8. Relativistische Mechanik

8.1 Einleitung

Einige experimentelle Tatsachen zeigen, dass die Galileiinvariante Mechanik nur begrenzte Gültigkeit haben kann.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit,

$$c \;=\; 2,99992458 \times 10^5\,\text{km/s}$$

ist in Widerspruch zum Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\vec{v}' \;=\; \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt auch direkt aus den Maxwellgleichungen, welche die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen vollständig bestimmen (siehe Elektrodynamik).

Teilchen ohne Masse tragen Energie und Impuls

Für ein kräftefreies Teilchen mit Masse m kennen wir den Energie-Impuls-Zusammenhang

$$E = T = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{8.1}$$

Wie verhält es sich aber mit masselosen Teilchen, etwa dem Photon, dem Träger der elektromagnetischen Wechselwirkung? Ein Photon hat Energie und Impuls (z.B. photoelektrischer Effekt), und Gl. (8.1) kann nicht mehr gelten (weder ist E unendlich bei endlichem $|\vec{p}|$, noch verschwindet $|\vec{p}|$ bei endlicher Energie E).

Das Photon ist charakterisiert durch Kreisfrequenz ω und Wellenlänge λ, die über

$$\omega\lambda = 2\pi c$$

zusammenhängen. Da $E \propto \omega$ und $|\vec{p}| \propto 1/\lambda$ folgt daraus die Energie-Impuls-Beziehung

$$T \equiv E = \alpha|\vec{p}|c$$

mit dimensionslosem α (es wird sich zeigen, dass $\alpha = 1$.

Es gibt Prozesse, in dem ein massives Teilchen unter vollständiger Verwandlung seiner Masse in kinetische Energie in mehrere masselose Teilchen zerfällt. Beispielsweise zerfällt ein elektrisch neutrales π-Meson spontan in zwei Photonen:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

mit $m(\pi^0) \approx 2.4 \cdot 10^{-25}$ g. Wenn das π^0 vor dem Zerfall ruht, addieren sich die Impulse der beiden Photonen zu Null:

$$\vec{p}_\gamma^{(1)} + \vec{p}_\gamma^{(2)} = 0$$

und die Summe ihrer Energien ist $m(\pi^0)$ mal dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit:

$$T_\gamma^{(1)} + T_\gamma^{(2)} = c\left(|\vec{p}_\gamma^{(1)}| + |\vec{p}_\gamma^{(2)}|\right) = m(\pi^0)c^2$$

Also hat offenbar ein masseloses Teilchen auch dann eine Energie, wenn es in Ruhe ist, die sogenannte Ruheenergie:

$$E(\vec{p}) = mc^2$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E(\vec{p}) = mc^2 + T(\vec{p})$$

mit $T(\vec{p})$ aus Gl. (8.1) für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{p}|/m \ll c$, für masselose Teilchen aber $T(\vec{p}) = |\vec{p}|c$. Beides lässt sich durch den Ausdruck

$$E(\vec{p}) = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \vec{p}^2c^2} \tag{8.2}$$

vereinbaren (das ist die allgemeine Energie-Impuls-Beziehung). Damit ist

$$T(\vec{p}) = E(\vec{p}) - mc^2 = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \vec{p}^2c^2} - mc^2\,,$$

d.h. für $m = 0$ ist

$$T(\vec{p}) = |\vec{p}|c\,,$$

und für $m \neq 0$, aber $|\vec{p}|/m \ll c$ findet man wegen

$$mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2c^2}{\left(mc^2\right)^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2c^2}{\left(mc^2\right)^2}\right)$$

$$T(\vec{p}) \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2c^2}{\left(mc^2\right)^2}-1\right) = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

unabhängig von c.

Radioakiver Zerfall bewegter Teilchen

Das Myon, eine Art "schweres Elektron" mit Masse $m_\mu \simeq 207\, m_e$, zerfällt spontan in ein Elektron und zwei Neutrinos,

$$\mu \;\rightarrow\; e + \nu_1 + \nu_2,$$

mit einer Zerfallszeit (im Labor)

$$\tau^{(0)}(\mu) \;=\; (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6}s.$$

Misst man nun die Zerfallszeit von bewegten Myonen (an einem Strahl), so findet man eine Zerfallszeit, welche via

$$\tau^{(\nu)}(\mu) \;=\; \gamma\, \tau^{(0)}(\mu), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2/c^2}}, \tag{8.3}$$

von der Geschwindigkeit ν der Myonen abhängt. Nun ist aber der Zerfallsvorgang eines Elementarteilchens ein *intrinsischer* Vorgang, der also ohne äußeren Einfluß nur nach der *inneren* Uhr des Elementarteilchens abläuft. Gleichung (8.3) bedeutet nun, dass die innere Uhr bei erhöhten Geschwindigkeiten um den Faktor γ langsamer läuft.

8.2 Wellengleichung

Die Ausbreitung des Lichts, d.h. der 6 Komponenten des elektromagnetischen Feldes $\vec{E}$, $\vec{B}$ wird durch die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\right) u(\vec{x},t) = 0$$

beschrieben. Wir betrachten erst einmal eine Raumdimension, d.h.

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\, u(x,t) \;=\; 0, \tag{8.4}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x,t) \;=\; u_1(x+ct) \;+\; u_2(x-ct), \tag{8.5}$$

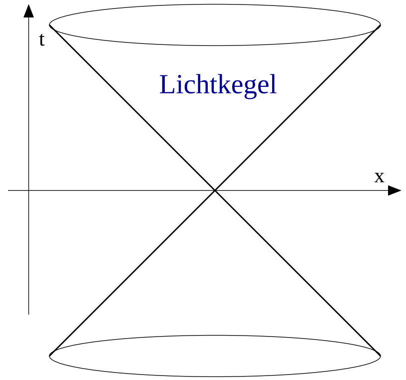

Abbildung 8.1: Der Lichtkegel.

wobei die $u_1()$ und $u_2()$ beliebige Funktionen sind, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

Lichtkegel

Nach (8.5) ist somit c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Insbesondere breitet sich das Licht von einem Ereignis zur Zeit t_0 und Ort x_o auf dem *Lichtkegel*

$$u(x,t) \;=\; \delta(x - x_0 + c(t-t_0)) + \delta(x - x_0 - c(t-t_0))$$

aus. Wegen der (experimentell festgestellten) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss daher die Kugelwellenfront

$$\boxed{c^2(t-t_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}_0)^2 = 0} \tag{8.6}$$

invariant unter einer noch zu findenden Klasse von Transformationen sein. Diese Klasse von Transformationen soll dann nicht nur für die Wellengleichung, d.h. für die Elektrodynamik, sondern auch für die Mechanik gelten; man nennt sie *Lorentztransformationen.*

Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Die Gesetze der Mechanik müssen demnach gegenüber der Newtonschen Mechanik modifiziert werden, da diese unter der Gruppe der Galileitransformationen invariant sind (siehe Kap. 1.2) und eine Galileitransformation mit $\vec{\nu} \neq 0$ (8.6) nicht invariant lässt. Bei der Bestimmung der neuen Gesetze

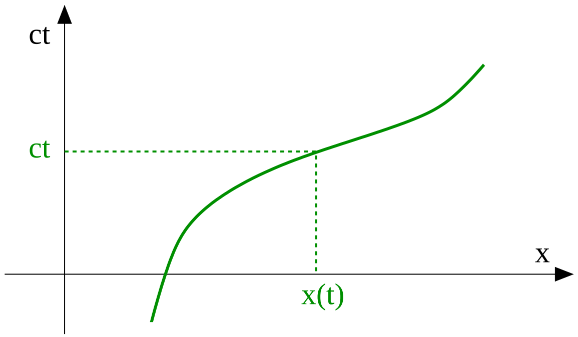

Abbildung 8.2: Eine Weltlinie.

der Mechanik lässt Einstein sich vom *Trägheitsprinzip* leiten, welches besagt, dass für freie Teilchen das Trägheitsgesetz $\ddot{\vec{x}} = 0$ invariant sein soll (vergl. Kap. 1.2). Die Relativitätstheorie beruht also auf drei Postulaten:

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

2. Relativitätsprinzip

   Alle Gesetze der Mechanik (und der Elektrodynamik) müssen invariant unter der Gruppe der Lorentztransformationen sein.

3. Trägheitsprinzip

   Die Gleichung $\ddot{\vec{x}}$ soll für freie Teilchen (Lorentz-)invariant sein.

8.3 Lorentztransformationen

Wir beschreiben die Raum-Zeit durch den R^4 mit den Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit der Zeitkoordinate $x^0 = ct$ und den kartesischen Raumkoordinaten $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$.

Die Bewegung eines Teilchens ist dann eine Kurve im R^4, welche jede Ebene $x^0 =$ konst. nur einmal schneidet (*Weltlinie*). Für freie Teilchen sind die Weltlinien Geraden. Die gesuchten Transformationen A müssen also geradentreu sein und sogar affin, wenn kein Ereignis ins Unendliche abgebildet werden soll:

$$x' = Ax + a, \qquad (\det A \neq 0;\ a \in \mathsf{R}^4). \tag{8.7}$$

Koordinatendifferenzen $\xi = x - x_0$ transformieren sich homogen:

$$\xi' = A\xi$$

und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt nach (8.6) die Invarianz von

$$0 = c^2(t - t_0)^2 - (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = (\xi^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^2 = \xi^T g\, \xi\,, \tag{8.8}$$

wobei

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

der *metrische Tensor* im R^4 ist und den *Minkowski-Raum* definiert. Die Invarianz von (8.8) bedeutet

$$0 = (\xi')^T g\, \xi' = \xi^T \underbrace{A^T g\, A}_{h}\, \xi\,,$$

dass der Tensor h proportional zu g sein muss, also

$$h = A^T g\, A = \mu^2 g\,, \tag{8.10}$$

wobei die Proportionalitätskonstante i.a. positiv ist (betrachte z.B. $\xi' = \mu\xi$).

Feste Maßstäbe

Reine Dilatationen $\xi' = \mu\xi$ $(\mu > 0)$ beschreiben simultane Maßstabsänderungen für Länge und Zeit; sie sind mit allen Postulaten verträglich. Im allgemeinen wollen wir jedoch die physikalischen Gesetze unter der Annahme formulieren, dass wir in jedem Bezugssytem mit den gleichen (festen) Maßstäben messen. Dann sind Dilatationen nicht zugelassen und

$$\mu^2 \equiv 1.$$

Damit definieren wir die Gruppe der Lorentztransformationen Λ durch

$$x' = \Lambda x + a; \qquad \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \qquad a \in \mathsf{R}^4. \tag{8.11}$$

8.4 Darstellung der Lorentztransformationen

Die allgemeine Lorentztransformation ist durch 6 Parameter bestimmt.

(i) Drei Parameter $\vec{\varphi} = |\vec{\varphi}|\,\hat{\varphi}$ beschreiben Rotationen um eine Achse $\hat{\varphi}$ um den Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$.

(ii) Drei Parameter $\vec{\phi} = |\vec{\phi}|\,\hat{\phi}$ beschreiben die Transformation auf ein bewegtes Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -c\hat{\phi}\cosh\phi$, mit $\phi = |\vec{\phi}|$.

Die allgemeine, homogene Lorentztransformation ist durch

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\varphi}) \;=\; e^{\vec{\phi}\cdot\vec{K}+\vec{\varphi}\cdot\vec{J}} \tag{8.12}$$

gegeben, wobei die infinitesimalen Erzeugenden $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$ und $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ in Komponenten durch

$$K_x = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad K_y = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad K_z = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

$$J_x = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

gegeben sind.

Gruppeneigenschaft

Die homogenen Lorentztransformationen bilden eine Gruppe, es gilt also stets

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\varphi}) \cdot \Lambda(\vec{\phi}\,', \vec{\varphi}\,') \;=\; \Lambda(\vec{\phi}\,'', \vec{\varphi}\,''),$$

wobei allerdings der Zusammenhang zwischen $(\vec{\phi}, \vec{\varphi}, \vec{\phi}\,', \vec{\varphi}\,')$ und $(\vec{\phi}\,'', \vec{\varphi}\,'')$ i.a. kompliziert ist. Lorentztransformationen ohne einen Rotationsanteil, also $\Lambda(\vec{\phi}, \vec{0})$ bezeichnet man als *spezielle Lorentztransformationen.*

Kommutatoren

Der Kommutator zweier Operatoren (Matrizen) A und B ist als $[A, B] := AB - BA$ definiert. Der Kommutator zweier Erzeugenden ist wieder eine Erzeugende, somit bilden die Erzeugenden eine sogenannte *Lie-Algebra.* Man kann die Kommutator-Relationen übersichtlich schreiben, wenn man den total-antisymmetrischen Tensor dritten Ranges, ϵ_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, 3)$ (siehe Kap. 8.4) verwendet. Die Kommutatorrelationen der Erzeugenden lassen sich dann als

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= \epsilon_{ijk}\, J_k \\ [J_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk}\, K_k \\ [J_i, J_j] &= -\epsilon_{ijk}\, J_k \end{aligned}$$

schreiben, wobei i, j, k über x, y, z laufen. Insbesondere sieht man aus $[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk}\, J_k$, dass die speziellen Lorentztransformationen *keine* Gruppe bilden: Zwei spezielle Lorentztransformationen in verschiedenen Richtungen hintereinander beinhalten auch eine Rotation.

8.5 Spezielle Lorentztransformationen

Drehungen sind auch Lorentztransformationen, doch sie bringen keine neue Physik mit sich. Wir betrachten daher im folgenden nur die speziellen Lorentztransformationen und können uns hier, o.B.d.A. auf einen *Boost* entlang der x-Koordinaten beschränken, d.h. $\Lambda = \exp[\phi K_x]$.

Wir wollen nun die explizite Form von (8.12) für einen Boost berechnen. Wir bemerken zunächst, dass

$$K_x^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbf{1}'$$

und somit $K_x^{2m} = \mathbf{1}'$ und $K_x^{2m-1} = K_x$ $(m \geqslant 1)$. Wir berechnen nun explizit die Exponentialreihe für einen Boost in x-Richtung,

$$e^{\phi K_x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} K_x^n \;=\; \mathbf{1} + \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m}}{(2m)!}\right)}_{\cosh\phi - 1} \mathbf{1}' + \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m-1}}{(2m-1)!}\right)}_{\sinh\phi} K_x.$$

In Komponenten finden wir also

$$\Lambda(\phi) \;=\; e^{\phi K_x} \;=\; \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oder, mit $x' = \Lambda(\phi)x$,

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh\phi\, ct + \sinh\phi\, x \\ x' &= \sinh\phi\, ct + \cosh\phi\, x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{8.15}$$

Ein Punkt, welcher im bewegten Koordinatensystem ruht, also x' =const., der bewegt sich im Laborsystem mit

$$\sinh\phi\, ct + \cosh\phi\, x \;=\; 0\,,$$

also mit der Geschwindigkeit

$$v \;=\; -c\,\frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} \;=\; -c\,\tanh\phi, \tag{8.16}$$

womit wir also einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des bewegten Systems und dem Parameter ϕ der Lorentztransformation gefunden haben. Aus $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$, $\cosh^2\phi = 1/(1-\tanh^2\phi)$ und $\sinh^2\phi = \tanh^2\phi/(1-\tanh^2\phi)$ finden wir mit $\beta \equiv v/c$

$$\cosh\phi \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\equiv\; \gamma, \qquad \sinh\phi \;=\; -\beta\gamma, \tag{8.17}$$

und somit wird (8.15) zu

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= c\gamma\, t - \beta\gamma\, x \\ x' &= -v\gamma\, t + \gamma\, x \end{aligned}} \tag{8.18}$$

Wir können nun nachweisen, dass (8.18) tatsächlich eine Lorentztransformation ist, das heißt, dass (8.6) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} c^2(t')^2 - (x')^2 &= \gamma^2\,(ct - vx)^2 - \gamma^2\,(-vt + x)^2 \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)\left(c^2t^2 - x^2\right). \end{aligned}$$

Kausalität

Wir bemerken noch, dass (8.6) die *Kausalität* im folgenden Sinne erfüllt. Man bezeichnet ein Ereignis

$$(ct_1, \vec{x}_1) \qquad \text{mit} \qquad c^2(t_2-t_1)^2 > (x_2-x_1)^2$$

als zeitartig, ein Ereignis

$$(ct_2, \vec{x}_2) \qquad \text{mit} \qquad c^2(t_2-t_1)^2 < (x_1-x_1)^2$$

als raumartig. Für $t_1 < t_2$ kommt bei zwei zeitartigen Ereignissen ein Lichtsignal vom ersten Ereignis vor dem zweiten Ereignis an, bei zwei raumartigen Ereignissen erst danach. Bei zeitartigen Ereignissen kann das erste also das zweite Ereignis auslösen, bei raumartigen Ereignissen ist dies nicht möglich. Nach (8.6) erfüllen Lorentztransformationen also die Kausalität.

8.6 Addition von relativistischen Geschwindigkeiten

Wir betrachten zwei Boosts hintereinander in x-Richtung, den ersten mit Geschwindigkeit v_1, den zweiten mit Geschwindigkeit v_2. Die Endgeschwindigkeit sei v_3 und $\tanh\phi_i = -\beta_i$, $(i = 1,2,3)$. Man findet aus der Exponentialdarstellung

$$e^{\phi_3 K_x} \;=\; e^{\phi_2 K_x}\cdot e^{\phi_1 K_x} \;=\; e^{(\phi_2+\phi_1)K_x},$$

die Beziehung $\phi_3 = \phi_2 + \phi_1$ (Beachte: für $[A,B] \neq 0$ ist $e^A e^B \neq e^{A+B}$). Man kann auch explizit die Matrizenmultiplikation durchführen, unter Vernachlässigung der y, z Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi_3 & \sinh\phi_3 \\ \sinh\phi_3 & \cosh\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi_2 & \sinh\phi_2 \\ \sinh\phi_2 & \cosh\phi_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cosh\phi_1 & \sinh\phi_1 \\ \sinh\phi_1 & \cosh\phi_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi_2\cosh\phi_1 + \sinh\phi_2\sinh\phi_1 & \cosh\phi_2\sinh\phi_1 + \sinh\phi_2\cosh\phi_1 \\ \cosh\phi_2\sinh\phi_1 + \sinh\phi_2\cosh\phi_1 & \cosh\phi_2\cosh\phi_1 + \sinh\phi_2\sinh\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\phi_2+\phi_1) & \sinh(\phi_2+\phi_1) \\ \sinh(\phi_2+\phi_1) & \cosh(\phi_2+\phi_1) \end{pmatrix},$$

da $\cosh\phi_2\cosh\phi_1 + \sinh\phi_2\sinh\phi_1 = \cosh(\phi_1+\phi_2)$ und $\cosh\phi_2\sinh\phi_1 + \sinh\phi_2\cosh\phi_1 = \sinh(\phi_1+\phi_2)$.

Aus $\phi_3 = \phi_2 + \phi_1$ folgt nun zusammen mit (8.16) $(\tanh\phi_i = -\beta_i)$

$$\tanh^{-1}\beta_3 \;=\; \tanh^{-1}\beta_2 + \tanh^{-1}\beta_1$$

oder

$$\beta_3 = \tanh\left[\tanh^{-1}\beta_2 + \tanh^{-1}\beta_1\right] = \frac{\sinh\left(\tanh^{-1}\beta_2 + \tanh^{-1}\beta_1\right)}{\cosh\left(\tanh^{-1}\beta_2 + \tanh^{-1}\beta_1\right)}$$

$$= \frac{\sinh(\tanh^{-1}\beta_2)\cosh(\tanh^{-1}\beta_1) + \cosh(\tanh^{-1}\beta_2)\sinh(\tanh^{-1}\beta_1)}{\cosh(\tanh^{-1}\beta_2)\cosh(\tanh^{-1}\beta_1) + \sinh(\tanh^{-1}\beta_2)\sinh(\tanh^{-1}\beta_1)}.$$

Jetzt verwenden wir $\sinh = \tanh/\sqrt{1-\tanh}$ und $\cosh = 1/\sqrt{1-\tanh}$. Damit wird

$$\sinh\tanh^{-1}\beta \;=\; \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \cosh\tanh^{-1}\beta \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und wir erhalten mit

$$\beta_3 = \frac{\beta_2+\beta_1}{1+\beta_2\beta_1}, \qquad \boxed{v_3 = \frac{v_2+v_1}{1+v_2v_1/c^2}} \tag{8.19}$$

die gewünschte Additionsformel für relativistische Geschwindigkeiten. Für $v_1/c \ll 1$ und $v_2/c \ll 1$ wird (8.19) zu $v_3 = v_1 + v_2 + O(v_1v_2/c^2)$. Im nicht-relativistischen Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten erhalten wir also die übliche Formel der Galileischen Mechanik. Man kann auch noch zeigen, dass v_3 nach (8.19) nie größer als die Lichtgeschwindigkeit sein kann.

8.7 Vektorkalkül

In der relativistischen Mechanik spielt der Begriff eines *4-er Vektors* eine zentrale Rolle: $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ist ein kontravarianter 4-er Vektor, falls sich die Komponenten unter Lorentztransformationen wie Koordinatendifferenzen verhalten, d.h.

$$\xi'^{\mu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\xi^{\nu}. \tag{8.20}$$

Nicht alle Quartupel von Zahlen sind 4-er Vektoren; ganz entscheidend sind ihre Transformationseigenschaften. Z.B. ist $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ ein 4-er Vektor, aber (ct, x, y, z^3) ist kein 4-er Vektor.

Invariantes Skalarprodukt

Lorentztransfomationen sind so definiert, dass der metrische Tensor g invariant bleibt. Somit ist das Skalarprodukt

$$(\xi,\eta) \;=\; \xi^\mu g_{\mu\nu}\eta^\nu \;=\; \xi^\mu\eta_\nu \;\equiv\; \xi^0\eta_0 - \left(\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}\right)$$

auch Lorentz-invariant, falls ξ und η 4-er Vektoren sind, sich also wie (8.20) transformieren. Hierbei haben wir mit

$$\eta_\mu \equiv g_{\mu\nu}\eta^\nu, \qquad (x_\mu) = (ct, -x, -y, -z)$$

die kovarianten Komponenten von η definiert. Mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ kann man das Skalarprodukt auch als

$$(\xi,\eta) \;=\; g^{\mu\nu}\xi_\mu\eta_\nu$$

schreiben.

Kovariante Ableitungen

Die Differenzierung nach der Raum-Zeit, $x = (ct, x, y, z)$, ist kovariant,

$$\partial_\mu \;\equiv\; \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{8.21}$$

und das Skalarprodukt

$$\xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} \;=\; \xi^\mu\partial_\mu$$

ein invarianter Differentialoperator. Die Kovarianz von ∂_μ lässt sich folgendermaßen zeigen: Für eine skalare Funktion $f(x)$ (skalare Funktionen sind Lorentz-invariant) ist die Differenzierung entlang ξ,

$$\left.\frac{d}{d\lambda}f(x+\lambda\xi)\right|_{\lambda=0} \;=\; \xi^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \;=\; (\xi^\mu\partial_\mu)\; f(x)$$

Lorentz-invariant, und somit auch $\xi^\mu\partial_\mu$. Dann muss also ∂_μ kovariant sein.

Wellenoperator

Natürlich ist der Wellenoperator

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

invariant; dies war ja unser Ausgangspunkt. Ferner ist für jedes Vektorfeld $A(x)$ die Divergenz

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$$

eine Invariante (Skalarfeld).

8.8 Kräftefreie Teilchen

Wir suchen eine Lorentz-invariante Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, welche für kleine Geschwindigkeiten den bekannten nicht-relativistischen Grenzfall haben soll. Wir fangen mit einem freien Teilchen an.

Differentielle Bogenlänge

Die differentielle Bogenlänge ds auf einer Weltlinie $x(t)$ ist ein Skalar,

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \;=\; c^2dt^2 - \left(dx^2+dy^2+dz^2\right),$$

oder, mit der *3-er Geschwindigkeit* $\vec{v} = d\vec{x}/dt$,

$$ds^2 \;=\; \left(c^2 - \left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right)\,dt^2$$

und somit Lorentz-invariant.

Eigenzeit

Die *Eigenzeit* τ ist via $c\,d\tau = ds$ definiert, also

$$\boxed{d\tau \;=\; \frac{1}{c}\,ds \;=\; \sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}\,dt.} \tag{8.22}$$

Da τ Lorentz-invariant ist und im Limes kleiner Geschwindigkeiten mit der Laborzeit t übereinstimmt ist τ die Eigenzeit, also die *Uhr* in dem bewegten Bezugssystem.

Zeitdilatation

Da der in Kap. 8.1 diskutierte radioaktive Zerfall als physikalischer Prozess Lorentz-invariant ist, läuft er in der Laborzeit dt gemäß,

$$dt \;=\; \gamma\,d\tau$$

um den Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ langsamer ab (Zeitdilation), in Einklang mit dem Experiment, siehe (8.3).

4-er Geschwindigkeit

Als *4-er Geschwindigkeit* bezeichnet man

$$u \;=\; \frac{dx}{d\tau}; \qquad (u^\mu) \;=\; \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

mit $(u,u) = c^2$. Anlog ist der *4-er Impuls* via

$$p \;=\; mu; \qquad (p^\mu) \;=\; \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{8.23}$$

definiert, wobei m die Ruhemasse ist. Er erfüllt stets

$$(p,p) \;=\; m^2c^2. \tag{8.24}$$

Lagrangefunktion

Um die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen herzuleiten gehen wir vom Prinzip von Euler-Maupertuis Kap. 4.9 aus, welches besagt, dass für ein freies Teilchen die Variation der Lorentz-invarianten Wirkung

$$\int_{(1)}^{(2)} ds$$

für feste Endpunkte (1) und (2) verschwindet (Die Endzeiten sind jedoch variable). Wir postulieren also, dass das Prinzip von Euler-Maupertuis auch relativistisch gilt, wenn man wie mit s einen Lorentz-invarianten Kurvenparameter wählt.

Wir multiplizieren mit $(-mc)$ und erhalten

$$\int(-mc)\,ds \;=\; \int(-mc^2)\,d\tau \;=\; \int \underbrace{(-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\equiv L}\,dt.$$

Das Variationsprinzip

$$\delta\int_{(1)}^{(2)} L\,dt \;=\; 0,$$

führt zur Definition der Lagrangefunktion

$$L \;=\; (-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2} \;\approx\; -mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^2/c^2)\,.$$

Die Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \;=\; 0, \qquad (i=1,2,3)$$

werden somit zu

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \;=\; 0}\,, \tag{8.25}$$

welches den relativistischen 3-er Impuls

$$\vec{p} \;=\; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

definiert, in Einklang mit (8.23). Die Lösung von (8.25) ist natürlich $\vec{v} =$ konst..

Relativistische Energie

Aus Kap. 4.7 wissen wir, dass für zeitunabhängige Lagrangefunktionen die verallgemeinerte Energie $\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ erhalten ist. In unserem Fall ist die Energie E also

$$E \;=\; \sum_{i=1}^{3} p^i \dot{x}^i - L \;=\; \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - (-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$= \frac{m\vec{v}^2 + (mc^2)(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\,,$$

also

$$\boxed{E \;=\; \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}}\,,$$

mit der *Ruheenergie* $E(\vec{v}=0) = mc^2$. Ein Vergleich mit (8.23) zeigt, dass der 4-er Impuls also die Form

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{8.26}$$

hat und die Relation $(p,p) = E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$ somit zu

$$\boxed{E \;=\; \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + (mc^2)^2}} \tag{8.27}$$

wird.

Photonen

Aus (8.27) folgt, dass auch Teilchen *ohne Masse*, wie z.B. Photonen, einen Impuls

$$p \;=\; E/c$$

haben.

8.9 Elektrodynamik

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes lassen sich via

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\vec{A}; \qquad \vec{E} \;=\; -\mathrm{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{8.28}$$

als Funktion des skalaren Potentials $\phi(\vec{x},t)$ und des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{x},t)$ darstellen. Wir fassen nun $\phi(\vec{x},t)$ und $\vec{A}(\vec{x},t)$ als kovariante Komponenten eines 4-er Vektors auf (folgt aus der Lorentzinvarianz der Maxwellgleichungen),

$$(A^\mu) \;=\; \Big(\phi(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)\Big)\,.$$

Somit ist

$$I \;=\; \int \left[-m^2c^2 - \frac{e}{c}(u,A)\right] d\tau$$

eine Lorentzinvariante Wirkung. Wir wollen nun zeigen, dass

$$I \;=\; \int \underbrace{\left[-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} - e(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A})\right]}_{L(\vec{x},\vec{v},t)} dt$$

die Lagrangefunktion $L(\vec{x},\vec{v},t)$ für ein relativistisches Teilchen in einem elektromagnetischen Feld definiert. Wegen der Lorentzinvarianz von I genügt es nun die Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$ zu betrachten. Sie lauten (siehe Kap. 4.3):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;=\; e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}}\,. \tag{8.29}$$

Also ist der nicht-relativistische Grenzfall $v/c \ll 1$ korrekt wiedergegeben.

Beispiel: Konstantes elektrisches Feld

Als Beispiel betrachten wir ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\hat{x}$. Mit $\vec{v} = v\hat{x}$ wird dann (8.29) zu

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;=\; eE_0t,$$

oder

$$0 \;=\; m^2v^2 - (eE_0t)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \;=\; v^2\left(m^2 + \frac{(eE_0t)^2}{c^2}\right) - (eE_0t)^2\,.$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$v = v(t) = \frac{eE_0t}{\sqrt{m^2 + (eE_0t)^2/c^2}} .$$

Für kleine Zeiten ist $v \simeq eE_0t/m$, für große Zeiten ist $\lim_{t\to\infty} v = c$, die Lichtgeschwindigkeit c hat also die Bedeutung einer asymptotischen Grenzgeschwindigkeit.