

5. Starre Körper

5.1 Der starre Körper als Vielteilchensystem

Starre Körper können als Systeme von Vielteilchensystemen modelliert werden, die durch ihre Wechselwirkungskräfte starr an ihren Plätzen festgehalten sind. Das ist ein Grenzfall des allgemeineren Problems, in dem N Punktmassen an Positionen $\vec{x}_i, i = 1, \dots, N$ durch Paarpotentiale wechselwirken mit einem Gesamtpotential

$$V(\{\mathbf{r}_{ij}\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|.$$

Die Orte $\vec{x}_k = \vec{a}_k, k = 1, \dots, N$, für die alle internen Kräfte verschwinden,

$$\vec{F}_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \right|_{\{\vec{x}_k = \vec{a}_k, k=1, \dots, N\}} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

sind die Gleichgewichtspositionen \vec{a}_i . Ein stabiles Gleichgewicht existiert, wenn die \vec{a}_i Minima des Gesamtpotentials sind. Das bedeutet, dass die Eigenwerte ω_n^2 der Matrix $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \vec{x}_i \partial \vec{x}_j} \right|_{\{\vec{x}_k = \vec{a}_k\}}$ (die Koeffizienten der Taylorentwicklung von V um die Gleichgewichtslage) positiv sein müssen. Der starre Körper entspricht dem Grenzwert sehr großer ω_n^2 .

Freiheitsgrade des starren Körpers

Im idealen starren Körper sind die Abstände zwischen jedem Paar von N Punktmassen fixiert:

$$r_{ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Wegen $r_{ij} = r_{ji}$ sind das $N(N-1)/2$ Bedingungen. Allerdings können diese Bedingungen nicht alle unabhängig sein, denn für große N (d.h. $N > 7$) sind das mehr Bedingungen als die $3N$ Freiheitsgrade des Systems. Um zu überlegen, wie viele Freiheitsgrade der starre Körper hat, stellen wir zuerst

fest, dass wir nicht alle Abstände von jedem Teilchen zu jedem anderen Teilchen benötigen. Zunächst wählen wir 3 Teilchen, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist eine vierte Punktmasse eindeutig fixiert durch ihre drei Abstände zu den ersten 3 Teilchen, und dasselbe gilt für jede weitere Punktmasse. Das ergibt $3(N-3)$ Bedingungen für alle $N-3$ Punktmassen. Also ist die Zahl der Freiheitsgrade reduziert auf $3N - 3(N-3) = 9$; weitere 3 Bedingungen sind erforderlich, um die Lage der ersten drei Punktmassen zueinander festzulegen. Damit hat der starre Körper 6 Freiheitsgrade. Davon sind 3 die Translationsfreiheitsgrade des Schwerpunkts, und 3 sind Rotationsfreiheitsgrade. Die Zahl 6 der Freiheitsgrade ist unabhängig von der Zahl N der Punktmassen und gilt sogar im Kontinuuumlimites $N \rightarrow \infty$.

Die Zwangsbedingungen (Punktmassenabstände) des starren Körpers sind holonom; wir implementieren sie dadurch, dass wir direkt im 6-dimensionalen Konfigurationsraum des Systems arbeiten, in dem dann keine Zwangsbedingungen mehr auftreten.

5.2 Grundlagen der Statik

Die Statik des starren Körpers beruht auf Gleichgewichtsbedingungen von 6 einfachen Maschinen, Hebel, Rad, Flaschenzug, schiefer Ebene, Keil und Schraube.

Statistisches Gleichgewicht eines Systems von Punktmassen ist gewährleistet, wenn sowohl Gesamtimpuls \vec{P} als auch Gesamtdrehimpuls \vec{L} zeitlich konstant sind.

Gleichgewichtsbedingungen:

- a) Kräftegleichgewicht (d.h. keine Translation des Körpers):

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

(wobei alle Kräfte externe, an den Punktmassen angreifende Kräfte sind).

- b) Gleichgewicht der Drehmomente (d.h. keine Rotationen des Körpers):

$$\sum_{i=1}^N \vec{x} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0$$

Dies sind die Grundgleichungen der Statik. Die zweite Bedingung besagt, dass die Summe der Drehmomente für einen gemeinsamen Bezugspunkt verschwinden muss. Man macht sich leicht klar, dass dieser Bezugspunkt beliebig gewählt werden kann.

Die Hauptaufgabe der Statik ist dann die folgende: Angenommen, die Kräfte oder Drehmomente eines starren Körpers sind nicht im Gleichgewicht; welche Kräfte oder Drehmomente sind erforderlich, um das Gleichgewicht herzustellen? Die zwei Grundaufgaben sind:

- i) $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \neq 0$, aber $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0$. Dann genügt es, die Kraft $\vec{F} = -\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ am gemeinsamen Bezugspunkt der Drehmomente anzugreifen zu lassen, was das Gleichgewicht der Drehmomente unberührt lässt und das Kräftegleichgewicht herstellt.
- ii) $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$, aber $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i \neq 0$. Hier hilft nur ein Kräftepaar, keine Einzelkraft; dieses besteht aus zwei gleichgroßen Kräften in entgegengesetzter Richtung, was nur das Gesamtdrehmoment, aber nicht die Gesamtkraft ändert.

5.3 Der Kreisel

Beim starren Körper ist oft der Fall interessant, dass der Körper in einem Punkt (nicht unbedingt dem Schwerpunkt) festgehalten wird, sodass es keine Schwerpunktttranslation gibt. Das lässt nur den Rotationsfreiheitsgrad übrig, und einen solchen starren Körper nennt man *Kreisel*.

Körperfestes Koordinatensystem

Bei der Behandlung des Kreisels ist die Wahl eines geeigneten Bezugssystems von großer Bedeutung, da sich dadurch die Bewegungsgleichungen dramatisch vereinfachen. Wir bezeichnen mit \vec{x} das Laborsystem und mit \vec{y} das (rotierende) körperfeste Koordinatensystem. Es gilt die Transformationsgleichung $\vec{x} = R(t)\vec{y}$, wobei $R(t) \in SO(3)$ die Matrix der Rotation $e^{-t\vec{\omega} \cdot \vec{J}}$ ist (siehe Kap. 4.6 und beachte für das Vorzeichen im Exponenten, dass \vec{y} das rotierende Koordinatensystem ist). Ferner gilt

$$R^T \dot{R} \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}, \quad \frac{d}{dt} \vec{x} = \frac{d}{dt} R \vec{y} = \dot{R} \vec{y}, \quad (5.1)$$

(siehe Kap. 4.6) da der Körper im \vec{y} -System starr ist, sich also nicht bewegt.

Die Eulerschen Winkel

Bislang hatten wir die Rotation eines Vektors $\vec{x}' = R(t)\vec{x}$ durch eine Drehachse in Richtung des Einheitsvektors \vec{n} und einen Drehwinkel α parametrisiert; der Zusammenhang zwischen \vec{x} und \vec{x}' folgt dann aus der Beziehung

$$\vec{x}' = \vec{x} \cos \alpha + \vec{n} (\vec{n} \times \vec{x}) (1 - \cos \alpha) - (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \alpha.$$

Für infinitesimal kleine Winkel ϵ lautet diese Beziehung

$$\vec{x}' = \vec{x} - \epsilon (\vec{n} \times \vec{x}).$$

Es ist wichtig, bei Rotationen darauf zu achten, ob von einer *aktiven Rotation* die Rede ist (bei festgehaltener Basis wird der Vektor \vec{x} nach \vec{x}' gedreht), oder von einer *passiven Rotation* (das Koordinatensystem, in dem \vec{x} dargestellt ist, wird gedreht). Für einen infinitesimal kleinen Winkel ϵ ist das in Abb. 5.1 dargestellt. Für die Koordinaten des Vektors entspricht eine aktive Rotation um ϵ einer passiven Rotation um $-\epsilon$, d.h. gerade der inversen Rotation.

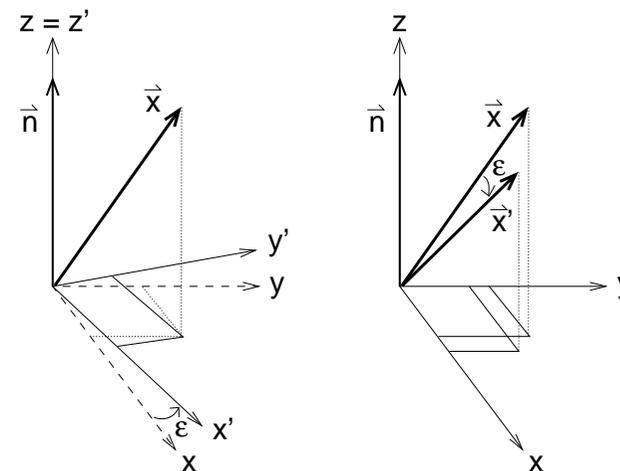


Abbildung 5.1: Infinitesimale Drehung um die z-Achse. Links: passive Drehung. Rechts: aktive Drehung.

Als Lagekoordinaten werden in der Theorie des starren Körpers gerne die sogenannten *Eulerschen Winkel* verwendet. Das ist neben $\{\vec{n}, \alpha\}$ eine zweite wichtige Methode, die drei Rotationsfreiheitsgrade zu parametrisieren. Hierbei stellt man eine beliebige Rotation R des Körpers als Produkt dreier aufeinander folgender Rotationen R_φ , R_θ und R_ψ dar:

$$R = R_\psi \cdot R_\theta \cdot R_\varphi. \quad (5.2)$$

Für genaue Definition der Eulerschen Winkel, d.h. um welche drei Achsen gedreht wird, gibt es in der Literatur verschiedene Konventionen. Wir verwenden die folgende Sequenz von Drehachsen und -winkeln:

	Drehachse	Drehwinkel
1. Drehung R_φ :	x_3	φ
2. Drehung R_ϑ :	K	ϑ
3. Drehung R_ψ :	y_3	ψ ,

wobei die *Knotenlinie* K das Bild der x_1 -Achse nach der ersten Drehung ist.

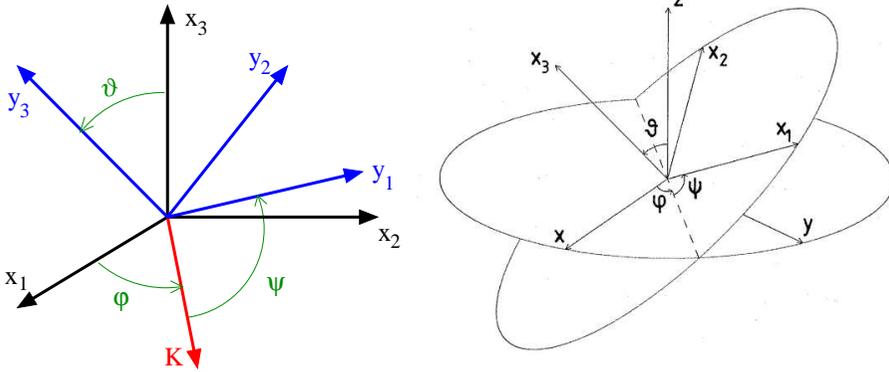


Abbildung 5.2: Die Eulerschen Winkel. Rechte Figur: Die gestrichelte Linie entspricht der Knotenlinie K. Die zwei um den Winkel ϑ (2. Drehung) gegeneinander verkippten Kreisscheiben repräsentieren die Ebenen, in denen die 1. Drehung um φ beziehungsweise die 3. Drehung um ψ stattfinden.

Als Rotationsmatrizen haben wir also

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus kann man mit Gl. (5.2) die Rotationsmatrix berechnen:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Winkelgeschwindigkeiten

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im y -System, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und den Winkelgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Diese kann man entweder aus $R^T \dot{R} \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ gewinnen oder aus dem Additionstheorem für Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \hat{e}_\vartheta + \dot{\psi} \hat{e}_\psi,$$

wobei \hat{e}_φ , \hat{e}_ϑ und \hat{e}_ψ die Einheitsvektoren der Rotationsachsen sind, deren y -Komponenten durch

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta) \\ \hat{e}_\vartheta &= (\cos \psi, -\sin \psi, 0) \\ \hat{e}_\psi &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

gegeben sind.

Diesen Zusammenhang kann man mit folgender Überlegung verstehen: Wegen

$\varphi \equiv$ Winkel zwischen x_1 -Achse und Knotenlinie K

$\vartheta \equiv$ Winkel zwischen x_3 -Achse und y_3 -Achse

$\psi \equiv$ Winkel zwischen Knotenlinie K und y_1 -Achse

(siehe Abb. 5.2) bedeuten die Änderungen der Winkel φ , ϑ , ψ Drehungen um die jeweils dazu senkrechte Achse, also

$\dot{\varphi} \equiv$ Drehung um x_3 -Achse

$\dot{\vartheta} \equiv$ Drehung um Knotenlinie

$\dot{\psi} \equiv$ Drehung um y_3 -Achse

Somit lassen sich diese Teildrehungen um $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ durch die drei Vektoren \vec{e}_{x_3} , \vec{e}_K und \vec{e}_{y_3} ausdrücken als $\dot{\varphi} \vec{e}_{x_3}$, $\dot{\vartheta} \vec{e}_K$, $\dot{\psi} \vec{e}_{y_3}$. Allerdings gehören diese drei Einheitsvektoren zu drei verschiedenen Koordinatensystemen, \vec{e}_{x_3} zum Laborsystem, \vec{e}_K zu einem intermediären System und \vec{e}_{y_3} zum körperfesten System, und wir bräuchten Sie ausgedrückt im körperfesten y -System, denn in diesem ist die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ gegeben. Um das zu erreichen, ist es am einfachsten, die Tatsache auszunutzen, dass die Drehmatrix R_ψ (Gl. (5.3)) den Vektor $\dot{\vartheta} \vec{e}_K = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$ aus dem intermediären System ins y -System dreht, und dass konsekutive Drehungen mit R_ϑ und dann R_φ den Vektor $\dot{\varphi} \vec{e}_{x_3} = (0, 0, \dot{\varphi})$ aus dem Laborsystem ins y -System

drehen ($\dot{\psi}\vec{e}_{y_3} = (0, 0, \dot{\psi})$ ist bereits im \mathbf{y} -System):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach dem Additionstheorem für Winkelgeschwindigkeiten setzt sich $\vec{\omega}$ dann aus den drei Beiträgen zusammen:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv \dot{\psi} \vec{e}_\psi + \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (5.5)$$

Damit haben wir Gl. (5.4) gezeigt, und wir haben die Einheitsvektoren der Drehachsen \vec{e}_ψ , \vec{e}_ϑ und \vec{e}_φ , ausgedrückt in Koordinaten des \mathbf{y} -Systems gefunden; um diese Drehachsen ist der Kreisel bezüglich des Laborsystems verkippt.

5.4 Der Trägheitstensor

Wir denken uns einen festen (starrten) Körper aus vielen Massenpunkten zusammengesetzt. Wir betrachten den Drehimpuls im Laborsystem:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{R} \vec{y}_i \times \dot{\mathbf{R}} \vec{y}_i)$$

wobei wir Gl. (5.1) verwendet haben. Mit $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \Omega$, $\Omega = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ und $\Omega \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ folgt

$$\vec{L} = \mathbf{R} \sum_i m_i \vec{y}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_i)$$

Dabei ist $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im \mathbf{y} -System. Mit der “bac-cab-Regel” für das doppelte Vektorprodukt finden wir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mathbf{R} \sum_i m_i [\vec{\omega} (\vec{y}_i \cdot \vec{y}_i) - \vec{y}_i (\vec{y}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \mathbf{R} \sum_i m_i \begin{pmatrix} \omega_1 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i1} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \\ \omega_2 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i2} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \\ \omega_3 (y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + y_{i3}^2) - y_{i3} (y_{i1} \omega_1 + y_{i2} \omega_2 + y_{i3} \omega_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

An dieser Gleichung sehen wir, dass \vec{L} linear in $\vec{\omega}$ ist, sodass wir schreiben können

$$\vec{L} = \mathbf{R} \vec{S} = \mathbf{R} \theta \vec{\omega},$$

und aus Gl (5.6) können wir die Komponenten der Matrix θ ablesen:

$$\theta = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_{i1}^2 + y_{i2}^2 & y_{i1} y_{i2} & y_{i1} y_{i3} \\ y_{i1} y_{i2} & y_{i1}^2 + y_{i3}^2 & y_{i2} y_{i3} \\ y_{i1} y_{i3} & y_{i2} y_{i3} & y_{i2}^2 + y_{i3}^2 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrix θ handelt es sich um eine Darstellung des *Trägheitstensors* im \mathbf{y} -System, den wir auch durch die Vektoren \vec{y} ausdrücken können:

$$\theta = \sum_i m_i (\vec{y}_i^2 \mathbf{1} - \vec{y}_i \otimes \vec{y}_i),$$

mit den Matrixelementen

$$\theta_{jk} = \sum_i m_i (\vec{y}_i^2 \delta_{jk} - y_i^j y_i^k). \quad (5.7)$$

Für das Tensorprodukt zwischen Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T$. Damit haben wir den folgenden Zusammenhang zwischen Drehimpuls \vec{L} im \mathbf{x} -System und Drehimpuls \vec{S} im \mathbf{y} -System gefunden:

$$\vec{L} = \mathbf{R} \vec{S} \quad \text{mit} \quad \vec{S} = \theta \vec{\omega}, \quad \text{d.h.} \quad S_j = \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} \omega_k$$

Für kontinuierliche starre Körper wird die Summation über die Punktmassen durch eine Volumenintegration, d.h. eine Integration über die Massenverteilung, ersetzt:

$$\sum_i m_i \rightarrow \int d\mathbf{m}(\vec{y}) = \int d^3\mathbf{y} \mu(\vec{y}),$$

wobei $\mu(\vec{y})$ die Massendichte und $d^3\mathbf{y}$ das Volumenelement sind. Dann ist $\mathbf{M} = \int d\mathbf{m}$ die Gesamtmasse. Dann gilt wieder für den Drehimpuls im Laborsystem,

$$\vec{L} = \int d\mathbf{m} (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = \int d\mathbf{m} (\mathbf{R}\vec{y} \times \dot{\mathbf{R}}\vec{y}) = \mathbf{R} \int d\mathbf{m} (\vec{y} \times \underbrace{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\vec{y}}_{\vec{\omega} \times \vec{y}}) \equiv \mathbf{R}\vec{S}.$$

Dabei ist \vec{S} (und $\vec{\omega}$) der Drehimpuls (und die Winkelgeschwindigkeit) im mitrotierenden Bezugssystem, dem \mathbf{y} -System. \vec{S} ist eine lineare Funktion der ω_k ($k = 1, 2, 3$):

$$S_j = \int d\mathbf{m} [\vec{y} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})]_j = \int d\mathbf{m} [\vec{y}^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{y}) \vec{y}]_j \equiv \sum_k \theta_{jk} \omega_k, \quad (5.8)$$

wobei der *Trägheitstensor* θ die Komponenten

$$\theta_{jk} = \int d\mathbf{m} [\vec{y}^2 \delta_{jk} - y_j y_k] \quad (5.9)$$

hat. Ein rotierender Ring mit Radius R und Gesamtmasse M hat, z.B., $\theta_1 = \theta_2 = MR^2/2$, $\theta_w = MR^2$.

Kinetische Energie

Die Geschwindigkeit eines Massenpunkts ist im Laborsystem $\dot{\vec{x}} = \dot{\mathbf{R}}\vec{y}$, im rotierenden System also $\mathbf{R}^T \dot{\vec{x}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$. Also finden wir für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{m} (\vec{\omega} \times \vec{y}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{y}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{m} \vec{\omega} \cdot [\vec{y} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})],$$

wobei die letzte Identität eine Konsequenz der geometrischen Eigenschaften des Kreuzproduktes ist. Also können wir die kinetische Energie auch in der Form

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \omega_i \theta_{ik} \omega_k \quad (5.10)$$

schreiben.

Hauptachsensystem

Den Trägheitstensor θ kann man als lineare Abbildung $\theta : \vec{\omega} \mapsto \vec{S} = \theta \vec{\omega}$ auffassen. Ferner ist θ symmetrisch, $\theta_{ik} = \theta_{ki}$ und die quadratische Form

$(\vec{\omega}, \theta \vec{\omega}) = 2T$ positiv definit, da dies die kinetische Energie T ist. Jede reelle, symmetrische Matrix lässt sich vollständig diagonalisieren. Es gibt somit stets ein orthonormiertes System von Eigenvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ von θ mit positiven Eigenwerten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Wählt man die \vec{e}_i als Basis des körperfesten Koordinatensystems, so wird die Matrix θ_{ik} diagonal:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

und wir befinden uns im *Hauptachsensystem*. Gl. (5.8) und (5.10) vereinfachen sich zu

$$S_i = \theta_i \omega_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad T = \sum_i \theta_i \omega_i^2. \quad (5.12)$$

Im folgenden benutzen wir stets ein Hauptachsensystem.

Eigenschaften des Trägheitstensors

- Der Trägheitstensor ist additiv: Die Trägheitsmomente eines Körpers sind gleich der Summen der Trägheitsmomente seiner Teile, wie man unmittelbar aus Gl. (5.7) oder (5.9) ablesen kann.
- Falls zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind: $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$, dann spricht man von einem *symmetrischen Kreisel*. Dann ist die Wahl der Hauptträgheitsrichtungen in der \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 -Ebene beliebig.
- Falls alle drei Trägheitsmomente gleich sind, spricht man von einem *Kugelkreisel*. Dann gibt es freie Wahl für alle drei Hauptträgheitsachsen.
- Wenn der Körper eine Symmetrie besitzt, vereinfacht sich die Suche nach den Hauptachsen, denn Schwerpunkt und Hauptachsen haben gemeinsame Symmetrien.

Beispiel 1: Der Körper hat eine Symmetrieebene. Dann liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene, ebenso wie zwei der Hauptachsen. Die dritte Hauptachse steht senkrecht auf dieser Ebene.

Beispiel 2: Der Körper besitzt eine Symmetrieachse beliebiger Ordnung. Dann liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse, und eine Hauptachse fällt mit dieser Achse zusammen; die beiden anderen stehen senkrecht dazu.

Beispiele:

- 1) Dünner Stab der Länge l : Wir legen \mathbf{y}_3 in Richtung der Stange und haben

in dieser Richtung kein Trägheitsmoment. Vom Schwerpunkt, der Mitte der Stange aus haben wir mit $\mu = M/l$:

$$I_1 = I_2 = \int d^3\mathbf{y} \mu (y_2^2 + y_3^2) = \mu \int_{l/2}^{l/2} d\mathbf{y}_3 y_3^2 = \mu \left[\frac{y_3^3}{3} \right]_{l/2}^{l/2} = \frac{\mu l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}$$

2) Kugel mit Radius R , Massendichte $\mu = M/V = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$. Die drei Hauptträgheitsmomente sind gleich, und am leichtesten findet man ihre Summe:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3}(I_{11} + I_{22} + I_{33}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\int d^3\mathbf{y} \mu (y_2^2 + y_3^2) + \int d^3\mathbf{y} \mu (y_1^2 + y_3^2) + \int d^3\mathbf{y} \mu (y_1^2 + y_2^2) \right) \\ &= \frac{2\mu}{3} \int d^3\mathbf{y} \bar{y}^2 = \frac{2\mu}{3} 4\pi \int_0^R dr r^4 = \frac{8\pi\mu}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{8\pi\mu R^5}{15} \\ &= \frac{8\pi R^5}{15} \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned}$$

Satz von Steiner

Bislang hatten wir als Bezugspunkt für die Berechnung des Trägheitstensors θ den Schwerpunkt, d.h. den Ursprung des körperfesten \mathbf{y} -Systems gewählt. Wir wollen jetzt den Trägheitstensor θ' bestimmen, der sich ergibt, wenn wir den Schwerpunkt des starren Körpers in einen beliebigen Punkt $\vec{\mathbf{a}}$ im \mathbf{y} -System verschieben. Er lässt sich leicht zu θ in Beziehung setzen. Die Massenpunkte befinden sich jetzt an Orten $\vec{\mathbf{y}}'_i = \vec{\mathbf{y}}_i + \vec{\mathbf{a}} \forall i$, und damit folgt:

$$\begin{aligned} \theta'_{jk} &= \sum_i m_i ((\vec{\mathbf{y}}_i + \vec{\mathbf{a}})^2 \delta_{jk} - (\vec{\mathbf{y}}_i + \vec{\mathbf{a}})^j (\vec{\mathbf{y}}_i + \vec{\mathbf{a}})^k) \\ &= \sum_i m_i ((\vec{\mathbf{y}}_i^2 + \vec{\mathbf{a}}^2 + \underbrace{\vec{\mathbf{y}}_i \vec{\mathbf{a}}}_{=0}) \delta_{jk} - \vec{\mathbf{y}}_i^j \vec{\mathbf{y}}_i^k - \vec{\mathbf{a}}^j \vec{\mathbf{a}}^k - \underbrace{\vec{\mathbf{y}}_i^j \vec{\mathbf{a}}^k}_{=0} - \underbrace{\vec{\mathbf{a}}^j \vec{\mathbf{y}}_i^k}_{=0}) \end{aligned}$$

Die linearen Terme in $\vec{\mathbf{y}}$ bzw. den Komponenten von $\vec{\mathbf{y}}$ sind Null, weil der Ursprung des \mathbf{y} -Systems mit dem Schwerpunkt übereinstimmt: $\sum_i m_i \vec{\mathbf{y}}_i = \vec{\mathbf{0}}$. Damit erhalten wir den Satz von Steiner:

$$\theta'_{jk} = \theta_{jk} + M(\vec{\mathbf{a}}^2 \delta_{jk} - \vec{\mathbf{a}}^j \vec{\mathbf{a}}^k), \quad (5.13)$$

mit $M = \sum_i m_i$.

5.5 Freier Kreisel

Der Drehimpulssatz $\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \vec{\mathbf{M}}$ (siehe Kap. 1.7) gilt im Laborsystem und führt auf die Bewegungsgleichungen für den Kreisel. Für den freien Kreisel verschwindet das Drehmoment $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$. Mit $\vec{\mathbf{L}} = R\vec{\mathbf{S}}$ finden wir

$$0 = \dot{\vec{\mathbf{L}}} = \dot{R}\vec{\mathbf{S}} + R\dot{\vec{\mathbf{S}}}$$

und

$$\dot{\vec{\mathbf{S}}} = -R^{-1}\dot{R}\vec{\mathbf{S}} = -\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{S}}. \quad (5.14)$$

Drücken wir nun $\vec{\mathbf{S}}$ mithilfe von Gl. (5.12) durch ω_i aus, so erhalten wir für die ω_i ein nicht-lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung, die *Eulerschen Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Im Allgemeinen, d.h. für nichtverschwindendes Drehmoment $\vec{\mathbf{M}} = (M_1, M_2, M_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$ lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 &= \theta_1 \dot{\omega}_1 - (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 &= \theta_2 \dot{\omega}_2 - (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 &= \theta_3 \dot{\omega}_3 - (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Konstruktion von Poinso

Die Bahnkurve des freien Kreisels $\vec{\mathbf{L}} = \text{const.}$ lässt sich geometrisch bestimmen durch die *Konstruktion von Poinso*. Dazu betrachten wir die raumfeste (da $\vec{\mathbf{L}}$ fest) Ebene

$$(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{L}}) = (\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{S}}) = 2E \quad (5.17)$$

(die Identität folgt aus $\vec{\mathbf{x}} = R\vec{\mathbf{y}}$ und $\vec{\mathbf{L}} = R\vec{\mathbf{S}}$), und das körperfeste Ellipsoid

$$(\vec{\mathbf{y}}, \theta \vec{\mathbf{y}}) = 2E, \quad (5.18)$$

wobei jeweils $\vec{\mathbf{x}}$ und $\vec{\mathbf{y}}$ als freie Variablen zu sehen sind und E die (erhaltene) kinetische Energie ist. Wie üblich notieren wir mit $(,)$ das Skalarprodukt,

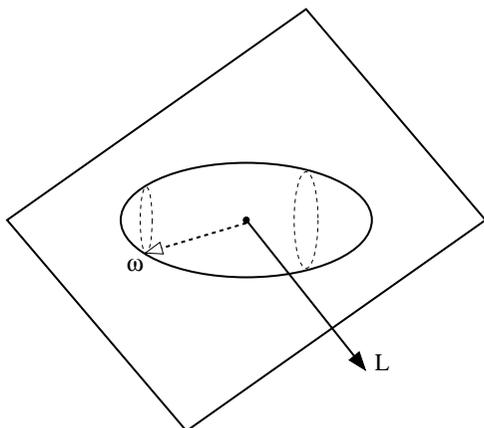


Abbildung 5.3: Die Konstruktion von Poinso mit dem körperfesten Ellipsoid $(\vec{y}, \theta\vec{y}) = 2E$ und der Labor-festen Ebene $(\vec{x}, \vec{L}) = 2E$

und Gl. (5.18) sollte mit der allgemeinen Gleichung für ein Ellipsoid, $y_1^2/a^2 + y_2^2/b^2 + y_3^2/c^2 = 1$ verglichen werden.

Wir wollen nun zeigen, dass sich die raumfeste Ebene und das körperfeste Ellipsoid genau in einem Punkt ($\vec{y} = \vec{\omega}$) schneiden. Haben wir dies gezeigt, so folgt, dass das Ellipsoid auf der Ebene abrollt, womit die Bahnkurve gefunden wäre.

Wir beginnen mit der Bemerkung, dass $\vec{y} = \vec{\omega}$ sowohl (5.17) sowie (5.18) löst, da

$$(\vec{\omega}, \vec{S}) = (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) = 2E.$$

Damit ist jedes \vec{y} der Ebene (5.17) von der Gestalt $\vec{y} = \vec{\omega} + \Delta\vec{y}$ (weil $\vec{\omega}$ die Ebenengleichung erfüllt), mit $(\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$ (weil $\Delta\vec{y}$ in der Ebene liegt und \vec{S} senkrecht auf ihr steht). Diese Form setzen wir nun in die linke Seite von (5.18) ein:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} + \Delta\vec{y}, \theta(\vec{\omega} + \Delta\vec{y})) &= (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) + (\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) + (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \\ &= 2E + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \end{aligned}$$

da $(\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) = (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) = (\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$. Somit ist (5.18) dann und nur dann erfüllt, wenn $\Delta\vec{y} = \vec{0}$ ist, denn $(\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \geq 0$.

Stabilitätsanalyse

Als ersten (Spezial-)Fall betrachten wir nun

die *permanenten Rotationen* um eine Hauptachse, z.B.

$$\vec{\omega} = (\omega_1, 0, 0) = \text{konst.} \quad (5.19)$$

Man rechnet leicht nach, dass es sich dabei um eine Lösung der Eulerschen Gleichungen handelt. Wir untersuchen nun die Stabilität dieser Bewegung, indem wir die Eulerschen Gleichungen nach kleinen ω_2 und ω_3 entwickeln, d.h. wir vernachlässigen Terme mit $\omega_2\omega_3$.

Linear in ω_2, ω_3 sind die Eulerschen Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_2 \omega_1 \end{aligned}$$

Somit bleibt ω_1 weiterhin konstant, und wir haben zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten, ω_2, ω_3 :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Die Eigenwerte λ der Matrix \mathbf{A} ergeben sich zu

$$\lambda^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3} \omega_1^2.$$

Die Eigenwerte λ sind reell, falls θ_1 zwischen θ_2 und θ_3 liegt – dann hat (5.20) exponentiell wachsende Lösungen (Instabilität der permanenten Rotationen um die *mittlere* Hauptachse). Falls θ_1 das kleinste oder größte Hauptträgheitsmoment ist, so sind die Eigenwerte λ imaginär und das System führt kleine Schwingungen um die Lösung $\vec{\omega} = (\omega_1, 0, 0)$ aus, die somit (marginal) stabil ist.

Symmetrischer Kreisel

Wir betrachten nun die allgemeine Bewegung des freien *symmetrischen Kreisels* (=2 gleiche Trägheitsmomente). Sei die y_1 -Achse die Figurenachse, also $\theta_2 = \theta_3$. Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0 & \rightarrow & \omega_1 = \text{konst.}, \text{ also} \\ \dot{\omega}_2 &= -\alpha \omega_3 & \alpha &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_3} \omega_1 = \text{konst.} \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha \omega_2 \end{aligned}$$

Diese gekoppelte Differentialgleichung lässt sich mit dem folgenden Ansatz lösen:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) + i\omega_3(t) &= (\omega_2(0) + i\omega_3(0))e^{i\alpha t} \\ &= (\omega_2(0) \cos \alpha t - \omega_3(0) \sin \alpha t) + i(\omega_2(0) \sin \alpha t + \omega_3(0) \cos \alpha t) \end{aligned}$$

Da die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit reell sind, ist der Realteil des Ansatzes $\omega_2(\mathbf{t})$, und der Imaginärteil $\omega_3(\mathbf{t})$. Man kontrolliert leicht, dass der Ansatz die Differentialgleichung löst:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \frac{d}{dt}(\omega_2(0) \cos \alpha t - \omega_3(0) \sin \alpha t) \\ &= -\alpha \omega_2(0) \sin \alpha t - \alpha \omega_3(0) \cos \alpha t = -\alpha \omega_3(t) \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{d}{dt}(\omega_2(0) \sin \alpha t + \omega_3(0) \cos \alpha t) \\ &= \alpha \omega_2(0) \cos \alpha t - \alpha \omega_3(0) \sin \alpha t = \alpha \omega_2(t)\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass sich der Vektor $\vec{\omega}$ im körperfesten System mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α um die Figurenachse, hier die \mathbf{y}_1 -Achse, dreht. Dabei bleibt die Winkelgeschwindigkeit dem Betrag nach konstant. Diese zeitliche Änderung von $\vec{\omega}$ heißt *Präzession* ($\vec{\omega}$ präzediert um die Figurenachse). Sie ist in Übereinstimmung mit der Konstruktion von Poincaré. Die Präzessionsfrequenz α ist kleiner als die Frequenz $|\vec{\omega}|$, und sie ist umso kleiner, je kleiner $\theta_3 - \theta_1$ ist.

5.6 Schwerer, symmetrischer Kreisel

Der nächste wichtige Fall ist der symmetrische Kreisel im homogenen Schwerfeld der Erde, der *schwere symmetrische Kreisel*.

Wir setzen $\theta_1 = \theta_2$ (\mathbf{y}_3 -Achse = Figurenachse) und nehmen an, dass der Schwerpunkt auf der \mathbf{y}_3 -Achse liegt und die körperfeste Koordinate $(0, 0, l)$ hat ($l > 0$ fest). In den Eulerschen Winkeln wird die kinetische Energie zu

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\theta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\theta_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2.\end{aligned}$$

Wenn die \mathbf{x}_3 -Achse in der Vertikalen liegt, so ist die potentielle Energie $V = mgl \cos \vartheta$ und die Lagrangefunktion $L = T - V$ wird zu

$$L = \frac{\theta_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\theta_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (5.21)$$

Erhaltungssätze

Da L nicht von \mathbf{t} , φ , ψ abhängt, besitzt das System die drei Erhaltungsgrößen

$$T + V = E \quad (5.22)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(\theta_1 \sin^2 \vartheta + \theta_3 \cos^2 \vartheta) + \dot{\psi} \theta_3 \cos \vartheta \equiv M_z \quad (5.23)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \equiv M_3, \quad (5.24)$$

deren Konstanten wir mit E , M_z und M_3 bezeichnen. p_φ und p_ψ sind die Projektionen des Drehimpulses \vec{S} auf \vec{e}_φ (Vertikale) beziehungsweise \vec{e}_ψ (Figurenachse):

$$p_\varphi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi \quad p_\psi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\psi$$

Mit Gl. (5.4) ist

$$\vec{S} = \theta \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \theta_1(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) \\ \theta_2(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) \\ \theta_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \end{pmatrix},$$

und mit der Definition von \vec{e}_φ und \vec{e}_ψ aus Gl. (5.5) rechnet man $p_\varphi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi$ und $p_\psi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\psi$ leicht nach. Die Größen $E = T + V$ und p_φ sind auch beim allgemeinen schweren Kreisel erhalten, p_ψ jedoch nur beim symmetrischen Kreisel.

Bewegungsgleichungen

Aus (5.23) und (5.24) erhalten wir

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{\theta_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta, \quad (5.25)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (5.26)$$

d.h. $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ sind durch ϑ bestimmt. Kennen wir also erst einmal $\vartheta(\mathbf{t})$, können wir aus Integration von (5.26) und (5.25) $\varphi(\mathbf{t})$ und $\psi(\mathbf{t})$ erhalten.

Die Bestimmungsgleichung für die *Nutationsbewegung* $\vartheta(\mathbf{t})$ erhalten wir, indem wir (5.26) und (5.25) in (5.22) einsetzen:

$$E = \frac{\theta_1}{2} \left(\frac{(M_z - M_3 \cos \vartheta)^2}{\theta_1^2 \sin^2 \vartheta} + \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{\theta_3 M_3^2}{2 \theta_3^2} + mgl \cos \vartheta$$

und damit

$$\frac{2E'}{\theta_1} = \frac{2}{\theta_1} \left(E - \frac{M_3^2}{2\theta_3} \right) = \dot{\vartheta}^2 + \frac{(M_z - M_3 \cos \vartheta)^2}{\theta_1^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2mgl}{\theta_1} \cos \vartheta. \quad (5.27)$$

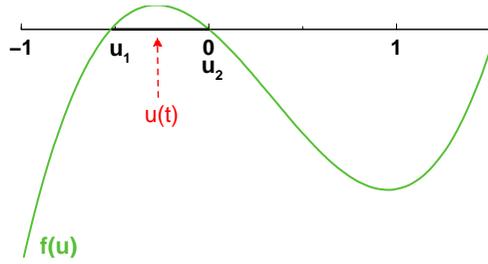


Abbildung 5.4: Qualitativer Verlauf der Funktion $f(u)$, siehe Gl. (5.29).

Wir führen eine Variablentransformation $u = \cos \vartheta$ (und damit $\dot{u} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$, $\dot{u}^2 = \dot{\vartheta}^2(1 - u^2)$) durch und setzen

$$a = \frac{M_z}{\theta_1}; \quad b = \frac{M_3}{\theta_1}; \quad \alpha = \frac{2E'}{\theta_1}; \quad \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}. \quad (5.28)$$

Dann lautet (5.27)

$$\alpha = \frac{\dot{u}^2}{(1 - u^2)} + \frac{(a - bu)^2}{(1 - u^2)} + \beta u$$

und aufgelöst nach \dot{u}^2

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 \equiv f(u) \quad (5.29)$$

Hier ist u nur für $-1 \leq u \leq 1$ definiert. Wegen $\dot{u}^2 > 0$ ist die allgemeine Lösung auf das Gebiet mit $f(u) \geq 0$ beschränkt. Die Lösung ist dort wegen $du/dt = \sqrt{f(u)}$

$$t(u) - t(u_0) = \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \quad (5.30)$$

Hieraus ergibt sich $u(t) = \cos \vartheta(t)$ und damit $\vartheta(t) = \arccos u(t)$.

Diskussion der Lösungen

Die Funktion $f(u)$ hat die Eigenschaften

$$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 \leq 0, \quad f(u) \sim \beta u^3, \quad (u \rightarrow \pm \infty)$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen muss ferner $f(u) = \dot{u}^2$ irgendwo im Intervall $-1 \leq u = \cos \vartheta \leq +1$ größer als Null sein.

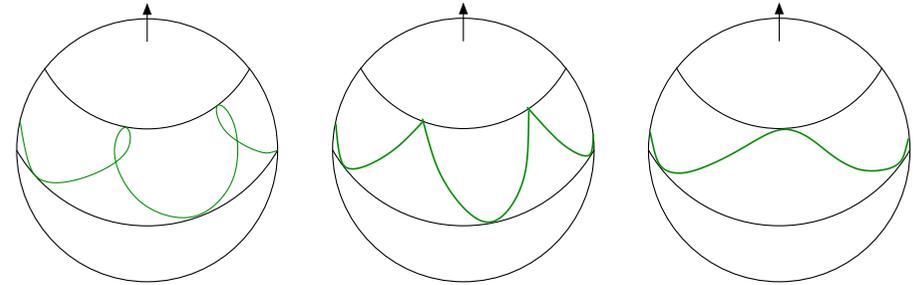


Abbildung 5.5: Schematische Illustration der Nutationsbewegung des schweren, symmetrischen Kreisels. Links: $u_1 < a/b < u_2$, Mitte: $a/b = u_2$, Rechts: $a/b > u_2$.

Daraus ergibt sich, dass $u_1 \leq u \leq u_2$ der Bereich energetisch zulässiger Lösungen ist (siehe Abb. 5.4). Dabei sind u_1 und u_2 Nullstellen erster Ordnung von $f(u)$, d.h. Umkehrpunkte der Nutationsbewegung. $u(t)$ pendelt periodisch zwischen u_1 und u_2 mit der Periode

$$T = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}.$$

Dieselbe Periode hat

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

$\dot{\varphi}$ wechselt das Vorzeichen nur, falls $u_1 < a/b < u_2$. Der Grenzfall $u_1 = a/b$ ist ausgeschlossen, denn dann wäre auch $u_1 = \alpha/\beta$, d.h. $\alpha - \beta u = \beta(\alpha/\beta - u) = \beta(u_1 - u)$ und $f(u)$ negativ im Intervall $[u_1, u_2]$. Für die Richtung der Figurenachse gibt es somit drei Bewegungstypen, die wir auf der Einheitskugel darstellen können (siehe Abb. 5.5).

Die Abbildung zeigt die Position des Kreisels als Punkte $(\vartheta(t), \varphi(t))$ auf der Einheitskugel. Der Winkel $\psi(t)$ entspricht der Rotation des Kreisels um seine Symmetrieachse (Figurenachse) und spielt daher zur Angabe der Orientierung des Kreisels im Raum keine Rolle. Die Punkte $(\vartheta(t), \varphi(t))$ heißen *Locus* des Kreisels. Der Locus verläuft also zwischen den zwei Kreisen $\vartheta_1 = \arccos u_1$ und $\vartheta_2 = \arccos u_2$ (den Umkehrpunkten). Die Gestalt der Locuskurve ist wegen

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}$$

im Wesentlichen durch den Wert der Wurzel von $a - bu$, also $u_0 = a/b$ bestimmt. Die drei Fälle sind:

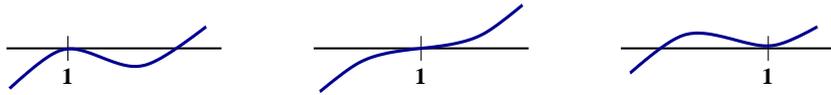


Abbildung 5.6: Illustration der Funktion $(1-u)^2 [2\alpha - a^2]$. Links: $2\alpha < a^2$, Mitte: $2\alpha = a^2$, Rechts: $2\alpha > a^2$.

- 1) Mit Anfangsbedingungen, die $u_0 > u_2$ ergeben, wird $\dot{\phi}$ immer dasselbe Vorzeichen für die erlaubten Neigungswinkel zwischen ϑ_1 und ϑ_2 haben (siehe Abb. 5.5 rechts); der Kreisel präzediert um die vertikale Achse, aber nicht regulär wie beim freien Kreisel, sondern mit Nutationen (Nickbewegungen).
- 2) $u_0 = a/b$ liegt zwischen u_1 und u_2 . Dann ist die Richtung der Präzession an den zwei Begrenzungskreisen verschieden, und die Bewegung erfolgt in Schleifen (siehe Abb. 5.5 Mitte). Im Mittel wird $\dot{\phi}$ aber nicht Null sein, sodass die Präzession in eine Richtung fortschreitet.
- 3) u_0 fällt mit einer Wurzel von $f(u)$ zusammen. An dieser Stelle verschwinden $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\phi}$, und der Locus hat Spitzen, die einen Begrenzungskreis berühren (siehe Abb. 5.5 links).

Stabilität des senkrecht stehenden schweren Kreisels

Der Kreisel rotiere um die $x_3 = y_3$ -Achse. Dann ist

$$E' = mgl; \quad M_3 = M_z = M, \quad \text{also}$$

$$\alpha = \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}; \quad a = b = \frac{M}{\theta_1}, \quad \text{und}$$

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1-u)^2 [\alpha(1+u) - a^2] \approx (1-u)^2 [2\alpha - a^2] \quad (u \approx 1)$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $u = 1$. Der Verlauf hängt vom Vorzeichen von $(2\alpha - a^2)$ ab (siehe Abb. 5.6):

Für $2\alpha > a^2$ (d.h. $M^2 < 4\theta_1 mgl$) ist die Lösung $u = 1$ instabil, da links von $u = 1$ ein energetisch erlaubtes Intervall mit $f(u) = \dot{u}^2 > 0$ anschließt. Der senkrecht aufgesetzte Spielkreisel beginnt also zu wackeln, sobald M^2 durch Reibungsverluste unter die Stabilitätsgrenze $4\theta_1 mgl$ sinkt.