

3. Schwingungen

3.0 Einführung

Schwingende Systeme lassen sich für kleine Amplituden im allgemeinen auf ein System linearer Differentialgleichungen zurückführen. Das gedämpfte mathematische Pendel, z.B., wird durch

$$m \ddot{x} = -f x - K \dot{x} \quad (3.1)$$

beschrieben. Hierbei ist m die Masse, f die Federkonstante und K die Reibungskonstante. Gl. (3.1) lässt sich elementar mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}; \quad m\lambda^2 + K\lambda + f = 0 \quad (3.2)$$

lösen. Unser Ziel ist es hier, einen allgemeinen Formalismus zu entwickeln, der zum einen Gl. (3.2) reproduziert und zum anderen auch auf komplizierte Probleme, wie z.B. ein System von gekoppelten Oszillatoren anwendbar ist. Hierzu werden wir eine Darstellung mit Hilfe von Operatoren und Propagatoren verwenden, wie sie in der Quantenmechanik üblich ist.

3.1 Gedämpftes mathematisches Pendel

Zur Einführung betrachten wir das (gedämpfte) mathematische Pendel, Gl. (3.1). Wir führen einen Vektor

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}; \quad \beta = \frac{K}{2m},$$

ein, mit $\alpha, \beta > 0$. Die Bewegungsgleichung,

$$\ddot{x} = -\frac{f}{m}x - \frac{K}{m}\dot{x} = -\alpha^2 x - 2\beta\dot{x},$$

wird dann zu

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x} = \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \frac{\dot{z}}{\alpha} = -\alpha x - 2\beta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix},$$

oder in Matrix-Form

$$\dot{\vec{z}} = A \vec{z}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Wir haben also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt. Der Vorteil ist die Anwendbarkeit der Methoden der linearen Algebra.

Wir verwenden Exponentialansatz

$$\vec{z} = \vec{a} e^{\lambda t}; \quad \vec{a} \in \mathbb{C}^2,$$

mit der Eigenschaft $\dot{\vec{z}} = \lambda \vec{z}$. Einsetzen in Gl. (3.3) ergibt $A \vec{a} e^{\lambda t} = \lambda \vec{a} e^{\lambda t}$. Also finden wir die *Eigenschwingungen* durch Lösung des Eigenwertproblems

$$A \vec{a} = \lambda \vec{a} \iff (A - \lambda \mathbb{1}) \vec{a} = 0$$

Nicht-triviale Lösungen (also solche, für die $\vec{a} \neq 0$ in \mathbb{C}^2 ist) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\alpha & -\lambda - 2\beta \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 = \lambda^2 + \frac{K}{m}\lambda + \frac{f}{m} = 0$$

gegeben (vergl. Gl.(3.2)). Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = -\frac{K}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2m}\right)^2 - \frac{f}{m}}. \quad (3.4)$$

Die entsprechenden Eigenvektoren finden wir mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \implies a_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha} a_1$$

und damit

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_i}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.5)$$

Es gibt drei Möglichkeiten für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$:

$$\begin{array}{lll} \alpha > \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, & \text{unterkritische Dämpfung} \\ \alpha = \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta, & \text{kritische Dämpfung} \\ \alpha < \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \text{überkritische Dämpfung.} \end{array}$$

Wir betrachten jetzt den Fall $\alpha > \beta$ genauer und passen die zwei Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ an. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; die Lösung erhalten wir als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\alpha} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + B^* \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2}{\alpha} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Da $\lambda_1 = \lambda_2^*$ gilt $e^{\lambda_1 t} = (e^{\lambda_2 t})^*$, und um eine reelle Lösung $x(t)$ zu erhalten, müssen die zu bestimmenden Koeffizienten B und B^* zueinander konjugiert komplex sein. Mit $B = C_1 + iC_2$, $B^* = C_1 - iC_2$ und $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= B e^{(-\beta+i\tilde{\omega})t} + B^* e^{(-\beta-i\tilde{\omega})t} = (C_1 + iC_2) e^{(-\beta+i\tilde{\omega})t} + (C_1 - iC_2) e^{(-\beta-i\tilde{\omega})t} \\ &= C_1 e^{-\beta t} (e^{i\tilde{\omega}t} + e^{-i\tilde{\omega}t}) + iC_2 e^{-\beta t} (e^{i\tilde{\omega}t} - e^{-i\tilde{\omega}t}) \\ &= 2C_1 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t) + 2C_2 e^{-\beta t} \sin(\tilde{\omega}t) \end{aligned}$$

Aus $x(t=0) = 2C_1 \stackrel{!}{=} x_0$ folgt $C_1 = x_0/2$. Die Zeitableitung liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= -2\beta e^{-\beta t} (C_1 \cos(\tilde{\omega}t) + C_2 \sin(\tilde{\omega}t)) \\ &\quad + 2e^{-\beta t} (-C_1 \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t) + C_2 \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t)) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\dot{x}(t=0) = -2\beta C_1 + 2C_2 \tilde{\omega} \stackrel{!}{=} \dot{x}_0 \implies C_2 = \frac{\dot{x}_0}{2\tilde{\omega}} + \frac{x_0 \beta}{2\tilde{\omega}}$$

Damit finden wir als Lösung für die schwach gedämpfte Schwingung ($\alpha > \beta$)

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \left(\cos \tilde{\omega}t + \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \right) + \dot{x}_0 e^{-\beta t} \frac{1}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \quad (3.6)$$

Im Falle der unterkritischen Dämpfung ist die Frequenz

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{K^2}{4m^2}}$$

gegenüber der Frequenz $\omega = \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$ der ungedämpften Schwingung verringert. Die Dämpfung β führt zu einer Halbwertszeit $1/\beta$ für die Amplitude. Ein Beispiel für eine unterkritisch gedämpfte Schwingung ist in Abb. 3.1 gezeigt, eines für eine überkritisch gedämpfte Schwingung in Abb. 3.2.

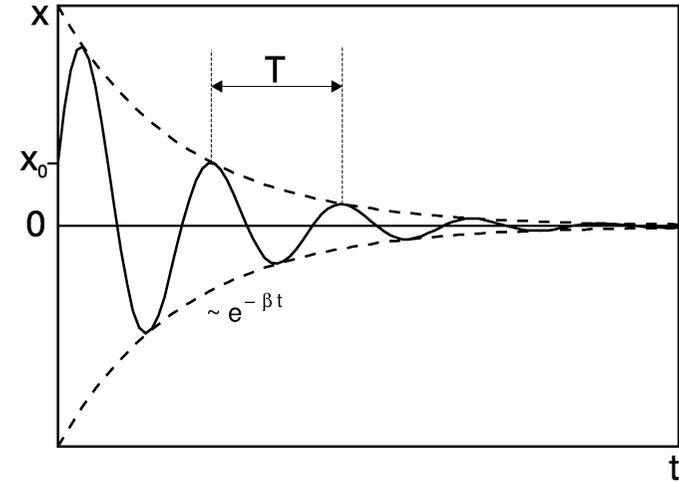


Abbildung 3.1: Illustration einer unterkritischen Schwingung mit einer Schwingungsdauer $T = 2\pi/\tilde{\omega}$ und einer Dämpfung β .

Im Spezialfall des ungedämpften harmonischen Oszillators ($\beta = 0$, $\omega = \alpha$) vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

$$x = B e^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t} = 2C_1 \cos(\omega t) + 2C_2 \sin(\omega t)$$

$$\implies x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \sin(\omega t)$$

Dabei handelt es sich um die parametrische Darstellung einer Ellipse im Phasenraum (x, \dot{x}) .

Propagator

Mit $\vec{z}(0) = (x(0), \dot{x}(0)/\alpha)$ definieren wir durch

$$\vec{z}(t) = P(t, 0) \vec{z}(0)$$

den Propagator $P(t, 0) : \{\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2\}$, der den Zustand des Systems zur Zeit $t=0$ auf den zur Zeit t abbildet (propagieren=ausbreiten). Der Propagator ist durch

$$P(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\beta t} (\cos \tilde{\omega}t + \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t) & e^{-\beta t} \frac{\alpha}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t \\ -e^{-\beta t} \frac{\alpha}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t & e^{-\beta t} (\cos \tilde{\omega}t - \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t) \end{pmatrix}$$

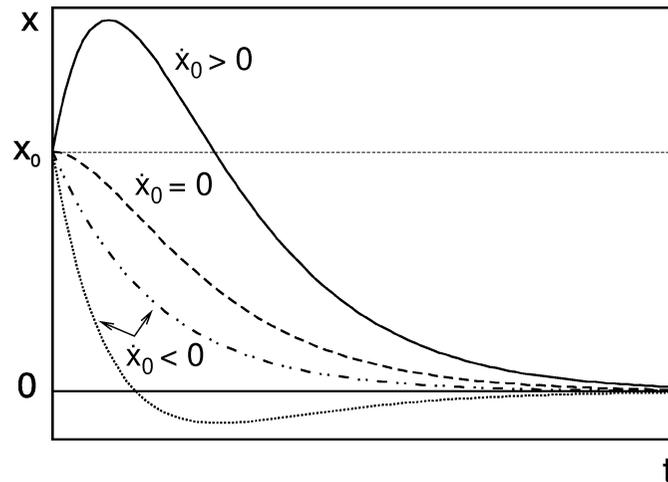


Abbildung 3.2: Illustration einer überkritischen Schwingung mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$.

gegeben.

Beispiel

Als weiteres Beispiel diskutieren wir die Gleichung dritten Grades

$$\frac{d^3}{dt^3}x + a \frac{d^2}{dt^2}x + b \frac{d}{dt}x + cx = 0$$

mittels des Vektors $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$,

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ -a\ddot{x} - b\dot{x} - cx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \equiv A\vec{z}.$$

Demnach ist auch der Propagator in diesem Beispiel eine 3×3 Matrix und es gibt drei Anfangsbedingungen, $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)$. In der Mechanik ist die Bewegungsgleichung dagegen nur zweiter Ordnung und die Bahn ist durch nur zwei Anfangsbedingungen, Ort und Geschwindigkeit, festgelegt.

3.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Physikalische Messungen an einem Prozess werden dadurch sinnvoll, dass man den Prozess und die Experimente wiederholen kann. Jede Wiederholung sollte dann bei gleichen Anfangsbedingungen stattfinden, d.h. sowohl die externen Einflüsse (Reibung, treibende Kraft) wie interne Anfangswerte (x_0, \dot{x}_0) sollten dieselben sein. Allerdings wird es technisch nie möglich sein, exakt dieselben Anfangsbedingungen zu präparieren, und daher wird es immer eine kleine Abweichung in den Anfangsbedingungen geben. Wenn eine kleine Abweichung nach langer Zeit eine beschränkte Abweichung in den beobachteten Zuständen ergibt, nennt man die Bewegung *stabil*. Hier untersuchen wir die Stabilität bezüglich der internen Anfangswerte.

Betrachten wir eine allgemeine Bewegungsgleichung der Form

$$\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z}) \quad (3.7)$$

(\vec{z} und \vec{G} seien Vektorfelder auf \mathbb{R}^n). Nehmen wir an, dass eine Lösung $\vec{z}(t)$ von (3.7) bekannt sei. Wir betrachten jetzt eine zweite Lösung $\vec{z}(t) + \delta\vec{z}(t)$, die anfangs zu $\vec{z}(t)$ benachbart ist; also ist $\delta\vec{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ eine kleine Abweichung um die bekannte Trajektorie $\vec{z}(t)$. Die Bewegungsgleichung für diese Lösung ist

$$\dot{\vec{z}} + \delta\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \quad (3.8)$$

Die Stabilitätsanalyse fragt jetzt nach dem Langzeitverhalten der Abweichung $\delta\vec{z}(t)$. Dazu linearisieren wir Gl. (3.8), d.h. wir entwickeln in erster Ordnung in $\delta\vec{z}(t)$:

$$\dot{\vec{z}} + \delta\dot{\vec{z}} = \vec{G}(\vec{z}) + \left(\delta\vec{z} \nabla_{\vec{z}} \right) \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}} + O(\delta\vec{z}^2)$$

oder komponentenweise

$$\dot{z}_i + \delta\dot{z}_i = G_i(\vec{z}) + \sum_k \delta z_k \frac{\partial}{\partial z_k} G_i(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}} + O(\delta\vec{z}^2).$$

Unter Verwendung von Gl. (3.7) finden wir für die Abweichung

$$\delta\dot{\vec{z}} = \left(\delta\vec{z} \nabla_{\vec{z}} \right) \vec{G}(\vec{z} + \delta\vec{z}) \Big|_{\vec{z}}$$

Wir identifizieren die partiellen Ableitungen $\partial G_i / \partial z_k$ mit den Elementen A_{ik} der Matrix A

$$A_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial z_k} \quad (3.9)$$

und finden damit

$$\delta \dot{\vec{z}}_i = \sum_k A_{ik} \delta \vec{z}_k, \quad \delta \dot{\vec{z}} = A \delta \vec{z}$$

Die Untersuchung der Matrix $A(t)$ ist Ausgangspunkt der Stabilitätsanalyse. Falls $A(t)$ stetig ist, so existiert für jeden Anfangswert $\delta \vec{z}(s) \in \mathbb{R}^n$ (zur Zeit s) eine eindeutige Lösung $\delta \vec{z}(t)$.

Propagator

Die lineare Abbildung

$$P(t, s) : \quad \vec{z}(s) \rightarrow \vec{z}(t)$$

heißt *Propagator* oder Bewegungsabbildung des Systems (wichtig insbesondere in der Quantenmechanik). Es gilt

$$P(t, r) P(r, s) = P(t, s)$$

$$P(s, s) = \mathbb{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, s) = A(t) P(t, s)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind zu der Integralgleichung

$$P(t, s) = \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) P(t_1, s)$$

äquivalent. Sie lässt sich iterativ lösen:

$$\begin{aligned} P(t, s) &= \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) \left[\mathbb{1} + \int_s^{t_1} dt_2 A(t_2) P(t_2, s) \right] \\ &= \mathbb{1} + \int_s^t dt_1 A(t_1) + \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) P(t_2, s) \end{aligned}$$

und nach unendlich vielen dieser iterativen Schritte

$$P(t, s) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n).$$

Autonome Systeme

Das System heißt *autonom* (zeitunabhängig), falls A nicht von der Zeit t abhängt (in (3.7) Linearisierung um eine Gleichgewichtslage $\vec{x}^0(t)=\text{konst.}$).

Dann hängt $P(t, s)$ nur von der Differenz der Zeiten $t - s$ ab und wir setzen $P(t) \equiv P(t, 0)$. Es gilt

$$P(t) P(s) = P(t + s)$$

$$P(0) = \mathbb{1}$$

(Gruppeneigenschaften von $P(t)$) und

$$\frac{d}{dt} P(t) = A P(t)$$

$$P(t) = \mathbb{1} + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = e^{At}.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass $P(t)$ die durch A erzeugte ein-parametrische Gruppe ist. Aus der Exponentialdarstellung von $P(t)$ kann man direkt nachvollziehen, dass

$$\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A A^{n-1} = A P(t)$$

gilt.

Beispiel

Für $\beta = 0$ hat die Matrix für den gedämpften harmonischen Oscillator die Form (3.3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\alpha^2 \mathbb{1}.$$

Es gilt also allgemein

$$A^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} \mathbb{1}, \quad A^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n} A, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Mit diesen Formeln lässt sich die Exponentialreihe für den Propagator aufsummieren:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} A^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} A^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} (-1)^m \alpha^{2m} \mathbb{1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m \alpha^{2m} A \\ &= \cos(t\alpha) \mathbb{1} + \frac{\sin(t\alpha)}{\alpha} A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Kap. 3.1 (für $\beta = 0$ ist $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha$).

Stabilität der Lösung

Mit dem Propagator $P(t) = \exp(At)$ können wir wieder auf die Stabilitätsanalyse zurückkommen. Für zeitunabhängiges A ist

$$\delta\vec{z}(t) = e^{At}\delta\vec{z}_0 \quad (3.10)$$

mit der Anfangsabweichung $\delta\vec{z}_0 = \delta\vec{z}(t=0)$. Mithilfe der Eigenvektoren \vec{a}_i der Matrix A (d.h. $A\vec{a}_i = \lambda_i\vec{a}_i$), die bei Diagonalisierbarkeit von A den \mathbb{C}^n aufspannen, können wir $\delta\vec{z}_0$ wie folgt darstellen:

$$\delta\vec{z}_0 = \sum_i c_i \vec{a}_i$$

Dabei ergeben sich die c_i aus den Anfangsbedingungen. Da $A^n\vec{a}_i = \lambda_i^n\vec{a}_i$ folgt aus Gl. (3.10)

$$\delta\vec{z}(t) = e^{At} \sum_i c_i \vec{a}_i = \sum_i c_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \vec{a}_i = \sum_i c_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_i^n \vec{a}_i = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \vec{a}_i$$

Im Beispiel des gedämpften harmonischen Oszillators finden wir mit $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}/\alpha$, $\dot{z}_1 = \alpha z_2$, $\dot{z}_2 = -\alpha z_1 - 2\beta z_2$ nach Gl. (3.9)

$$G(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \alpha z_2 \\ -\alpha z_1 - 2\beta z_2 \end{pmatrix} \implies A = (A_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_i}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$$

und mit den schon bekannten Eigenwerten λ_1, λ_2 (siehe Gl. (3.4))

$$\delta\vec{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{a}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{a}_2$$

Da A reell ist, sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 entweder beide reell oder beide komplex konjugiert, und wir können die Stabilität der Lösung $\vec{z}(t)$ anhand der sechs Fälle in Abb. 3.3 diskutieren:

- $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$: $|\delta\vec{z}(t)|$ wächst unbegrenzt; \vec{z} ist ein abstoßender Punkt (Repellor).
- $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$: für $c_1 \neq 0$ wächst die Abweichung $|\delta\vec{z}(t)|$, für $c_1 = 0$ verschwindet sie ($|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$); \vec{z} ist ein Sattelpunkt.
- $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$: $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$; \vec{z} ist ein anziehender Punkt (Attraktor).
- λ_1 und λ_2 imaginär ($\lambda_1 = \lambda_2^*$): $|\delta\vec{z}(t)|$ ist beschränkt; \vec{z} ist ein elliptischer Punkt.

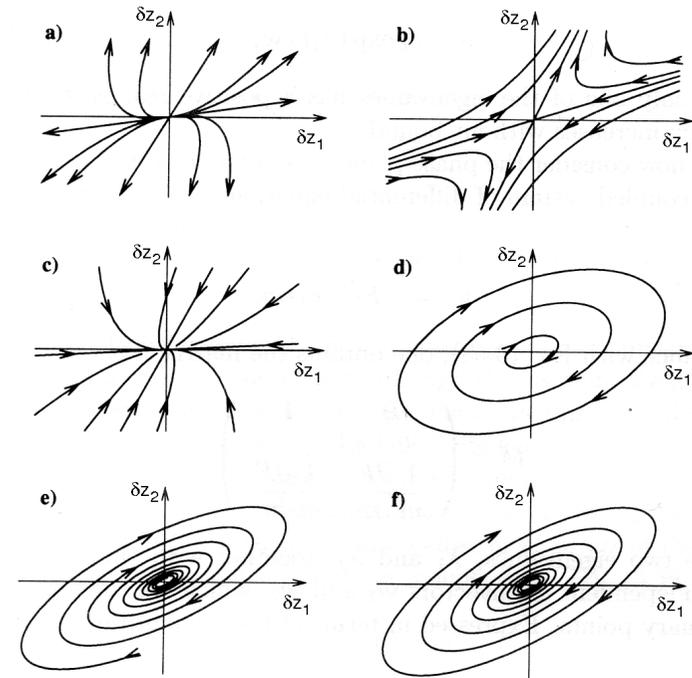


Abbildung 3.3: Zeitentwicklung der Abweichung $\delta\vec{z}(t)$ für verschiedene Werte der Eigenwerte λ_1, λ_2 .

e) λ_1 und λ_2 sind komplex konjugiert, $\text{Re } \lambda_i < 0$: $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow 0$; \vec{z} ist Attraktor eines Spiralfusses von $\delta\vec{z}(t)$.

f) λ_1 und λ_2 sind komplex konjugiert, $\text{Re } \lambda_i > 0$: $|\delta\vec{z}(t)| \rightarrow \infty$; \vec{z} ist Repellor eines Spiralfusses von $\delta\vec{z}(t)$.

3.3 Spektralzerlegung

Mit dem Ansatz $\vec{z}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$ ($\vec{a} \in \mathbb{C}^n$) findet man die Eigenschwingungen des autonomen Systems $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$. Die Lösungen des resultierenden Eigenwertproblems, $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$ (in \mathbb{C}^n) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ gegeben.

Falls die Eigenvektoren \vec{a}_i ($i = 1, \dots, n$) den ganzen \mathbb{C}^n aufspannen, dann ist

jede Lösung von $\dot{\vec{z}} = \mathbf{A}\vec{z}$ eine Linearkombination von Eigenschwingungen. Die Matrix \mathbf{A} heißt dann *diagonalisierbar*, da \mathbf{A} in einer Basis von Eigenvektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ diagonal ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \dots \lambda_n = \text{Eigenwerte}).$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn das charakteristische Polynom n verschiedene Wurzeln hat, also alle λ_i paarweise voneinander verschieden sind. Definieren wir nun einen Projektionsoperator P_λ (Matrix) als lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, die die Eigenvektoren zum Eigenwert λ invariant lässt und alle anderen annulliert:

$$P_\lambda \vec{a}_\mu = \begin{cases} \vec{a}_\lambda, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Dann hat die diagonalisierbare Matrix \mathbf{A} die *Spektralzerlegung*

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} \lambda P_\lambda \quad (3.11)$$

wobei $\sigma(\mathbf{A})$ die Menge der Eigenwerte von \mathbf{A} ist (trivial: $\mathbf{A}\vec{a}_\lambda = \lambda\vec{a}_\lambda$). Die Projektionsoperatoren P_λ haben folgende Eigenschaften:

$$P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda, \quad \mathbf{A}P_\lambda = P_\lambda \mathbf{A} = \lambda P_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \sigma} P_\lambda = \mathbf{1}. \quad (3.12)$$

Beispiel

Eine 3×3 Matrix hat die diagonale Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + \lambda_3 P_{\lambda_3}$$

mit den Projektoren

$$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anhand dieses Beispiels kann man die allgemeinen Eigenschaften von Gl. (3.12) leicht verifizieren.

Gedämpfter harmonischer Oszillator

Im Falle des gedämpften harmonischen Oszillators sind die Eigenvektoren $\vec{a}_i = (1, \lambda_i/\alpha)$, ($i = 1, 2$) linear unabhängig, solange $\lambda_1 \neq \lambda_2$, also für $\alpha \neq \beta$. In diesem Fall hat die Lösung die Form

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei sich $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ durch die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ und $\dot{\mathbf{x}}(0)$ ausdrücken lassen (vergl. (3.6)).

Für $\alpha = \beta$ fallen nicht nur die beiden Eigenwerte zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2$, sondern nach (3.5) auch die Eigenvektoren, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$, und \mathbf{A} ist nicht mehr diagonalisierbar. Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ lässt sich dennoch durch den Grenzübergang $\tilde{\omega} \rightarrow 0$ gewinnen:

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{\alpha=\beta} = \mathbf{x}(0) (1 + \beta t) e^{-\beta t} + \dot{\mathbf{x}}(0) t e^{-\beta t}$$

Dissipation

Allgemein gilt für den Dämpfungsexponenten $\text{Re } \lambda$

$$\text{Re } \lambda = \begin{cases} -\beta, & 0 \leq \beta \leq \alpha \\ -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \beta > \alpha \geq 0 \end{cases}$$

also immer $\text{Re } \lambda \leq 0$. Die Ursache für die Dämpfung ist der dissipative Term $-\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}$ in der Differentialgleichung, dessen Leistung stets negativ ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{f}{2} \mathbf{x}^2 \right) &= m \dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} + f \mathbf{x} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} (-f \mathbf{x} - \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}) + f \mathbf{x} \dot{\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Die Energie $\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{f}{2} \mathbf{x}^2$ ist also nicht erhalten, sie nimmt kontinuierlich ab, sie wird *dissipiert*. (In Wirklichkeit geht die Energie nicht verloren, sie wird nur auf ein anderes System übertragen, das in der Beschreibung (3.7) nicht mitgenommen wurde.) Allgemein heißt ein System $\dot{\vec{z}} = \mathbf{A}\vec{z}$ *dissipativ* falls es eine positiv definite quadratische Form (\vec{z}, \vec{z}) gibt, die nie zunehmen kann:

$$\frac{d}{dt} (\vec{z}, \vec{z}) = (\mathbf{A}\vec{z}, \vec{z}) + (\vec{z}, \mathbf{A}\vec{z}) \leq 0, \quad (3.13)$$

für alle \vec{z} . Dies schließt unbeschränkt wachsende Lösungen aus, also muss $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ sein, für alle $\lambda \in \sigma$. In diesem Fall ist die Lösung $\mathbf{x}^0(\mathbf{t})$, um welche die ursprüngliche Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ linearisiert wurde, stabil. In der Sprache der Stabilitätsanalyse bezeichnet man λ auch als *Liapunov-Exponenten*.

Falls (\vec{z}, \vec{z}) sogar eine Erhaltungsgröße ist, so ist $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}$ (in dieser Metrik) eine 1-parametrische Gruppe von Drehungen des \mathbb{R}^n . Nach (3.13) ist \mathbf{A} antisymmetrisch und daher (in \mathbb{C}^n) stets diagonalisierbar. Mit \mathbf{A} ist auch $-\mathbf{A}$ konservativ, also sind alle Eigenwerte rein imaginär.

3.4 Erzwungene Schwingungen

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\vec{z}(\mathbf{t}) + \vec{\mathbf{b}}(\mathbf{t})$$

ist durch die Duhamel-Formel

$$\vec{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{s})\vec{z}(\mathbf{s}) + \int_{\mathbf{s}}^{\mathbf{t}} d\tau \mathbf{P}(\mathbf{t}, \tau) \vec{\mathbf{b}}(\tau) \quad (3.14)$$

gegeben, wobei $\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ der Propagator des homogenen Systems ist. Für eine harmonische Anregung

$$\vec{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}} \quad (\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^n)$$

erhält man als Lösung

$$\vec{z}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{\mathbf{a}}(\omega)] + e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega), \quad (3.15)$$

mit (Achtung: Reihenfolge der Matrizen!)

$$\vec{\mathbf{a}}(\omega) = (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \vec{\mathbf{b}}.$$

Die Größe $i\omega - \mathbf{A}$ ist eine Matrix und sollte als $i\omega \mathbf{1} - \mathbf{A}$ gelesen werden. Die Invertierbarkeit von $i\omega - \mathbf{A}$ setzt $i\omega \notin \sigma(\mathbf{A})$ voraus. Man kann Gl. (3.15) entweder aus der Duhamel-Formel gewinnen oder direkt verifizieren, was wir nun machen wollen. Die Anfangsbedingung $\vec{z}(\mathbf{t} = 0) = \vec{z}(0)$ ist offensichtlich von Gl. (3.15) erfüllt. Ferner gilt

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{\mathbf{a}}(\omega)] + i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A} \underbrace{(e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} [\vec{z}(0) - \vec{\mathbf{a}}(\omega)] + e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega))}_{=\vec{z}(\mathbf{t})} + \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}} \\ &\quad + \underbrace{(i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega) - \mathbf{A} e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega) - \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}})}_{=0} \\ &= \mathbf{A} \vec{z}(\mathbf{t}) + \vec{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

mit $\vec{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}}$ (nach Voraussetzung) da der Term

$$\begin{aligned} i\omega e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega) - \mathbf{A} e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega) - \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}} &= e^{i\omega \mathbf{t}} (i\omega - \mathbf{A}) \vec{\mathbf{a}}(\omega) - \vec{\mathbf{b}} e^{i\omega \mathbf{t}} \\ &= e^{i\omega \mathbf{t}} [(i\omega - \mathbf{A}) (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}] = e^{i\omega \mathbf{t}} [\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}] = 0 \end{aligned}$$

verschwindet.

Beispiel

Für den gedämpften harmonischen Oszillator ist

$$\begin{aligned} i\omega - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} i\omega & -\alpha \\ \alpha & i\omega + 2\beta \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{i\omega - \mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \frac{1}{i\omega(i\omega + 2\beta) + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Für $\beta > 0$ verschwindet der erste Term in (3.15) für große Zeiten ($\mathbf{t} \rightarrow \infty$, Einschwingvorgang) und es bleibt nur die erzwungene Schwingung übrig. Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{z}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t} \rightarrow \infty}^{\beta > 0} &= e^{i\omega \mathbf{t}} \vec{\mathbf{a}}(\omega) = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{1}{i\omega - \mathbf{A}} \vec{\mathbf{b}}, \\ \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{t}) \\ z_2(\mathbf{t}) \end{pmatrix} &= \frac{e^{i\omega \mathbf{t}}}{i\omega(i\omega + 2\beta) + \alpha^2} \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also, z.B. für $b_2 = 0$ (keine Kopplung der treibenden Kraft an \dot{x}/α , nur an den Ort)

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \alpha^2} b_1 = e^{i\omega \mathbf{t}} \frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} b_1.$$

Dabei ist (wie erwartet) $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ für $\alpha > \beta$, es gibt also *Resonanzen* für $\omega = \pm \tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, da bei schwacher Dämpfung β für diese Anregungsfrequenzen ω die Amplitude von $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ sehr groß werden kann.

Resonanzen

Allgemein (also nicht nur für den eindimensionalen Oszillator) gilt: Wenn \mathbf{A} strikt dissipativ ist, also $\text{Re } \lambda < 0$, für alle Eigenwerte λ , so ist der erste Term in (3.15) exponentiell abklingend und nach dem *Einschwingvorgang* bleibt für $t \rightarrow \infty$ nur noch die erzwungene Schwingung

$$\mathbf{z}(t) = e^{i\omega t} \vec{\mathbf{a}}(\omega)$$

übrig. Der Frequenzverlauf der Amplitude $\vec{\mathbf{a}}(\omega)$ zeigt typische Resonanzen. Falls \mathbf{A} diagonalisierbar ist, so ist nach Gl. (3.11)

$$(i\omega - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{\mathbf{P}_\lambda}{i\omega - \lambda},$$

denn $i\omega - \mathbf{A} = i\omega \mathbf{1} - \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} \lambda \mathbf{P}_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} (i\omega - \lambda) \mathbf{P}_\lambda$, d.h. $i\omega - \lambda$ sind die Eigenwerte von $i\omega - \mathbf{A}$, und die Eigenwerte eines Matrixinversen sind die Inversen der Eigenwerte. Es gilt

$$(i\omega - \mathbf{A})^{-1} (i\omega - \mathbf{A}) = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{\mathbf{P}_\lambda (i\omega - \lambda)}{i\omega - \lambda} = \sum_{\lambda \in \sigma} \mathbf{P}_\lambda = \mathbf{1}.$$

Für Anregungsfrequenzen $i\omega$ nahe einer Resonanz λ_0 dominiert der entsprechende Term und die erzwungene Schwingung wird durch die Anregung einer einzigen Eigenmode dominiert:

$$\mathbf{z}(t) \Big|_{\omega \approx \lambda_0} = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - \lambda_0} \mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}} \equiv \frac{1}{\gamma} e^{i(\omega t - \delta)} \mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}}.$$

Hier haben wir komplexe Größe $i\omega - \lambda_0 \equiv \gamma e^{i\delta}$ in Polarkoordinaten geschrieben. Für die Phase δ und die Amplitude $1/\gamma$ findet man für den Fall einer schwach gedämpften Schwingung, $\lambda_0 = -\beta + i\tilde{\omega}$,

$$\frac{1}{i\omega - \lambda_0} = \frac{1}{i(\omega - \tilde{\omega}) + \beta} = \frac{-i(\omega - \tilde{\omega}) + \beta}{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2} = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2}},$$

also

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{(\omega - \tilde{\omega})^2 + \beta^2}; \quad \delta = \arctan \frac{\omega - \tilde{\omega}}{\beta}.$$

Aus der Breite der Resonanz kann man also die Zerfallskonstante β der resonanten Eigenschwingung entnehmen. Für einen rein imaginären Eigenwert, $\lambda_0 = i\tilde{\omega}$ divergiert $\vec{\mathbf{a}}(\omega)$. Natürlich kann es vorkommen, dass $\mathbf{P}_{\lambda_0} \vec{\mathbf{b}} = 0$ ist, dann ist diese Resonanz nicht durch die äußere Störung $e^{i\omega t} \vec{\mathbf{b}}$ anregbar.

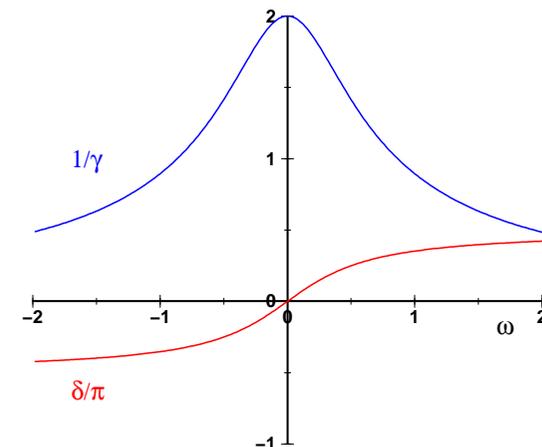


Abbildung 3.4: Verlauf der Amplitude $1/\gamma$ und der Phase δ durch die Resonanz $\tilde{\omega} = 0$ einer erzwungenen Schwingung (mit $\beta = 0.5$).

3.5 Fourierzerlegung

Wir betrachten eine lineare Kette von N Massenpunkten, je mit Masse m , die durch Federn mit der Federkonstante f verbunden sind. Die Auslenkungen aus den Ruhelagen der Massenpunkte bezeichnen wir mit $x_0(t) \dots x_{N-1}(t)$. Die Kette soll sich schließen, also $x_0(t) \equiv x_{N-1}(t)$.

Die Bewegungsgleichungen lauten für $n = 0 \dots (N-1)$

$$m\ddot{x}_n = f(x_{n+1} - x_n) + f(x_{n-1} - x_n) = f(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n). \quad (3.16)$$

Wir finden als Lösung laufende Wellen der Form

$$x_n(t) = e^{i\omega t} e^{-ikn}. \quad (3.17)$$

Wegen der Randbedingung sind nicht alle Werte für den Wellenvektor k zu-

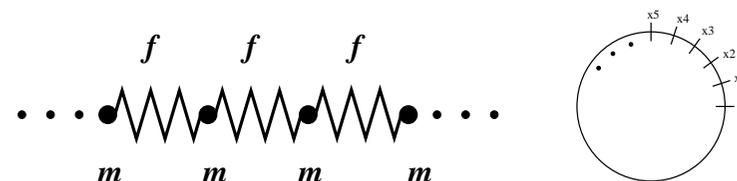


Abbildung 3.5: Illustration einer Kette von Massenpunkten m , die untereinander mit Federn der Federkonstante f verbunden sind. Die unendlich lange Kette kann man sich auch als Ring mit periodischen Randbedingungen vorstellen.

eine Darstellung der Dirac'schen Delta-Funktion. Da alle N Eigenvektoren $\vec{x}(\mathbf{k})$ orthogonal sind, sind sie auch vollständig, bilden also im \mathbb{C}^N eine orthonormierte Basis. Somit lässt sich jeder Vektor $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$, d.h. eine beliebige Auslenkung der ganzen Kette von Massenpunkten, in dieser Basis darstellen, mit Entwicklungskoeffizienten $y_k \equiv y(\mathbf{k})$:

$$\vec{y} = \sum_{l=0}^{N-1} y_l \vec{x}(l), \quad k = \frac{2\pi}{N}l.$$

In Komponenten haben wir

$$y_n = \sum_{l=0}^{N-1} y_l x_n(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y\left(\frac{2\pi}{N}l\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}ln}$$

die Darstellung von y_n als (diskrete) *Fourierreihe*. Diese Fourierreihe kann man auch umdrehen und man findet mit der Darstellung (3.19) der Dirac'schen Deltafunktion

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Diese Überlegungen lassen sich auch auf schwingende Systeme verallgemeinern, die nicht aus diskreten Massepunkten sondern aus einem Kontinuum aufgebaut sind (schwingende Saite, Trommel, ...). Die entsprechenden Eigenschwingungen bilden dann wieder eine vollständige Basis.