

7. Kontinuumsmechanik

7.1 Kontinuums-Limes

In der Kontinuumsmechanik geht es um die Beschreibung von mechanischen Systemen, die aus so vielen Massenpunkten zusammengesetzt sind, dass eine Beschreibung der Bewegung der einzelnen Massenpunkte entweder nicht mehr sinnvoll oder nicht mehr möglich ist. Beispiele sind die Dynamik von elastischen Körpern oder die von Flüssigkeiten und Gasen.

Um die Bewegungsgleichungen für ein Ensemble von Massenpunkten herzuleiten, geht man von den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte aus und macht dann den *Kontinuumsübergang*.

Schwingende Saite

Wir betrachten hierzu die (eindimensionale) schwingende Saite und definieren mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$$

die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage am Ort x und zur Zeit t .

Die x -Koordinaten der N Teilchen auf der Saite mit der Länge L sind

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{L}{N}, \quad (i = 1 \dots N),$$

wobei wir der Randbedingungen halber $x = 0$ und $x = L$ ausgeschlossen haben. Die Saite habe die Gesamtmasse M und die einzelnen Teilchen die Masse Δm_i , mit

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i = M.$$

Für eine homogene Saite ist $\Delta m_i \equiv M/N$. Die *Massendichte* $\rho(x)$ ist via

$$\rho(x) = \frac{\Delta m_i}{\Delta x}, \quad x = x_i$$

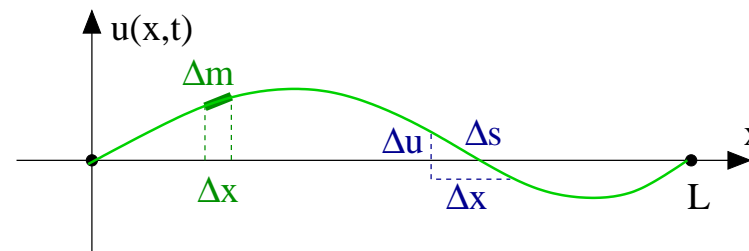


Abbildung 7.1: Eine schwingende Saite mit einem kleinen Massenteil Δm und Längenabschnitt Δs .

definiert. Für eine homogene Kette ist

$$\rho(x) \equiv \rho = \frac{MN}{NL} = \frac{M}{L}.$$

Lagrangefunktion

Um die Bewegungsgleichungen für die schwingende Saite aufzustellen, müssen wir zuerst die Lagrangefunktion finden. Die kinetische Energie ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \Delta x \frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2.$$

Wir nehmen nun an, dass zwischen allen Massenpunkten eine Feder mit der Federkonstanten f gespannt sei, so dass die Feder zwischen dem $(i+1)$ -ten Teilchen und dem i -ten Teilchen einen Beitrag

$$\frac{f}{2} (\Delta s)^2, \quad \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

zur potentiellen Energie leistet, wobei Δs der Abstand der beiden Teilchen ist (wir betrachten transversale Auslenkungen). Bis auf eine Konstante ist die potentielle Energie also

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \frac{f \Delta x}{2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2,$$

wobei wir die Beiträge vom 1-ten und dem N -ten Teilchen zum jeweiligen Einspannpunkt vernachlässigt haben, sie tragen im *thermodynamischen Limes* ($N \rightarrow \infty$) nicht bei.

Wir schreiben $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(x_i, t)$ und führen nun den Kontinuumsübergang $N \rightarrow \infty$ durch, zunächst für die kinetische Energie:

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta x \frac{\rho(x_i)}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 = \int_0^L dx \frac{\rho(x)}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} \right)^2.$$

Für den Grenzübergang der potentiellen Energie verwenden wir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_{i+1}(t) - \mathbf{u}_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x}$$

und setzen zudem

$$f \Delta x = P, \quad f = \frac{P}{\Delta x},$$

das heißt, wir reskalieren mit N auch die Federkonstante zwischen den Teilchen (eine kürzere Feder wird härter). P kann dann als konstant angenommen werden. Wir erhalten

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 = \int_0^L dx \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right)^2.$$

Damit wird unsere Lagrangefunktion $L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}') = L(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}')$ zu

$$L(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}') = T - U = \int_0^L dx \underbrace{\left[\frac{\rho(x)}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}', x, t) = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}', x)},$$

wobei man $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}', x)$ als *Lagrangedichte* bezeichnet.

Prinzip der kleinsten Wirkung

Da die Saite als Grenzfall eines Systems aus vielen Massenpunkten gewonnen wurde, gilt das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta S[\mathbf{u}] = \delta \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}', x, t) = 0. \quad (7.1)$$

Um die Variation durchzuführen betrachten wir, wie im §4.4, die Schar von Funktionen $\mathbf{u}(x, t, \lambda)$ mit festen Randbedingungen $\mathbf{u}(x, t^{(j)}, \lambda) = \mathbf{u}^{(j)}(x)$ in Zeit und Ort: $\mathbf{u}(0, t, \lambda) = \mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{u}(L, t, \lambda) = \mathbf{u}_L(t)$. Dabei soll wiederum $\mathbf{u}(x, t, \lambda = 0)$ die physikalische Bahn sein, also die, die das Funktional (7.1) minimal macht:

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}', x, t)$$

$$= \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}}_{\frac{d}{dt}} \underbrace{\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{d\lambda}}_{\frac{d}{dt}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}'}}_{\frac{d}{dx}} \underbrace{\frac{d\mathbf{u}'}{d\lambda}}_{\frac{d}{dx}} \right],$$

wobei einmal nach der Zeit und einmal nach dem Ort partiell zu integrieren ist. Dabei sollen die Randterme

$$0 = \int_0^L dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \frac{d\mathbf{u}(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right]_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}}$$

$$0 = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}'} \frac{d\mathbf{u}(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right]_{x=0}^{x=L}$$

wegen der festen Randbedingungen verschwinden. Für die Variation der Wirkung $S[\mathbf{u}]$ erhalten wir somit

$$0 = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}'} \right] \delta \mathbf{u},$$

wobei wir $\delta \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}(x, t, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}$ gesetzt haben. Da nun $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(x, t)$ beliebig ist, muss der Integrand verschwinden; wir erhalten die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 0} \quad (7.2)$$

für die Lagrangedichte \mathcal{L} .

Homogene Saite

Für die homogene Saite ist $\mathcal{L} = (\rho \dot{\mathbf{u}}^2 - P(\mathbf{u}')^2)/2$ und (7.2) wird zu

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - P \mathbf{u}'' = 0, \quad \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = 0} \quad (7.3)$$

mit der *Wellengeschwindigkeit*

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Membran

Die Wellengleichung lässt sich sofort verallgemeinern. Für die homogene Membran (Trommel) ist $u = u(x, y, t)$ die senkrechte Auslenkung. Sie befolgt die zwei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Falls die Membran horizontal gelagert ist und das Schwerfeld der Erde nicht vernachlässigbar ist, so ist ihre Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} (u_x^2 + u_y^2) - g\rho u,$$

wobei $u_x = \partial u / \partial x$ und $u_y = \partial u / \partial y$ ist. Die dazugehörige Lagrange-Gleichung lautet:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{g\rho}{P}.$$

Analog gilt für eine homogene schwingende Flüssigkeit (oder Luft: Schallwellen), oder auch für die Komponenten des Elektromagnetischen Feldes im Vakuum (Licht), die drei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

7.2 Schwingende Saite

Als Beispiel für die Lösung der Wellengleichung (7.3) betrachten wir die eingespannte Saite. Die zu lösenden Gleichungen für $u(x, t)$ sind also

$\ddot{u} - c^2 u'' = 0$	Wellengleichung	(7.4)
$u(0, t) = u(L, t) = 0$	Randbedingung	
$u(x, 0) = F(x), \dot{u}(x, 0) = G(x)$	Anfangsbedingung	

Zur Lösung des Gleichungssystems (7.4) gehen wir wie in Kap. 3.5 vor und betrachten mit dem Separationsansatz

$$u(x, t) = e^{i\omega t} g(x)$$

zunächst die "zeitunabhängige" Bewegungsgleichung

$$k^2 g(x) + g''(x) = 0, \quad k = \omega/c,$$

deren allgemeine Lösungen durch $e^{\pm ikx}$ gegeben sind. Mit der Randbedingung $g(0) = 0$ verträglich ist die Superposition

$$g(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \sin(kx). \quad (7.5)$$

Die zweite Randbedingung verlangt

$$g(L) = 0 = \sin(kL), \quad k \equiv k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fourierreihen

Die vollständige (reelle) Lösung ist eine lineare Überlagerung der partikulären Lösungen (7.5) und hat also die Form einer Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)],$$

mit $\omega_n = ck_n$. Die *Entwicklungskoeffizienten* a_n, b_n bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen

$$F(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x), \quad (7.6)$$

$$G(x) = \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n b_n \sin(k_n x), \quad (7.7)$$

Da die Anfangsbedingung $F(x)$ beliebig ist, soweit sie mit den Randbedingungen $F(0) = 0 = F(L)$ verträglich ist, folgt aus (7.6), dass sich eine jede Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$ durch die *Fourierreihe* (7.6) darstellen lässt.

Entwicklungskoeffizienten

Multiplizieren wir (7.6) mit $\sin(k_m x)$ und integrieren über x , so erhalten wir

$$\int_0^L dx F(x) \sin(k_m x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x)$$

Wir zeigen jetzt, dass die $\sin(k_n x)$ eine orthogonale Basis bilden, indem wir den Ausdruck $\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x)$ durch partielle Integration umformen (man kann auch die Exponentialdarstellung des Sinus einführen und das Integral ausführen). Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $m = n$

$$\int_0^L (\sin(k_n x))^2 = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_n x)}{4k_n} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

2. Fall: $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_0^L \underbrace{\sin(k_n x)}_{\int dx} \underbrace{\sin(k_m x)}_{\frac{d}{dx}} &= \left[-\frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_n x) \right]_0^L + \int_0^L \underbrace{\frac{\cos(k_n x)}{k_n}}_{\frac{d}{dx}} k_m \underbrace{\cos(k_m x)}_{\int dx} \\ &= \left[-\frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_n x) + \frac{\cos(k_n x)}{k_n} \sin(k_n x) \right]_0^L \\ &\quad - \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) \end{aligned}$$

und damit

$$2 \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) = 0$$

Beide Fälle zusammengefasst ergeben die gesuchte Orthogonalität:

$$\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

Damit finden wir

$$\int_0^L dx F(x) \sin(k_m x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{L}{2} \delta_{mn} = \frac{L a_m}{2}$$

Die Entwicklungskoeffizienten a_n lassen sich also aus

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx F(x) \sin(k_n x) \quad (7.8)$$

berechnen und analog die b_n aus

$$b_n = \frac{2}{L \omega_n} \int_0^L dx G(x) \cos(k_n x). \quad (7.9)$$

Das Gleichungspaar (7.6) und (7.8) ist die Grundgleichung der Fouriertransformation und ist die Verallgemeinerung der diskreten Fouriertransformation aus Kap. 3.5 auf kontinuierliche Werte der Variablen x . Die Verallgemeinerung auf ein unendlich großes Intervall $x \in [-\infty, \infty]$ ist auch nicht schwer und Gegenstand der Elektrodynamik.

7.3 Elastizitätstheorie

Wir denken uns einen Festkörper (Werkstoff) als Sammlung von Massenpunkten (Atome, Moleküle, Mikrokristalle). Die Ruhelage eines Massenpunktes ist

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, die Auslenkung von der Ruhelage $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Dabei ist die Auslenkung (Verschiebung) eine Funktion des Ortes, also

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}))$$

ein *Vektorfeld*. In Kap. 7.1 haben wir gesehen, dass die elastische Energie (potentielle Energie) einer Saite eine quadratische Funktion der infinitesimalen Auslenkung der Saite u' war. Es liegt nahe, diesen Sachverhalt auf die elastische Energie eines Festkörpers zu verallgemeinern, solange die Auslenkung aus der Ruhelage klein (elastisch) ist, also

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\{\partial u_i / \partial x_k\}),$$

Dazu schreiben wir für den neuen Radiusvektor des Punktes \vec{x} des Körpers nach der Verformung $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, und damit lautet der Verschiebungsvektor

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x}$$

Infinitesimal lautet diese Gleichung (für infinitesimal benachbarte Punkte vor und nach der Deformation des Körpers)

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$$

Wir wollen jetzt den (infinitesimalen) Abstand zwischen zwei Punkten vor und nach der Deformation ermitteln; vorher ist das Abstandselement

$$dl = \sqrt{\sum_i dx_i^2},$$

und nachher

$$dl' = \sqrt{\sum_i dx_i'^2} = \sqrt{\sum_i (dx_i + du_i)^2}. \quad (7.10)$$

Wir berücksichtigen jetzt die Abhängigkeit der Verschiebung \vec{u} von \vec{x} durch

$$du_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

und setzen diese Beziehung in Gl. (7.10) ein:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \sum_i dx_i^2 + 2 \sum_i dx_i du_i + \sum_i du_i^2 \\ &= dl^2 + 2 \sum_i dx_i \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(\sum_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right) \\ &= dl^2 + \sum_{ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k + \sum_{ik} \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i dx_k \end{aligned}$$

(7.11)

wobei wir im letzten Schritt Indizes umbenannt haben: im zweiten Term wurde in einem der zwei Terme i mit k vertauscht, um die symmetrische Schreibweise zu erhalten, und im dritten Term wurden Indizes i und l ausgetauscht.

Verzerrungstensor

Für kleine Deformationen sind die Verschiebungen \vec{u} und ihre Ableitungen nach den Koordinaten klein, und man vernachlässigt den dritten Term von Gl. (7.11), der ein Produkt von Ableitungen von \vec{u} enthält. Man definiert nun durch

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{ik} u_{ik} dx_i dx_k$$

den *Verzerrungstensor* (strain tensor)

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (7.12)$$

Aus der Forderung, dass Drehungen des gesamten Körpers unberücksichtigt bleiben sollen folgt die Symmetrie des Verzerrungstensors

$$u_{ik} = u_{ki}.$$

Deshalb hat der Verzerrungstensor nur sechs unabhängige Komponenten.

Elastischer Tensor

Wir führen nun $3^4 = 81$ Zahlen

$$C_{ijkl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

ein, die man zusammengefasst den *elastischen Tensor* nennt, und definieren die potentielle Energiedichte als

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl}. \quad (7.13)$$

Natürlich sind nicht alle 81 Komponenten des elastischen Tensors voneinander verschieden, z.B. folgt aus (7.13) dass $C_{ijkl} = C_{klij}$ ist. Im allgemeinen gibt es 21 unabhängige Komponenten. Weitere Vereinfachungen ergeben sich aus der Symmetrie (kubisch(3), hexagonal(5), ...) des betrachteten Materials. Für die Lagrangedichte \mathcal{L} eines elastischen Materials (ohne Reibung) mit

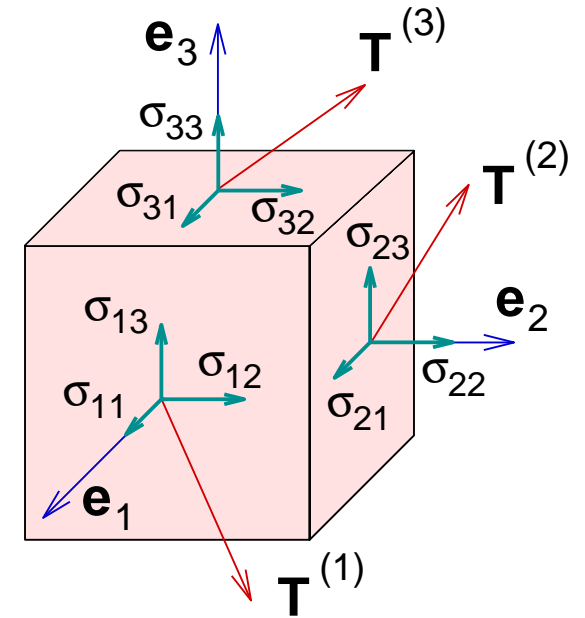


Abbildung 7.2: Komponenten des Spannungstensors auf den Flächen eines Quaders. Die $\mathbf{T}^{(i)} = \sigma \mathbf{n}_i$ sind die auf den Flächen mit Normalenvektoren \mathbf{n}_i wirkenden Spannungsvektoren (hier $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i$).

(konstanter) Massendichte ρ erhalten wir dann

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{\vec{u}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{ijkl} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl} \quad (7.14)$$

Spannungstensor

Aus (7.14) kann man mit dem Hamilton'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen berechnen. Das ist nicht schwer, doch ein wenig unübersichtlich, der vielen Indizes wegen. Es ist daher in der Elastizitätstheorie üblich, als Zwischenschritt den *Spannungstensor* (stress tensor)

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} u_{kl} = \frac{\partial U}{\partial u_{ij}} \quad (7.15)$$

einzuführen. Die lineare Abhängigkeit (7.15) zwischen dem Spannungstensor σ_{ij} und dem Verzerrungstensor u_{kl} nennt man auch *Hooke'sches Gesetz*. Die Elemente des Spannungstensors sind in Abb. 7.2 dargestellt. Die Diagonalelemente σ_{ii} stellen die Normalspannungen, die Nichtdiagonalelemente die Scherspannungen dar.

Der Spannungstensor ist sehr nützlich, da sich die Kraftdichte $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1, f_2, f_3)$

als Divergenz des Spannungstensors

$$\rho(\vec{x})\ddot{u}_i(\vec{x}) \equiv f_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.16)$$

darstellen lässt, wobei $\rho(\vec{x})$ die Massendichte ist.

Transformation auf Hauptachsen

Aus (7.16) und der Betrachtung von Impuls- und Drehimpulserhaltung folgt, dass der Spannungstensor symmetrisch

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ist. Eine Transformation auf Hauptspannungsachsen ist daher immer möglich.

Voigt-Notation

Die Symmetrien von Verzerrungs- und Spannungstensor bedeuten, dass es nur 6 unabhängige Einträge gibt und legen eine Vereinfachung der Notation nahe:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{23} (= \sigma_{32}) &= \sigma_4 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{31} (= \sigma_{13}) &= \sigma_5 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \sigma_{12} (= \sigma_{21}) &= \sigma_6 \end{aligned}$$

und mit $u_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}$ (einer andern üblichen Bezeichnung für den Verzerrungstensor)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & 2\varepsilon_{23} (= 2\varepsilon_{32}) &= \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & 2\varepsilon_{31} (= 2\varepsilon_{13}) &= \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 & 2\varepsilon_{12} (= 2\varepsilon_{21}) &= \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Damit lässt sich dann das Hooke'sche Gesetz schreiben als

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^6 C_{mn} \varepsilon_n$$

wobei die Symmetrien des Elastizitätstensors

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

bedeuten, dass man alle unabhängigen Einträge in eine symmetrische 6×6 -Matrix eintragen kann, wobei man wie vorher Indizes 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit $xx \equiv$

11, $yy \equiv 22$, $zz \equiv 33$, $yz \equiv 23$, $zx \equiv 31$, $xy \equiv 12$ identifiziert. Ausgeschrieben ist dann das Hooke'sche Gesetz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{symm.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Oberflächenkräfte

Aus (7.16) folgt sofort, dass alle elastischen Kräfte *Oberflächenkräfte* sind (\equiv Definition von elastischen Kräften), da nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\text{Volumen}} dV f_i = \int_{\text{Volumen}} dV \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \int_{\text{Oberfläche}} \sum_j dA_j \sigma_{ij}$$

mit Flächenelementen $d\vec{A} = (dA_1, dA_2, dA_3)$. Im isotropen Fall ist der Spannungstensor σ_{ij} diagonal,

$$\sigma_{ij} \equiv -P\delta_{ij}, \quad \vec{f} = -\vec{\nabla}P(\vec{x}),$$

wobei $P = P(\vec{x})$ der Druck (ein skalares Feld) auf ein Volumenelement ist.

Symmetrien

Als Beispiel für die Reduktion des elastischen Tensors C_{ijkl} durch Symmetrie betrachten wir einen *homogenen Körper*. Bei einem homogenen Körper gibt es (Definition) nur zwei Arten der Deformation: Eine selbstähnliche *homogene Dilatation* (hydrostatische Kompression) und eine *reine Scherung* (Volumen-erhaltend). Hierzu schreibt man den Verzerrungstensor in der Form

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l u_{ll},$$

($\sum_l u_{ll} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$), wobei der erste Term auf der rechten Seite Volumen-erhaltend ist (Summe der Diagonalelemente ist null). Da für einen isotropen Körper alle Scherungen äquivalent sind, können wir die elastische Energie (7.13) durch nur zwei Konstanten $\mu > 0$ und $K > 0$ parametrisieren (mit Summenkonvention),

$$U = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\sum_l u_{ll} \right)^2. \quad (7.17)$$

Dabei nennt man K den *Kompressionsmodul* und μ den *Torsionsmodul* (Schubmodul). Allgemein werden in der Elastizitätstheorie eine Unmenge von Proportionalitätskonstanten eingeführt, die sich alle in der einen oder anderen Weise auf die C_{ijkl} zurückführen lassen.

Aus (7.17) folgt mit (7.15) der Spannungstensor für isotrope Körper

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l u_{ll} \right) + K \delta_{ik} \sum_l u_{ll}.$$

Die Bewegungsgleichung wird somit in Anwesenheit von Volumenkräften $f_i^{(Vol)}$ (Schwerkraft) und unter Verwendung von Gl. (7.12) zu

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= f_i^{(Vol)} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(Vol)} \\ &+ \frac{2\mu}{2} \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)}_{\Delta u_i} + \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{u}} \delta_{ik}, \\ &\underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\Delta u_i} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{u}} \end{aligned}$$

also

$$\rho \ddot{u}_i = f_i^{(Vol)} + \mu \Delta u_i + \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{u} \quad (7.18)$$

Schallwellen

Die Gleichung (7.18) lässt sich in Abwesenheit der Volumenkräfte, $f_i^{(Vol)} = 0$, durch

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{a} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad \vec{a} = \text{konst.}$$

lösen. Einsetzen in (7.18) ergibt

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \rho \vec{a} &= \mu (-i\vec{k})^2 \vec{a} + \left(K + \frac{\mu}{3} \right) (-i\vec{k}) (-i\vec{a} \cdot \vec{k}), \\ \omega^2 \rho \vec{a} &= \mu \vec{k}^2 \vec{a} + \left(K + \frac{\mu}{3} \right) (\vec{a} \cdot \vec{k}) \vec{k}. \end{aligned}$$

Für jeden Wellenvektor \vec{k} gibt es zwei transversale Wellen mit $\vec{a} \perp \vec{k}$ und der Dispersionsrelation ($k = |\vec{k}|$)

$$\omega(k) \Big|_{\text{trans.}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k \equiv c_t k$$

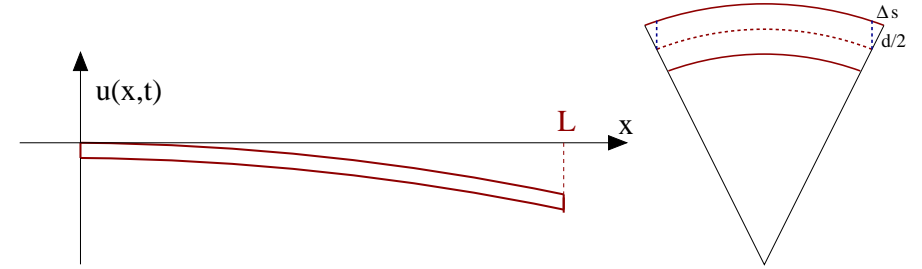


Abbildung 7.3: Der eingespannte Balken.

und eine longitudinale Welle mit $\vec{a} \parallel \vec{k}$ und mit (betrachte o.B.d.A. $\vec{a} = \vec{k}$)

$$\omega^2 \rho = \mu k^2 + \left(K + \frac{\mu}{3} \right) k^2, \quad \omega(k) \Big|_{\text{long.}} = \sqrt{\frac{K + 4\mu/3}{\rho}} k \equiv c_l k.$$

Offensichtlich gilt für die transversale Schallgeschwindigkeit c_t und für die longitudinale Schallgeschwindigkeit c_l die Ungleichung

$$c_l \geq \sqrt{\frac{4}{3}} c_t.$$

7.4 Balkenbiegung

Wir betrachten einen homogenen eingespannten Balken im Schwerfeld der Erde mit der Länge L und Masse $M = \rho L$. Die Auslenkung aus der Horizontalen sei $u(x, t)$.

Die kinetische Energie T und die potentielle Energie haben die Form

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L dx \dot{u}^2, \quad U_f = - \int_0^L dx u(x, t) f(x, t),$$

wobei $f(x, t)$ die äußere Kraftdichte ist, z.B. $-\rho g$ für die Schwerkraft.

Die elastische Energie für dünne Balken (Dicke $d \rightarrow 0$) hat wie üblich die Form

$$U_{el} = \frac{P}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial(u - u_0)}{\partial x} \right)^2 = \frac{P}{2} \int_0^L dx (u' - u_0')^2$$

wobei $u_0 = u_0(x)$ die Gleichgewichtslage des Balken im äußeren Kraftfeld (Schwerfeld) ist. $u_0(x)$ ist also die statische Lösung der noch zu bestimmen Euler-Lagrange Gleichungen und U_{el} beschreibt dann kleine Schwingungen um diese Gleichgewichtslage.

Dicker Balken

Die Biegung des Balkens wird durch Rückstellkräfte im Gleichgewicht gehalten, die von der endlichen Dicke d des Balkens abhängen. Ihr Beitrag zur potentiellen Energie U_d kann wie folgt abgeschätzt werden:

Die Mittelfaser des Balkens wird nicht gestaucht oder gestreckt. Zu jedem Punkt x der Horizontalen betrachtet man die Abweichung Δs der Außenfaser des Balkens von x , gegeben durch

$$\Delta s(x) = \frac{d}{2} u'(x).$$

Die Stauchung (Dehnung) der Außenfaser zwischen zwei Punkten $x + \Delta x$ und x ist dann durch die Differenz

$$\begin{aligned} \Delta s(x + \Delta x) - \Delta s(x) &= \frac{d}{2} (u'(x + \Delta x) - u'(x)) \\ &= \frac{\Delta x d}{2} \left(\frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta x d}{2} u''(x) \end{aligned}$$

gegeben. Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die elastische Energie proportional zum Quadrat der Stauchung, also nach dem Grenzübergang zu

$$U_d = \frac{Q}{2} \int_0^L dx (u'')^2,$$

wobei die elastische Konstante $Q \sim d^2$ ist. Somit haben wir die Lagrange-funktion

$$L = T - U_f - U_{el} - U_d = \int_0^L dx \mathcal{L}$$

mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - g\rho u - \frac{P}{2} (u' - u'_0)^2 - \frac{Q}{2} (u'')^2$$

und nach Variation der Wirkung erhalten wir wie in Kap. 7.1 die Euler-Lagrange-Gleichungen, allerdings mit einem zusätzlichen Term:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u''} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0}.$$

Mit $f(x, t) = -g\rho$ folgt daraus die Bewegungsgleichung für den Balken

$$\rho \ddot{u} = -g\rho + P(u'' - u''_0) - Qu'''' \quad (7.19)$$

Statik des Balken

Im statischen Fall $u \rightarrow u_0$ (Balkenbiegung) ist also die Gleichung

$$Qu_0'''' = -g\rho \quad (7.20)$$

zu lösen. Die Lösung ist ein Polynom vierten Grades,

$$u_0(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

wobei die Bewegungsgleichung (7.20) zu $24AQ = -g\rho$ führt, und die Integrationskonstanten B, C, D, E durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Für den beidseitig eingespannten Balken (Brücke) sind die Randbedingungen

$$u_0(0) = u'_0(0) = 0 = u_0(L) = u'_0(L)$$

Daraus folgt sofort $u_0(0) = E = 0$ und $u'_0(0) = D = 0$ sowie die Bestimmungsgleichungen für B und C

$$u_0(L) = AL^4 + BL^3 + CL^2 = 0 \quad u'_0(L) = 4AL^3 + 3BL^2 + 2CL = 0$$

mit der Lösung

$$u_0(x) = Ax^2(x-L)^2, \quad A = -\frac{g\rho}{24Q}.$$

7.5 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen. Aus Sicht der Elastizitätstheorie handelt es sich bei Flüssigkeiten um isotrope Körper mit endlichem Kompressionsmodul K , aber mit verschwindendem Schermodul $\mu = 0$. Somit gibt es nach Kap. 7.3 nur longitudinale (Dichte-) Wellen, jedoch keine transversalen Wellen. Der Ansatz der Elastizitätstheorie ist offensichtlich für die Hydrodynamik ungenügend, denn offensichtlich passieren in Flüssigkeiten noch andere interessante Dinge außer den Kompressionswellen.

Kontinuitäts-Gleichung

Die Hydrodynamik beruht auf der Annahme, dass sich eine Flüssigkeit durch zwei Variablen beschreiben lässt, zum einen der Massendichte

$$\rho(\vec{x}, t)$$

und dem Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}, t)$$

der konstituierenden Massenpunkte. In einer inkompressiblen Flüssigkeit ist die Massendichte konstant, i.a. jedoch variabel. Da man in der Hydrodynamik i.a. auch keine abgeschlossene Volumina betrachtet, gibt es auch keine erhaltene Gesamtmasse $\int d^3x \rho(\vec{x}, t)$. Anstelle der *globalen* Massenerhaltung betrachtet man in der Hydrodynamik die *Kontinuitätsgleichung*

$$\boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \quad j(\vec{x}, t) = \rho(\vec{c}, t) \vec{v}(\vec{c}, t), \quad (7.21)$$

wobei man \vec{j} als die *Stromdichte* bezeichnet. Die Kontinuitätsgleichung (7.21) ist eine direkte Folge der *lokalen* Massenerhaltung. Integrieren wir (7.21) über ein kleines Volumen ΔV mit Oberfläche ΔF , so erhalten wir

$$\int_{\Delta V} dV \dot{\rho} = - \int_{\Delta V} dV \operatorname{div} \vec{j} = - \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{j},$$

wobei wir den Satz von Gauß verwendet haben. Das bedeutet aber nun, dass die totale Massenänderung im Volumen ΔV ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} dV \rho$$

gleich dem negativen totalen Massenfluss

$$\int_{\Delta F} d\vec{F} \vec{j}$$

aus dem Volumen raus (durch die Oberfläche) ist. Diese Gleichung muss natürlich für jedes noch so kleine Volumen ΔV gelten, somit auch in der differentiellen Form (7.21).

Euler-Gleichung

Nun wollen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Masse $\Delta m = \rho \Delta V$ in einem kleinen Volumenelement ΔV aufstellen:

$$\Delta m \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \Delta V \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \Delta \vec{K}_{\text{ext}} + \Delta \vec{K}_{\text{Druck}}, \quad (7.22)$$

wobei wir die Kraft $\Delta \vec{K} = \Delta \vec{K}_{\text{ext}} + \Delta \vec{K}_{\text{Druck}}$ auf das Volumenelement in einen *externen* Anteil $\Delta \vec{K}_{\text{ext}}$ und einen Druckanteil $\Delta \vec{K}_{\text{Druck}}$ aufgespalten haben. Ein Beispiel ist das Schwerfeld mit der Kraftdichte $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$ und der Kraft

$$\Delta \vec{K}_{\text{ext}}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{x}, t) \Delta V.$$

Die druckabhängige Komponente der Kraftdichte ist genau dann verschieden von Null, wenn der Druck auf das Volumenelement ΔV auf der einen Seite größer als auf der gegenüberliegenden Seite ist, wenn also der Druck $P = P(\vec{x}, t)$ nicht konstant ist. Wir betrachten ein kleines kartesisches Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ mit der Oberfläche F . Dann ist (Kraft=Druck \times Fläche)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{K}_{\text{Druck}} &= - \int_F d\vec{F} P = - \vec{e}_x \Delta y \Delta z [P(x + \Delta x) - P(x)] \\ &\quad - \vec{e}_y \Delta x \Delta z [P(y + \Delta y) - P(y)] - \vec{e}_z \Delta x \Delta y [P(z + \Delta z) - P(z)] \\ &= -(\operatorname{grad} P) \Delta V. \end{aligned}$$

Geschwindigkeitsfeld und Materialableitung

In der Teilchenmechanik haben wir jedes Teilchen einzeln behandelt: Jedes Teilchen wird mit seinem Ortsvektor $\vec{x}_i(x_1, x_2, x_3)$ zum Zeitpunkt t identifiziert; bewegt sich das Teilchen, dann ändert sich \vec{x}_i mit der Zeit t , d.h. \vec{x}_i und t sind voneinander unabhängig.

In einem kontinuierlichen Medium ist es einfacher, anders zu verfahren: Man beschreibt die Bewegung im kontinuierlichen Medium durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$, wobei jetzt \vec{x} im Raum fest ist. \vec{v} gibt jetzt die momentane Geschwindigkeit der Teilchen an, die zur Zeit t am Ort $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ sind. Also sind hier \vec{x} und t unabhängige Variable. Man kann sich $\vec{v}(\vec{x}, t)$ vorstellen, wenn man an einen Fluss denkt: Ein fließendes Teilchen, das zur Zeit t an einem Ort mit Koordinaten \vec{x} ist, bewegt sich in der Zeit dt an einen anderen Ort $\vec{x} + \vec{v} dt$. Wenn $v_i(\vec{x}, t)$ und $v_i(\vec{x} + \vec{v} dt)$ die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes an den zwei Punkten sind, dann ist die momentane Beschleunigung $\mathbf{a}_i(\vec{x}, t)$ ($i = 1, 2, 3$) gegeben durch

$$\mathbf{a}_i(\vec{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[v_i(x_1 + v_1 dt, x_2 + v_2 dt, x_3 + v_3 dt, t + dt) v_i(\vec{x}, t) \right]$$

Mithilfe der mehrdimensionalen Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung

$$\begin{aligned} f(x, y, z, s) &\approx f(a, b, c, d) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c, d)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c, d)(y - b) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c, d)(z - c) + \frac{\partial f}{\partial s}(a, b, c, d)(s - d) \end{aligned}$$

Mit $x = x_1 + v_1 dt$, $y = x_2 + v_2 dt$, $z = x_3 + v_3 dt$, $s = t + dt$, $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_3$, $d = t$ finden wir also für die Beschleunigung

$$\mathbf{a}_i(\vec{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_1} v_1 dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} v_2 dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} v_3 dt + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt \right] = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) v_i$$

Dabei bedeutet der erste Term die Änderung von v_i an einem festen Punkt im Raum ($\partial v_i / \partial t$ wird lokale Beschleunigung genannt), und der zweite Term bedeutet die Veränderung von v_i durch den Ortswechsel der Teilchen zu einer festen Zeit t .

Man bezeichnet die Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}$$

auch als Materialableitung. Die obige Argumentation lässt sich auf beliebige Funktionen $\psi(\vec{x}, t)$ ausdehnen, und die zeitliche Änderung lautet

$$\frac{D\psi}{Dt} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\psi$$

Also finden wir für die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v}

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}.$$

Wir setzen nun die Ausdrücke für ΔK_{ext} , ΔK_{Druck} und $d\vec{v}/dt$ in (7.22) ein und erhalten

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \right) = -\text{grad } P + \vec{f} \quad (7.23)$$

die *Euler-Gleichung* der Hydrodynamik, die die Dynamik *idealer* Flüssigkeiten (ohne Reibung) beschreibt. In realen Flüssigkeiten sind natürlich immer (innere) Reibungskräfte vorhanden (z.B. $\sim \eta \nabla^2 \vec{v}$), analog der Reibungskraft $-\gamma \dot{\vec{x}}$ beim gedämpften harmonischen Oszillator in Kap. 3.1. Mit Reibungskräften heißen die Bewegungsgleichungen dann *Navier-Stokes Gleichungen*.

Zustands-Gleichung

Wir bemerken, dass die Euler-Gleichung (7.23) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (7.21) 4 partielle Differentialgleichungen für 5 reelle Felder $\rho(\vec{x}, t)$, $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $P(\vec{x}, t)$ darstellen. Offensichtlich fehlt noch ein Zusammenhang zwischen ρ, \vec{v} und dem Druck P . Im allgemeinen ist der Druck eine Funktion der Dichte, also

$$P = P(\rho(\vec{x}, t)), \quad (7.24)$$

und weiteren externen Parametern, wie z.B. der Temperatur T . Der Zusammenhang (7.24) wird *Zustandsgleichung* genannt, die Zustandsgleichung

hängt sehr stark von der Art der Flüssigkeit ab (siehe Thermodynamik). Ein Beispiel ist die sogenannte *polytrope* Zustandsgleichung

$$P \sim \rho^\gamma, \quad (7.25)$$

die wegen

$$\rho = P^{\frac{1}{\gamma}} \quad \hookrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\gamma} P^{\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{\rho}{P\gamma}$$

eine Kompressibilität κ der Form

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \quad (7.26)$$

impliziert. Der Exponent γ kann alle möglichen Werte annehmen:

γ	System
∞	inkompressible Flüssigkeit
$\gg 1$	reale Flüssigkeit
1	ideales Gas (isotherm)
$\neq 1$	ideales Gas (adiabatisch)

wobei isotherm bedeutet, dass das System eine konstante Temperatur hat und adiabatisch, dass das System energetisch abgeschlossen ist. Details werden in der Thermodynamik behandelt.

7.6 Beispiele zur Hydrodynamik

Wir betrachten nun einige Anwendungen zur Dynamik idealer Flüssigkeiten.

Ruhende Flüssigkeit im Schwerfeld

Dies ist der Grenzfall der *Hydrostatik*, es gilt

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}), \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad P(\vec{x}, t) = P(\vec{x}),$$

und die Kontinuitätsgleichung (7.21) ist immer erfüllt. Im homogenen Schwerfeld ist $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$ und die Euler-Gleichung (7.23) wird wegen der Translationsinvarianz in x und y Richtung zu

$$\text{grad } P = -\rho g \vec{e}_z, \quad \frac{d}{dz} P(z) = -\rho(z)g. \quad (7.27)$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist $\rho \equiv \rho_0$ konstant und

$$P(z) = P_0 - \rho_0 g z.$$

Druckverteilung in der Atmosphäre

Für ein ideales Gas ist $\gamma = 1$ in der Zustandsgleichung (7.25):

$$VP = NN_a k_B T,$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante, N_a die Avogadro-Zahl und N die Molanzahl ist. Sei m die Masse eines Gas-Moleküls und ρ die Massendichte, dann erhalten wir

$$mP = \frac{NN_a m}{V} k_B T = \frac{M}{V} k_B T = \rho k_B T.$$

Die Euler-Gleichung (7.27) wird damit zu

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} P.}$$

Die Integration ergibt die barometrische Höhenformel

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \approx e^{-\frac{z}{8k\text{m}}}$$

für die Höhenabhängigkeit des Luftdruckes, unter der (sehr groben) Annahme einer konstanten Lufttemperatur von $T \approx 300\text{K}$.

Rotierende Flüssigkeit im Schwerfeld

Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeit (Wasser) in einem mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotierenden Eimer. Nach dem Einstellvorgang wird es aufgrund der residuellen Reibungskräfte zu einem statischen Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

kommen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) haben wir

$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

und für Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\vec{A} = (A_r, A_\varphi, A_z)$ und den Gradient einer skalaren Funktion f gilt

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten ausgedrückt sind dann die Größen des Systems

$$\rho = \rho_0, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z, \quad \vec{v} = \omega r \vec{e}_\varphi, \quad \vec{f} = -g \rho_0 \vec{e}_z.$$

Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt (wegen $\text{div } \vec{v} = 0$) und für das Geschwindigkeitsfeld gilt $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ und

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \omega r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega r \vec{e}_\varphi) = \omega^2 r \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\omega^2 r \vec{e}_r.$$

Wegen der Rotationssymmetrie ist $P = P(r, z)$. Die Euler-Gleichung wird zu

$$-\rho_0 \omega^2 r \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z - \rho_0 g \vec{e}_z,$$

beziehungsweise zu

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g,$$

mit der Lösung

$$P(r, z) = P_0 + \rho_0 \left(-gz + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right).$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist durch die Isobare (Fläche konstanten Drucks)

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{1}{g \rho_0} (P_0 - P)$$

gegeben, wobei $P \approx 1\text{bar}$ gleich dem äußeren Luftdruck ist. Die Oberfläche ist also ein Rotationsparaboloid.

Bernoulli-Gleichung

Wir betrachten eine allgemeine stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes, also

$$\vec{f} = 0, \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}), \quad P(\vec{x}, t) = P(\vec{x}).$$

Die dazugehörige Euler-Gleichung

$$\rho_0 (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } P$$

lässt sich umformen; dafür betrachten wir zunächst die erste Komponente:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \text{grad}) v_1 &= \sum_j v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ &\quad + v_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{v}^2 - (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_1 \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ v_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) - v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) - v_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix}$$

Damit finden wir die umgeformte Eulergleichung

$$\frac{\rho_0}{2} \text{grad } (\vec{v}^2) - \rho_0 \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = - \text{grad } P \quad (7.28)$$

Wie in Kap. 4.5 definiert das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ via

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{x}(\lambda) = \vec{v}(\vec{x}) \quad (7.29)$$

eine Stromlinie $\vec{x}(\lambda)$ zu der einparametrischen Schar von Abbildungen

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}(\lambda)$$

mit dem Scharparameter λ . Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ ist in jedem Punkt zur Stromlinie tangential. Wir multiplizieren nun die Euler-Gleichung (7.28) mit \vec{v} und beachten, dass $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = 0$ ist. Wir erhalten

$$0 = \vec{v} \cdot \left(\frac{\rho}{2} \text{grad } (\vec{v}^2) + \text{grad } P \right) = \frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \text{grad } \left(\frac{\rho}{2} (\vec{v}^2) + P \right),$$

also mit $d\mathbf{f}(\vec{x})/d\lambda = (\vec{\nabla} f) \cdot \partial \vec{x} / \partial \lambda$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + P \right).$$

Damit erhalten wir die *Bernoulli-Gleichung*

$$\boxed{\left(\frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + P \right) = \text{konstant entlang einer Stromlinie}}$$

Hierbei bezeichnet man $\rho_0 \vec{v}^2 / 2$ als den *Staudruck*. Die Bernoulli-Gleichung erklärt einige bekannte Phänomene. So sinkt an einer Verengungsstelle (z.B. in einem Rohr) der Druck $P(\vec{x})$, da dort die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ erhöht ist. Aus dem gleichen Grunde werden zwei nebeneinander her fahrende Schiffe zueinander hingezogen.

Potentialströmung

Eine *wirbelfreie* Strömung ist durch

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = 0$$

definiert. Demnach gibt es ein skalares Geschwindigkeitspotential $\Phi(\vec{x})$ mit

$$\vec{v}(\vec{x}) = \text{grad } \Phi(\vec{x}).$$

Daher auch die Bezeichnung *Potentialströmung*. Für eine inkompressible Flüssigkeit $\rho(\vec{x}) \equiv \rho_0$ folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung (7.21)

$$0 = \text{div } \vec{v} = \Delta \Phi$$

die sogenannte *Laplace-Gleichung*. Zu der Laplace-Gleichung gehören noch Randbedingungen. Für Flüssigkeiten verschwindet die Normalkomponente $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ am Rand. Damit lassen sich einige Dinge berechnen, z.B. das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung durch ein Rohr oder die wirbelfreie Umströmung eines Körpers.

Schallwellen

Der gewöhnliche Schall ergibt sich aus einer Linearisierung der hydrodynamischen Gleichung für Luft um die Gleichgewichtslösung

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad P(\vec{x}, t) = P_0.$$

Wir nehmen sofort an, dass die Abweichungen von der Gleichgewichtslösung harmonisch sind, also die Form

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad \vec{v} = \Delta \vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad P = P_0 + \Delta P e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

annehmen. Die Kontinuitätsgleichung (7.21) wird somit (unter Vernachlässigung eines Terms zweiter Ordnung mit $\Delta \rho \Delta \vec{v}$) zu

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = i\omega \Delta \rho e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - i\vec{k} \rho_0 \Delta \vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = 0$$

und damit

$$\omega \Delta \rho - \vec{k} \cdot \Delta \vec{v} \rho_0 = 0. \quad (7.30)$$

In der Euler-Gleichung (7.23) ist der Term $\sim (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ zweiter Ordnung in $\Delta \vec{v}$ und kann somit vernachlässigt werden. Wir erhalten somit für die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla P = i\omega \rho_0 \Delta \vec{v} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - i\vec{k} \Delta P e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = 0$$

und damit

$$\omega \rho_0 \Delta \vec{v} - \vec{k} \Delta P = 0. \quad (7.31)$$

Die differentielle Zustandsgleichung

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \Delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\rho_0 \kappa_S} \quad (7.32)$$

ergibt nun einen Zusammenhang zwischen ΔP und $\Delta \rho$. Hierbei ist die Kompressibilität κ_S (siehe (7.26)) mit einem Index S versehen worden, um anzuzeigen, dass bei Schallwellen die Kompression so schnell erfolgt, dass die adiabatische (ohne Energieaustausch) Kompression von Bedeutung ist.

Wir setzen nun (7.32) in (7.31) ein und schreiben (7.30) und (7.31) in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0 \vec{k} \\ -\frac{\vec{k}}{\rho_0 \kappa_S} & \omega \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \vec{v} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.33)$$

Für transversale Wellen mit $\vec{k} \perp \Delta \vec{v}$ folgt sofort $\omega \equiv 0$ (vergleiche Kap. 7.1 oder Gl. (7.30)). Wir interessieren uns also für longitudinale Wellen mit $\vec{k} \parallel \Delta \vec{v}$. Mit $\vec{k} = k \vec{e}_z$ und $\Delta \vec{v} = \Delta v \vec{e}_z$ wird (7.33) zu

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0 k \\ -\frac{k}{\rho_0 \kappa_S} & \omega \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta v \end{pmatrix} = 0 \quad (7.34)$$

einem homogenen linearen Gleichungssystem für die beiden Unbekannten $\Delta \rho$ und Δk . Es gibt nicht-triviale Lösungen nur, wenn die Determinante verschwindet, also wenn

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_0 \kappa_S} = c_S^2 k^2$$

ist, was die Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_S}}$$

definiert. Zu bemerken ist, dass die Dispersionsrelation $\omega(k) = c_S k$ linear ist, die Schallgeschwindigkeit $c_S \approx 320 \text{ m/s}$ somit nicht von der Frequenz des Schalls abhängt. Anderenfalls wäre die akustische Kommunikation (Sprache) stark erschwert.