenden  $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$  und  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$  in Komponenten durch

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

gegeben sind.

### Gruppeneigenschaft

Die homogenen Lorentztransformationen bilden eine Gruppe, es gilt also stets

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\varphi}) \cdot \Lambda(\vec{\phi}', \vec{\varphi}') = \Lambda(\vec{\phi}'', \vec{\varphi}''),$$

wobei allerdings der Zusammenhang zwischen  $(\vec{\phi}, \vec{\varphi}, \vec{\phi}', \vec{\varphi}')$  und  $(\vec{\phi}'', \vec{\varphi}'')$  i.a. kompliziert ist. Lorentztransformationen ohne einen Rotationsanteil, also  $\Lambda(\vec{\phi}, \vec{0})$  bezeichnet man als *spezielle Lorentztransformationen*.

### Kommutatoren

Der Kommutator zweier Operatoren (Matrizen)  $A$  und  $B$  ist als  $[A, B] := AB - BA$  definiert. Der Kommutator zweier Erzeugenden ist wieder eine Erzeugende, somit bilden die Erzeugenden eine sogenannte *Lie-Algebra*. Man kann die Kommutator-Relationen übersichtlich schreiben, wenn man den total-antisymmetrischen Tensor dritten Ranges,  $\epsilon_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) (siehe Kap. 1.7) verwendet. Die Kommutatorrelationen der Erzeugenden lassen sich dann als

$$[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} K_k$$

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{ijk} J_k$$

schreiben, wobei  $i, j, k$  über  $x, y, z$  laufen. Insbesondere sieht man aus  $[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} J_k$ , dass die speziellen Lorentztransformationen *keine* Gruppe bilden: Zwei spezielle Lorentztransformationen in verschiedenen Richtungen hintereinander beinhalten auch eine Rotation.

## 8.5 Spezielle Lorentztransformationen

Drehungen sind auch Lorentztransformationen, doch sie bringen keine neue Physik mit sich. Wir betrachten daher im folgenden nur die speziellen Lorentztransformationen und können uns hier, o.B.d.A. auf einen *Boost* entlang der  $x$ -Koordinaten beschränken, d.h.  $\Lambda = \exp[\phi K_x]$ .

Wir wollen nun die explizite Form von (8.12) für einen Boost berechnen. Wir bemerken zunächst, dass

$$K_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}'$$

und somit  $K_x^{2m} = \mathbf{1}'$  und  $K_x^{2m-1} = K_x$  ( $m \geq 1$ ). Wir berechnen nun explizit die Exponentialreihe für einen Boost in  $x$ -Richtung,

$$e^{\phi K_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} K_x^n = \mathbf{1} + \underbrace{\left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m}}{(2m)!} \right)}_{\cosh \phi - 1} \mathbf{1}' + \underbrace{\left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m-1}}{(2m-1)!} \right)}_{\sinh \phi} K_x.$$

In Komponenten finden wir also

$$\Lambda(\phi) = e^{\phi K_x} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oder, mit  $\mathbf{x}' = \Lambda(\phi)\mathbf{x}$ ,

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh \phi ct + \sinh \phi x \\ x' &= \sinh \phi ct + \cosh \phi x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (8.15)$$

Ein Punkt, welcher im bewegten Koordinatensystem ruht, also  $\mathbf{x}' = \text{const.}$ , der bewegt sich im Laborsystem mit

$$\sinh \phi ct + \cosh \phi x = 0,$$

also mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = -c \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = -c \tanh \phi, \quad (8.16)$$

womit wir also einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des bewegten Systems und dem Parameter  $\phi$  der Lorentztransformation gefunden haben. Aus  $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ ,  $\cosh^2 \phi = 1/(1 - \tanh^2 \phi)$  und  $\sinh^2 \phi = \tanh^2 \phi / (1 - \tanh^2 \phi)$  finden wir mit  $\beta \equiv v/c$

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \phi = -\beta\gamma, \quad (8.17)$$

und somit wird (8.15) zu

$$\begin{aligned} ct' &= c\gamma t - \beta\gamma x \\ x' &= -\beta\gamma t + \gamma x \end{aligned} \quad (8.18)$$

Wir können nun nachweisen, dass (8.18) tatsächlich eine Lorentztransformation ist, das heißt, dass (8.6) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} c^2(t')^2 - (x')^2 &= \gamma^2 (ct - vx)^2 - \gamma^2 (-vt + x)^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (c^2 t^2 - x^2). \end{aligned}$$

## Kausalität

Wir bemerken noch, dass (8.6) die *Kausalität* im folgenden Sinne erfüllt. Man bezeichnet ein Ereignis

$$(ct_1, \vec{x}_1) \quad \text{mit} \quad c^2(t_2 - t_1)^2 > (x_2 - x_1)^2$$

als zeitartig, ein Ereignis

$$(ct_2, \vec{x}_2) \quad \text{mit} \quad c^2(t_2 - t_1)^2 < (x_1 - x_1)^2$$

als raumartig. Für  $t_1 < t_2$  kommt bei zwei zeitartigen Ereignissen ein Lichtsignal vom ersten Ereignis vor dem zweiten Ereignis an, bei zwei raumartigen Ereignissen erst danach. Bei zeitartigen Ereignissen kann das erste also das zweite Ereignis auslösen, bei raumartigen Ereignissen ist dies nicht möglich. Nach (8.6) erfüllen Lorentztransformationen also die Kausalität.

## 8.6 Addition von relativistischen Geschwindigkeiten

Wir betrachten zwei Boosts hintereinander in x-Richtung, den ersten mit Geschwindigkeit  $v_1$ , den zweiten mit Geschwindigkeit  $v_2$ . Die Endgeschwindigkeit sei  $v_3$  und  $\tanh \phi_i = -\beta_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Man findet aus der Exponentialdarstellung

$$e^{\phi_3 K_x} = e^{\phi_2 K_x} \cdot e^{\phi_1 K_x} = e^{(\phi_2 + \phi_1) K_x},$$

die Beziehung  $\phi_3 = \phi_2 + \phi_1$  (Beachte: für  $[A, B] \neq 0$  ist  $e^A e^B \neq e^{A+B}$ ). Man kann auch explizit die Matrizenmultiplikation durchführen, unter Vernachlässigung der  $y, z$  Koordinaten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh \phi_3 & \sinh \phi_3 \\ \sinh \phi_3 & \cosh \phi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & \sinh \phi_2 \\ \sinh \phi_2 & \cosh \phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & \sinh \phi_1 \\ \sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 \cosh \phi_1 + \sinh \phi_2 \sinh \phi_1 & \cosh \phi_2 \sinh \phi_1 + \sinh \phi_2 \cosh \phi_1 \\ \cosh \phi_2 \sinh \phi_1 + \sinh \phi_2 \cosh \phi_1 & \cosh \phi_2 \cosh \phi_1 + \sinh \phi_2 \sinh \phi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\phi_2 + \phi_1) & \sinh(\phi_2 + \phi_1) \\ \sinh(\phi_2 + \phi_1) & \cosh(\phi_2 + \phi_1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da  $\cosh \phi_2 \cosh \phi_1 + \sinh \phi_2 \sinh \phi_1 = \cosh(\phi_1 + \phi_2)$  und  $\cosh \phi_2 \sinh \phi_1 + \sinh \phi_2 \cosh \phi_1 = \sinh(\phi_1 + \phi_2)$ .

Aus  $\phi_3 = \phi_2 + \phi_1$  folgt nun zusammen mit (8.16) ( $\tanh \phi_i = -\beta_i$ )

$$\tanh^{-1} \beta_3 = \tanh^{-1} \beta_2 + \tanh^{-1} \beta_1$$



oder

$$\beta_3 = \tanh [\tanh^{-1} \beta_2 + \tanh^{-1} \beta_1] = \frac{\sinh (\tanh^{-1} \beta_2 + \tanh^{-1} \beta_1)}{\cosh (\tanh^{-1} \beta_2 + \tanh^{-1} \beta_1)}$$

$$= \frac{\sinh(\tanh^{-1} \beta_2) \cosh(\tanh^{-1} \beta_1) + \cosh(\tanh^{-1} \beta_2) \sinh(\tanh^{-1} \beta_1)}{\cosh(\tanh^{-1} \beta_2) \cosh(\tanh^{-1} \beta_1) + \sinh(\tanh^{-1} \beta_2) \sinh(\tanh^{-1} \beta_1)}.$$

Jetzt verwenden wir  $\sinh = \tanh / \sqrt{1 - \tanh^2}$  und  $\cosh = 1 / \sqrt{1 - \tanh^2}$ .  
Damit wird

$$\sinh \tanh^{-1} \beta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \cosh \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und wir erhalten mit

$$\beta_3 = \frac{\beta_2 + \beta_1}{1 + \beta_2 \beta_1}, \quad \boxed{v_3 = \frac{v_2 + v_1}{1 + v_2 v_1 / c^2}} \quad (8.19)$$

die gewünschte Additionsformel für relativistische Geschwindigkeiten. Für  $v_1/c \ll 1$  und  $v_2/c \ll 1$  wird (8.19) zu  $v_3 = v_1 + v_2 + O(v_1 v_2 / c^2)$ . Im nicht-relativistischen Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten erhalten wir also die übliche Formel der Galileischen Mechanik. Man kann auch noch zeigen, dass  $v_3$  nach (8.19) nie größer als die Lichtgeschwindigkeit sein kann.

## 8.7 Vektorkalkül

In der relativistischen Mechanik spielt der Begriff eines *4-er Vektors* eine zentrale Rolle:  $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  ist ein kontravarianter 4-er Vektor, falls sich die Komponenten unter Lorentztransformationen wie Koordinatendifferenzen verhalten, d.h.

$$\xi'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \xi^\nu. \quad (8.20)$$

Nicht alle Quartupel von Zahlen sind 4-er Vektoren; ganz entscheidend sind ihre Transformationseigenschaften. Z.B. ist  $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$  ein 4-er Vektor, aber  $(ct, x, y, z^3)$  ist kein 4-er Vektor.

### Invariantes Skalarprodukt

Lorentztransformationen sind so definiert, dass der metrische Tensor  $g$  invariant bleibt. Somit ist das Skalarprodukt

$$(\xi, \eta) = \xi^\mu g_{\mu\nu} \eta^\nu = \xi^\mu \eta_\nu \equiv \xi^0 \eta_0 - (\vec{\xi} \cdot \vec{\eta})$$

auch Lorentz-invariant, falls  $\xi$  und  $\eta$  4-er Vektoren sind, sich also wie (8.20) transformieren. Hierbei haben wir mit

$$\eta_\mu \equiv g_{\mu\nu} \eta^\nu, \quad (x_\mu) = (ct, -x, -y, -z)$$

die kovarianten Komponenten von  $\eta$  definiert. Mit  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  kann man das Skalarprodukt auch als

$$(\xi, \eta) = g^{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu$$

schreiben.

### Kovariante Ableitungen

Die Differenzierung nach der Raum-Zeit,  $x = (ct, x, y, z)$ , ist kovariant,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (8.21)$$

und das Skalarprodukt

$$\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \xi^\mu \partial_\mu$$

ein invarianter Differentialoperator. Die Kovarianz von  $\partial_\mu$  lässt sich folgendermaßen zeigen: Für eine skalare Funktion  $f(x)$  (skalare Funktionen sind Lorentz-invariant) ist die Differenzierung entlang  $\xi$ ,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda \xi) \right|_{\lambda=0} = \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = (\xi^\mu \partial_\mu) f(x)$$

Lorentz-invariant, und somit auch  $\xi^\mu \partial_\mu$ . Dann muss also  $\partial_\mu$  kovariant sein.

### Wellenoperator

Natürlich ist der Wellenoperator

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

invariant; dies war ja unser Ausgangspunkt. Ferner ist für jedes Vektorfeld  $A(x)$  die Divergenz

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$$

eine Invariante (Skalarfeld).

## 8.8 Kräftefreie Teilchen

Wir suchen eine Lorentz-invariante Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, welche für kleine Geschwindigkeiten den bekannten nicht-relativistischen Grenzfall haben soll. Wir fangen mit einem freien Teilchen an.

### Differentielle Bogenlänge

Die differentielle Bogenlänge  $ds$  auf einer Weltlinie  $x(t)$  ist ein Skalar,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

oder, mit der 3-er Geschwindigkeit  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ ,

$$ds^2 = (c^2 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) dt^2$$

und somit Lorentz-invariant.

### Eigenzeit

Die *Eigenzeit*  $\tau$  ist via  $c d\tau = ds$  definiert, also

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} dt. \quad (8.22)$$

Da  $\tau$  Lorentz-invariant ist und im Limes kleiner Geschwindigkeiten mit der Laborzeit  $t$  übereinstimmt ist  $\tau$  die Eigenzeit, also die *Uhr* in dem bewegten Bezugssystem.

### Zeitdilatation

Da der in Kap. 8.1 diskutierte radioaktive Zerfall als physikalischer Prozess Lorentz-invariant ist, läuft er in der Laborzeit  $dt$  gemäß,

$$dt = \gamma d\tau$$

um den Faktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  langsamer ab (Zeitdilatation), in Einklang mit dem Experiment, siehe (8.3).

### 4-er Geschwindigkeit

Als 4-er Geschwindigkeit bezeichnet man

$$u = \frac{dx}{d\tau}; \quad (u^\mu) = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

mit  $(u, u) = c^2$ . Analog ist der 4-er Impuls via

$$p = mu; \quad (p^\mu) = \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (8.23)$$

definiert, wobei  $m$  die Ruhemasse ist. Er erfüllt stets

$$(p, p) = m^2 c^2. \quad (8.24)$$

### Lagrangefunktion

Um die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen herzuleiten gehen wir vom Prinzip von Euler-Maupertuis Kap. 4.9 aus, welches besagt, dass für ein freies Teilchen die Variation der Lorentz-invarianten Wirkung

$$\int_{(1)}^{(2)} ds$$

für feste Endpunkte (1) und (2) verschwindet (Die Endzeiten sind jedoch variable). Wir postulieren also, dass das Prinzip von Euler-Maupertuis auch relativistisch gilt, wenn man wie mit  $s$  einen Lorentz-invarianten Kurvenparameter wählt.

Wir multiplizieren mit  $(-mc)$  und erhalten

$$\int (-mc) ds = \int (-mc^2) d\tau = \int \underbrace{(-mc^2) \sqrt{1 - v^2/c^2}}_{\equiv L} dt.$$

Das Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L dt = 0,$$

führt zur Definition der Lagrangefunktion

$$L = (-mc^2) \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx -mc^2 + \frac{m}{2} v^2 + O(v^2/c^2).$$

Die Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

werden somit zu

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0, \quad (8.25)$$

welches den relativistischen 3-er Impuls

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$$

definiert, in Einklang mit (8.23). Die Lösung von (8.25) ist natürlich  $\vec{v} = \text{konst.}$ .

### Relativistische Energie

Aus Kap. 4.7 wissen wir, dass für zeitunabhängige Lagrangefunktionen die verallgemeinerte Energie  $\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L$  erhalten ist. In unserem Fall ist die Energie  $E$  also

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^3 p^i \dot{x}^i - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} - (-mc^2)\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \\ &= \frac{m\vec{v}^2 + (mc^2)(1 - \vec{v}^2/c^2)}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}, \end{aligned}$$

also

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}},$$

mit der *Ruheenergie*  $E(\vec{v} = 0) = mc^2$ . Ein Vergleich mit (8.23) zeigt, dass der 4-er Impuls also die Form

$$p^{\mu} = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (8.26)$$

hat und die Relation  $(p, p) = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$  somit zu

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + (mc^2)^2} \quad (8.27)$$

wird.

### Photonen

Aus (8.27) folgt, dass auch Teilchen *ohne Masse*, wie z.B. Photonen, einen Impuls

$$p = E/c$$

haben.

## 8.9 Elektrodynamik

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes lassen sich via

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}; \quad \vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (8.28)$$

als Funktion des skalaren Potentials  $\phi(\vec{x}, t)$  und des Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  darstellen. Wir fassen nun  $\phi(\vec{x}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  als kovariante Komponenten eines 4-er Vektors auf (folgt aus der Lorentzinvarianz der Maxwellgleichungen),

$$(A^{\mu}) = \left( \phi(\vec{x}, t), \vec{A}(\vec{x}, t) \right).$$

Somit ist

$$I = \int \left[ -m^2c^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{u}, \mathbf{A}) \right] d\tau$$

eine Lorentzinvariante Wirkung. Wir wollen nun zeigen, dass

$$I = \int \underbrace{\left[ -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}\right) \right]}_{L(\vec{x}, \vec{v}, t)} dt$$

die Lagrangefunktion  $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$  für ein relativistisches Teilchen in einem elektromagnetischen Feld definiert. Wegen der Lorentzinvarianz von  $I$  genügt es nun die Bewegungsgleichungen  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$  zu betrachten. Sie lauten (siehe Kap. 4.3):

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.29)$$

Also ist der nicht-relativistische Grenzfall  $v/c \ll 1$  korrekt wiedergegeben.

### Beispiel: Konstantes elektrisches Feld

Als Beispiel betrachten wir ein konstantes elektrisches Feld  $\vec{E} = E_0\hat{x}$ . Mit  $\vec{v} = v\hat{x}$  wird dann (8.29) zu

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = eE_0t,$$

oder

$$0 = m^2v^2 - (eE_0t)^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = v^2 \left( m^2 + \frac{(eE_0t)^2}{c^2} \right) - (eE_0t)^2.$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$v = v(t) = \frac{eE_0 t}{\sqrt{m^2 + (eE_0 t)^2/c^2}}.$$

Für kleine Zeiten ist  $v \simeq eE_0 t/m$ , für große Zeiten ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} v = c$ , die Lichtgeschwindigkeit  $c$  hat also die Bedeutung einer asymptotischen Grenzgeschwindigkeit.