

2. Das 2-Körperproblem

2.1 Transformation auf Relativkoordinaten

Die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte sind

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

und

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Wir führen die Relativkoordinate $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ein (siehe Fig. 2.1) und beachten

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}.$$

Wir subtrahieren die beiden Bewegungsgleichungen und finden

$$\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left(-\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \right) V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|),$$

und damit

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{M}{m_1 m_2}, \quad (2.1)$$

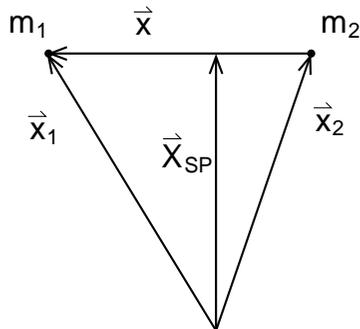


Abbildung 2.1:
Zusammenhang zwischen Koordinaten der Massenpunkte, Relativ- und Schwerpunktkoordinate.

wobei μ die reduzierte Masse und $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. Gl. (2.1) entspricht der Bewegung eines Teilchens der Masse μ im Potential V . Mit der Schwerpunktskoordinate $\vec{X} = (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2)/M$ gilt

$$\vec{X} = \frac{m_1}{M} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M} (\vec{x} + \vec{x}_2) + \frac{m_2}{M} \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{x} + \vec{x}_2 \quad (2.2)$$

$$\vec{X} = \frac{m_1}{M} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{M} (\vec{x}_1 - \vec{x}) = \vec{x}_1 - \frac{m_2}{M} \vec{x} \quad (2.3)$$

und es ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M} \vec{x}, \quad \vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M} \vec{x}.$$

Drehimpulserhaltung

Ohne äußeres Drehmoment \vec{M} ist nach Kap. (1.7) der Gesamtdrehimpuls erhalten und via

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} [\vec{X} \times \vec{P} + \vec{L}_{\text{rel}}] = 0$$

auch der relativ-Anteil \vec{L}_{rel} , da wir o.B.d.A. den Gesamtimpuls \vec{P} zu Null setzen können. Die Schwerpunktskoordinate \vec{X} ist auch erhalten, denn $\vec{P} = M\dot{\vec{X}}$, und damit $\dot{\vec{X}} = 0 \Rightarrow \vec{X} = \vec{X}_0$. O.b.d.A. setzen wir auch $\vec{X} = 0$. Damit werden die Transformationsgleichungen zu

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{x}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{x} \quad (2.4)$$

und der Relativ-Anteil \vec{L}_{rel} zu

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \sum_{i=1,2} m_i (\vec{x}_i - \vec{X}) \times \dot{\vec{x}}_i = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

und mit Gl. (2.4)

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \left[m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 + m_2 \left(-\frac{m_1}{M} \right)^2 \right] \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \underbrace{(m_1 + m_2)}_M \frac{m_1 m_2}{M^2} \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

oder, mit Gl. (2.1),

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{\mu} \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \mu (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}). \quad (2.5)$$

Energieerhaltung

Die Gesamtenergie $T + V$ ist ohne äußere Kräfte erhalten. Nach Kap. 1.7 setzt sich die kinetische Energie $T = T_{\text{SP}} + T_{\text{rel}}$ aus einem Schwerpunktsanteil, T_{SP} , und einem relativ-Anteil, T_{rel} , zusammen. Wegen $\dot{\vec{X}} = 0$ verschwindet $T_{\text{SP}} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2$ und somit ist $T_{\text{rel}} + V$ erhalten. T_{rel} hat die Form

$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2$$

und mit Gl. (2.4)

$$T_{\text{rel}} = \underbrace{\left[\frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(-\frac{m_1}{M} \right)^2 \right]}_{\mu/2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2$$

wie schon zuvor. Die Energieerhaltung hat also die Form

$$T_{\text{rel}} + V = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) \quad (2.6)$$

2.2 Allgemeines Potential

Da \vec{L}_{rel} erhalten ist und $\vec{x} \cdot \vec{L}_{\text{rel}} = \mu \vec{x} (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = 0$ gilt, folgt damit, dass die Bahn $\vec{x}(t)$ in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}_{\text{rel}} \equiv (0, 0, l)$ verläuft. Wir führen ebene Polarkoordinaten (r, φ) ein (siehe Fig. 2.2):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Wir bestimmen die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right|} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet man auch leicht $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_3$. Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten lautet dann

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

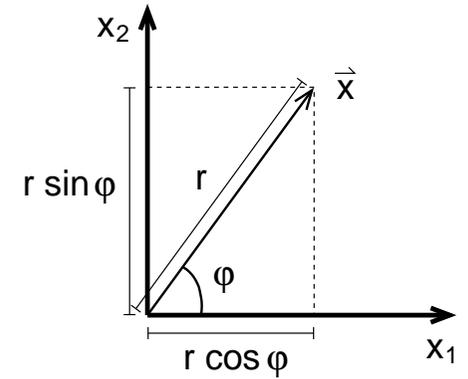


Abbildung 2.2:
Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten.

Wir können die Erhaltungsgrößen l und $E = T_{\text{rel}} + V$ zur Bestimmung der Bahnkurve $\varphi(r)$ und des zeitlichen Durchlaufs $t(r)$ benutzen.

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) = \mu r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = \mu r \dot{\varphi} (\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=0} + \mu r^2 \dot{\varphi} \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_3})$$

und damit

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3.$$

Mit

$$\dot{\vec{x}}^2 = (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

werden Gl. (2.5) und Gl. (2.6) zu

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (2.8)$$

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U(r), \quad (2.9)$$

wobei

$$U(r) \equiv \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

Die Größe $l^2/(2\mu r^2)$ heißt Zentrifugalpotential, und da sie nur von r abhängt, wird sie formal dem Potentialterm zugeschlagen, obgleich sie aus der kinetischen Energie hervorgegangen ist. Da l eine Erhaltungsgröße ist, haben wir also schon $\dot{\varphi}$ eliminiert. Aus Gl. (2.9) folgt

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}. \quad (2.10)$$

Wir integrieren diese Gleichung durch Separation der Variablen und erhalten den zeitlichen Durchlauf als Funktion der Erhaltungsgrößen E und l und der

Anfangsbedingung $t(r_0)$:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r'))}} = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt' = t(r) - t(r_0). \quad (2.11)$$

Sobald wir ein bestimmtes $U(r)$ gegeben haben, können wir das Integral auf der linken Seite von dieser Gleichung lösen; auch falls wir nicht explizit nach $r(t)$ auflösen können, gibt diese Gleichung dann implizit den Verlauf des Abstandes r als Funktion der Zeit an.

Weiterhin verwenden wir (2.8) in der Form $\dot{\varphi} = l/(\mu r^2)$. Zusammen mit Gl. (2.10) ergibt dies

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}}. \quad (2.12)$$

Nun können wir die Bahnkurve $\varphi(r)$ direkt aus den Erhaltungsgrößen E und l und der Anfangsbedingung $t(r_0)$ berechnen:

$$\int_{r_0}^r \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}} = \varphi(r) - \varphi(r_0). \quad (2.13)$$

Wir bemerken also, dass wir zur Lösung des 2-Körperproblems nicht die Differentialgleichung (2.1) zu lösen brauchten, da wir die Konstanten der Bewegung kennen. An einem Beispiel für $U(r)$ illustrieren wir die möglichen Bewegungstypen (siehe Abb. 2.3).

Im "Phasenraum" mit den Koordinaten r, \dot{r} ist die radiale Bewegung für 4 verschiedene Energien dargestellt. Es gibt 2 Typen: Gebundene (finite) Bahnen und Streubahnen (infinite Bahnen).

Symmetrie der Bahnen

Die Wurzel in Gl. (2.10) wechselt bei r_{\min} (und bei finiten Bahnen auch bei r_{\max}) ihr Vorzeichen, denn nachdem r monoton auf r_{\min} abgefallen ist, muss \dot{r} das Vorzeichen wechseln, bevor r wieder wachsen kann.

Wenn man den Wert $\varphi = 0$ dem Perihel P zuordnet, dann unterscheiden sich in Gl. (2.13) Punkte mit gleichen r -Werten in der Nähe von P nur durch das Vorzeichen von φ , nicht im Betrag von φ . Damit hat die Bahn die Symmetrieachse SP (S steht für das Zentrum). Mit demselben Argument findet man die zweite Symmetrieachse SA vom Zentrum S zum Aphel A (siehe Abb. 2.4). Damit kann man die ganze Bahn aus einem Abschnitt $A \rightarrow P$ konstruieren (im Fall infiniter Bahnen aus der halben Bahn $\infty \rightarrow P$).

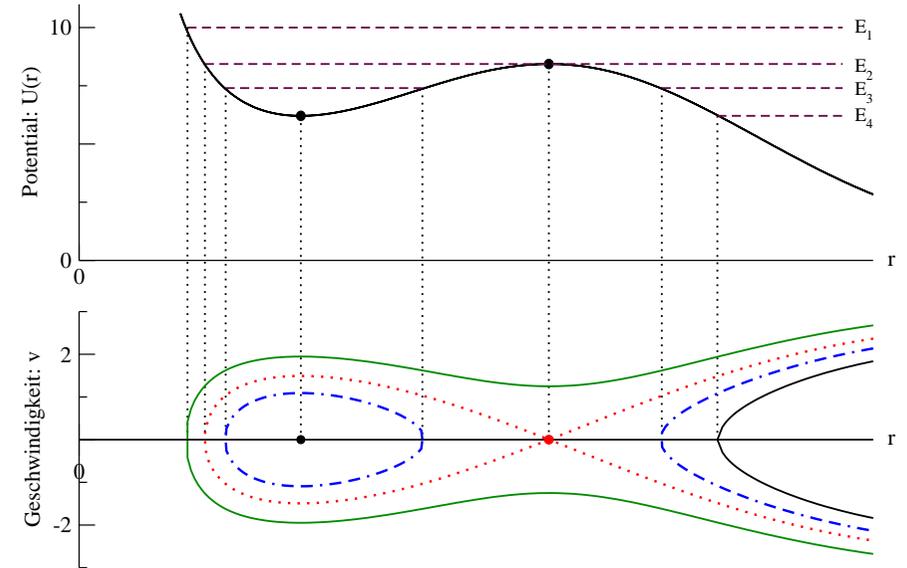


Abbildung 2.3: Streu- und gebundene Bahnen für ein allgemeines abstoßendes Potential $U(r) = l^2/(2\mu r^2) + V(r)$.

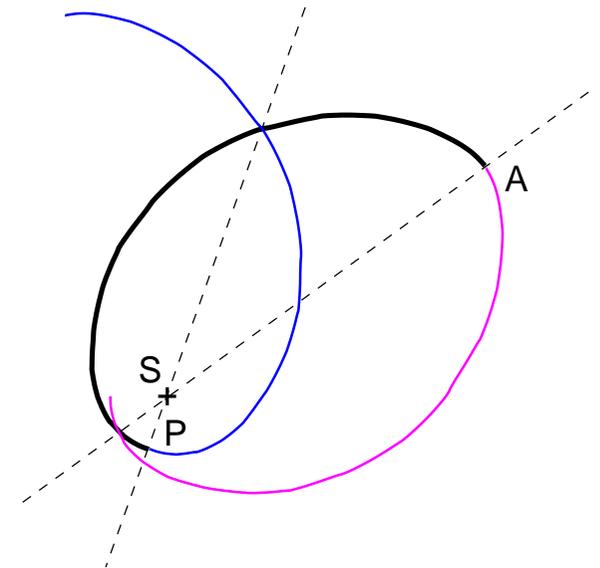


Abbildung 2.4: Symmetrie der finiten Bahnkurven mit dem Zentrum S : Bahnabschnitt von Aphel A zu Perihel P hat die Symmetrieachsen SA und SP .

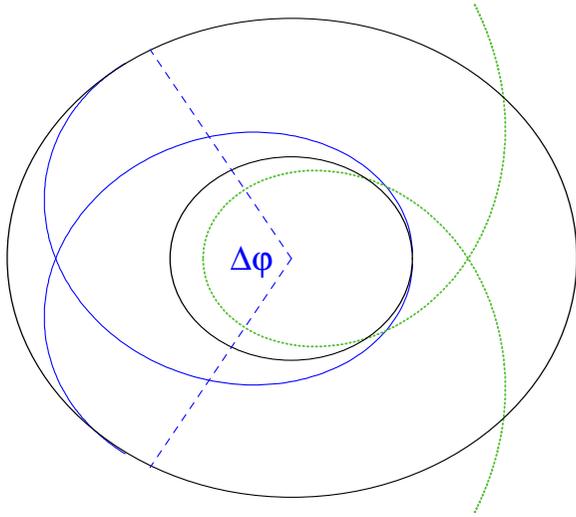


Abbildung 2.5: Bahn im Ortsraum für das Potential aus der Abbildung 2.3, und mit den Energien E_1 und E_3 und der Periheldrehung $\Delta\varphi$.

2.3 Gebundene Bahnen

Hier ist $\mathbf{r}(t)$ periodisch, mit der Periode (siehe (2.11))

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.14)$$

Aus dem Sonnensystem stammen die Bezeichnungen Perihel für den Punkt mit r_{\min} in größter Sonnennähe sowie Aphel mit r_{\max} in größter Sonnenferne. In einer Periode nimmt dabei der Winkel φ um den Betrag (siehe (2.13))

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.15)$$

zu (Periheldrehung). So ergibt sich im allgemeinen eine "Rosettenbahn" im Ring $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, die sich nur für rationale Verhältnisse von $\Delta\varphi/(2\pi)$ schließt. Sei z.B. $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, dann hat $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit nT m ganze Durchläufe ausgeführt und ist wieder am Anfangswert; die Kurve schließt sich. Für das Kepler-Problem ist $\Delta\varphi = 0$, relativistische Korrekturen ergeben jedoch eine Periheldrehung (Gemessen wird für den Merkur ein $\Delta\varphi$ von $40''$ pro Jahrhundert).

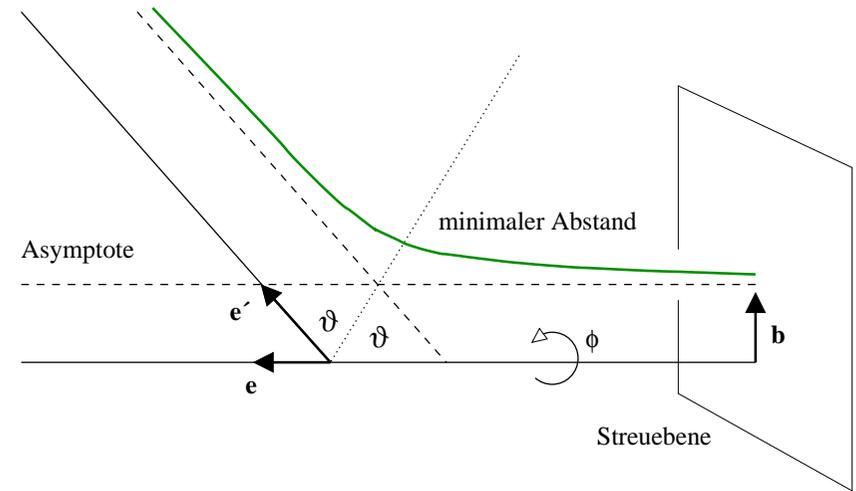


Abbildung 2.6: Die Geometrie des Streuproblems.

2.4 Streubahnen

Für $l = 0$ kreuzen sich die Bahnen der Massenpunkte. Voraussetzung für die Existenz von Streubahnen ist somit $l \neq 0$ sowie $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) < \infty$. Nehmen wir $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ an. Dann gibt es Streubahnen nur für $E \geq 0$. Für große r ist das Potential so schwach, dass die Bahn geradlinig wird. Es existieren also Asymptoten für $t \rightarrow \pm\infty$:

Zum Charakterisieren des Stoßes benutzen wir die erhaltene Gesamtenergie E , die Einfallsrichtung $\vec{e} \parallel \dot{\vec{x}}(t = -\infty)$ und den "Zielfehler" $\vec{b} \perp \vec{e}$. $|\vec{b}|$ heißt Stoßparameter. Für $t \rightarrow -\infty$ ist $E \rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2$ und

$$l = \mu |\vec{b}| |\dot{\vec{x}}| = \mu b \sqrt{\frac{2E}{\mu}} = b \sqrt{2\mu E}. \quad (2.16)$$

So bestimmen $\vec{b} = |\vec{b}|$ und E den Drehimpuls l und den Streuwinkel χ via $\chi = \pi - 2\vartheta$:

$$\vartheta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (2.17)$$

(Der Winkel φ von Gl. (2.13) ist hier in die für Streuprobleme übliche Bezeichnung ϑ umbenannt). Bei fester "Einfallsenergie" E und Einfallsrichtung \vec{e} entspricht jedem Punkt \vec{b} in der Stoßparameterenebene $P \perp \vec{e}$ ein Punkt \vec{e}'

auf der Einheitskugel. Die Dynamik definiert also eine Abbildung

$$\vec{b} \longrightarrow \hat{e}'(\vec{b}).$$

Unter dieser Abbildung geht ein Flächenelement $d\sigma = \mathbf{b} \, d\mathbf{b} \, d\phi$ von \mathbf{P} (hier ist ϕ der ebene Winkel in \mathbf{P}) in ein Raumwinkelement $d\Omega = \sin\chi \, d\chi \, d\phi$ (in Kugelkoordinaten) über. Als differentiellen Wirkungsquerschnitt (oder Streuquerschnitt) (siehe Kern-/Teilchenphysik) definiert man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\mathbf{b} \, d\mathbf{b}}{\sin\chi \, d\chi} \right| = \left| \frac{\mathbf{b}}{\sin\chi} \left(\frac{d\chi}{d\mathbf{b}} \right)^{-1} \right|, \quad (2.18)$$

wobei $\chi(\mathbf{b})$ durch (2.16) und (2.17) gegeben ist. Betrachtet man viele Stöße mit festem E und \hat{e} , deren Stoßparameter \vec{b} die Ebene \mathbf{P} mit einer Dichte ρ bedecken, so ist $\rho \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ die Zahl der Stöße mit $\hat{e}' \in d\Omega$. In Worten ist der Wirkungsquerschnitt σ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwischen einfallenden Teilchen und Target eine Wechselwirkung stattfindet; der differentielle Wirkungsquerschnitt ist die Wahrscheinlichkeit für die Streuung in eine bestimmte Raumrichtung.

2.5 Das Keplerproblem

Newton hat 1665 aus Keplers 3. Gesetz ($T^2 \propto a^3$, T Umlaufzeiten, a große Ellipsenhalbachsen) geschlossen, dass die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern invers proportional zu ihrem Abstand ist:

$$|\vec{F}| = \frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}$$

wobei m_1 und m_2 z.B. die Massen von Sonne und Erde sind. Dem entspricht das Potential

$$V(\vec{x}) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{x}|}$$

mit der universellen Gravitationskonstante $\gamma = (6.674 \pm 0.004) 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{g s}^2)$. Bemerkenswerterweise sind diese sogenannten schweren Massen m_1 und m_2 dieselben, die in der Impulsänderung auftauchen (die sogenannten trägen Massen):

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

(γ ist universell und daher keine Proportionalitätskonstante). Experimentell ist die Äquivalenz von schwerer und träger Masse seit Newton immer wieder bestätigt worden.

Die reduzierte Masse μ ist $\mu = m_1 m_2 / M$; daher können wir das Gravitationsgesetz auch als

$$V(\vec{x}) = -\frac{\gamma \mu M}{|\vec{x}|}$$

schreiben. Wenn man nur die Relativbewegung betrachtet, kann man dies als Wirkung eines externen Potentials auffassen, das auf die reduzierte Masse μ wirkt:

$$V(\vec{x}) = -\kappa \frac{\mu}{|\vec{x}|}, \quad \kappa = \gamma M$$

Das Keplerproblem besteht also in der Beschreibung der Bewegung eines Teilchen in einem $1/r$ -Potential (wie in Kap. 2.2 arbeiten wir in ebenen Polarkoordinaten mit $|\vec{x}| = r$):

$$V(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} = -\frac{\gamma \mu M}{r}$$

Als Variable benutzen wir $s = 1/r$ und suchen die Bahngleichung $r = r(\varphi)$ in der Form $s = s(\varphi)$. Wir finden aus Gl. (2.12)

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{r^2}{l} \sqrt{2\mu(E - U(r))}.$$

Mit dem effektiven Potential

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

haben wir

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} s - s^2} \equiv -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)}, \quad (2.19)$$

wobei wir mit $s_1 \leq s_2$ die beiden Nullstellen des Radikanden bezeichnet haben. Wegen $(s_2 - s)(s - s_1) = -s_1 s_2 + (s_1 + s_2)s - s^2$ ergibt der Koeffizientenvergleich

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{\gamma\mu^2 M}{l^2}; \quad \frac{s_1 s_2}{2} = -\frac{\mu E}{l^2}.$$

Wir können die Nullstellen auch direkt ermitteln:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[-\frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} \pm \sqrt{\frac{4\gamma^2\mu^4 M^2}{l^4} + \frac{8\mu E}{l^2}} \right] = \frac{2\gamma\mu^2 M}{l^2} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\gamma^2\mu^3 M^2}} \right]$$

Wir stellen fest, dass wir reelle Lösungen für $ds/d\varphi$ nur für $s_1 \leq s \leq s_2$ haben. Somit können wir s durch einen Winkel β darstellen:

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta. \quad (2.20)$$

Mittelwert $(s_1 + s_2)/2$ und Amplitude $(s_2 - s_1)/2$ dieses Ansatzes sind so gewählt, dass der erlaubte Bereich $s_1 \leq s \leq s_2$ genau eingehalten ist. Aus dem Ansatz folgt für den Zusammenhang zwischen s und φ

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \frac{d\beta}{d\varphi} \quad (2.21)$$

Einsetzen des Ansatzes in Gl. (2.19) ergibt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)} \\ &= -\sqrt{\left(\frac{s_2 - s_1}{2} - \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta\right)\left(\frac{s_2 - s_1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2} \cos \beta\right)} \\ &= -\frac{s_2 - s_1}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Also haben wir durch Vergleich von Gl. (2.21) und (2.22)

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta \frac{d\beta}{d\varphi} = -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin \beta.$$

Daraus folgt $d\beta/d\varphi = 1$ oder $\beta = \varphi - \varphi_0$ (d.h. β und φ sind bis auf eine Konstante gleich). Damit wird (2.20) zur Bahngleichung,

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} \left(1 + \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \cos \varphi\right) \equiv \frac{1}{d} (1 + \epsilon \cos \varphi),$$

und wir brauchen nur noch einzusetzen (mit $s = 1/r$):

$$r(\varphi) = \frac{d}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (2.23)$$

$$d = \frac{2}{s_1 + s_2} = \frac{l^2}{\gamma \mu^2 M},$$

$$\epsilon = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\gamma^2 \mu^3 M^2}} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \epsilon^2 = \frac{4s_1 s_2}{(s_1 + s_2)^2} = -E \frac{2l^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}.$$

(2.23) ist die Gleichung eines Kegelschnitts, mit einem der Brennpunkte in $r = 0$, und zwar für

$E < 0 \implies \epsilon < 1$: Ellipse
$E = 0 \implies \epsilon = 1$: Parabel
$E > 0 \implies \epsilon > 1$: Hyperbel

Ellipsen

Der erste Fall mit negativer Gesamtenergie $E < 0$, der zu gebundenen Bahnen führt, entspricht dem ersten Keplerschen Gesetz: Die Umlaufbahn eines Trabanten ist eine Ellipse; einer ihrer Brennpunkte liegt im Schwerpunkt des Systems.

Ellipsen sind definiert als Punktmenge $\{P \mid |\overline{F_1 P}| + |\overline{F_2 P}| = 2a\}$ mit Brennpunkten F_1, F_2 und großer Halbachse a (siehe Abb. 2.7).

Die große Halbachse a ergibt sich aus Perihelabstand r_{\min} und Aphelabstand r_{\max} , die bei $\cos \varphi = 1$ und $\cos \varphi = -1$ auftreten, zu $2a = d/(1 + \epsilon) + d/(1 - \epsilon)$ und damit $d = a(1 - \epsilon^2)$. Die numerische Exzentrizität ϵ ist durch $\epsilon = e/a$ mit der Exzentrizität e verknüpft. Für die kleine Halbachse b liest man aus der Figur $b^2 = a^2 - e^2$ ab, und damit ist $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \sqrt{a}\sqrt{d}$.

Die Umlaufzeit T ergibt sich durch Integration aus (2.14) oder aus dem Flächensatz: Die Änderung der Fläche F unter einer Kurve $r(\varphi)$ ist $dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Somit ist mit Gl. (2.8) $\dot{\varphi} = l/(\mu r^2)$ die Flächengeschwindigkeit \dot{F}

$$\dot{F} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{l}{2\mu}$$

konstant, im Einklang mit dem zweiten Keplerschen Gesetz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl (d.h. die Linie Trabant-Schwerpunkt) gleiche Flächen.

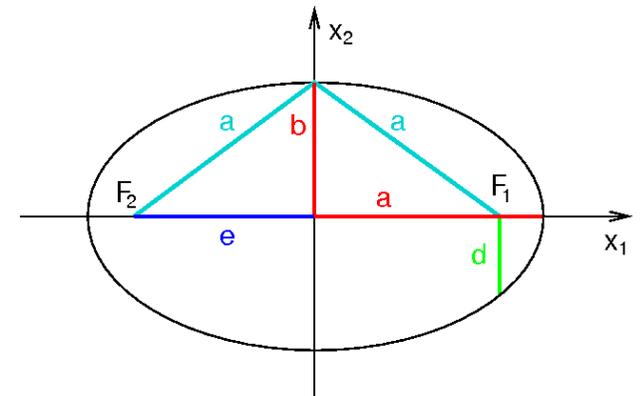


Abbildung 2.7:

Die Geometrie einer Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 , großen und kleinen Halbachsen a und b , Halbparameter d und Exzentrizität e .

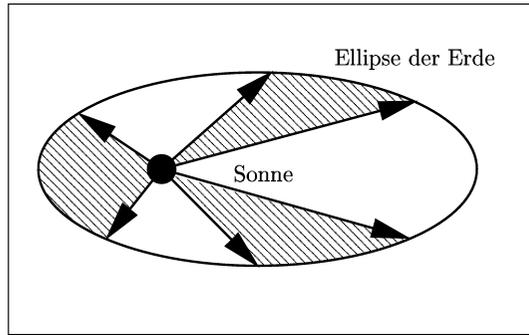


Abbildung 2.8: Der Keplersche Flächensatz unter Berücksichtigung des Massenverhältnisses 333000 : 1 von Sonne zu Erde (Sonne im Brennpunkt der Ellipse).

Die Gesamtfläche πab der Ellipse ist durch

$$\pi ab = \dot{F}T = \frac{l}{2\mu}T$$

gegeben, und die Umlaufzeit T somit durch

$$T = \frac{2\pi ab\mu}{l}.$$

Verwenden wir nun noch, dass $ab = d^{1/2}a^{3/2}$, dann haben wir mit dem Ausdruck für $d = l^2/\gamma\mu^2M$ (siehe Gl. (2.23))

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}\mu}{l} \frac{l}{\mu\sqrt{\gamma M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{3/2},$$

das dritte Keplersche Gesetz hergeleitet: Die Quadrate der Umlaufzeiten je zweier Trabanten um ein gemeinsames Zentrum sind proportional zu den dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen: $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$.

Bislang haben wir die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ betrachtet, aber wir können mit Gl. (2.4) zurücktransformieren:

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{x}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{x}$$

Wir sehen, daß beide Massenpunkte m_1 und m_2 Ellipsen folgen mit einem geteilten Brennpunkt (siehe Abb. 2.9). Die Größen der Ellipsen entsprechen den Massenverhältnissen. Die Relativkoordinate beschreibt ebenfalls eine Ellipse.

Wenn eine der beiden Massen viel größer ist als die andere ($m_1 \gg m_2$), dann gilt $M \approx m_1$, $\mu \approx m_2$. Die Position von m_1 ist dann fest im Schwerpunkt des Systems: $\vec{x}_1 \approx 0$, $\vec{x}_2 \approx -\vec{x}$.

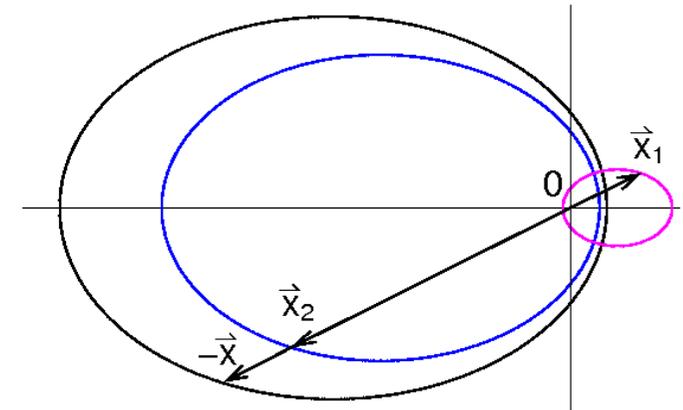


Abbildung 2.9: Zusammenhang zwischen den Ellipsen $\vec{x}_1(\varphi)$, $\vec{x}_2(\varphi)$ und $\vec{x}(\varphi)$ im 2-Körpersystem.

Wie gut diese Näherung im Sonnensystem ist, kann man aus den Daten in Tabelle 2.1 ablesen. Die mittlere Bewegung der Sonne durch die Erde ist

$$\begin{aligned} \langle |\vec{x}_1| \rangle &= \frac{m_2}{M} \langle |\vec{x}| \rangle = \frac{1}{1+A} \langle |\vec{x}| \rangle \quad \text{mit } A = 333000 \\ \langle |\vec{x}_1| \rangle &= 453 \text{ km,} \end{aligned}$$

d.h. die Ellipse, die die Sonne wegen der Erde beschreibt, liegt tief in ihrem Inneren.

Parabel

Nach Gl. (2.23) ergeben Energien $E \geq 0$ infinite Bahnen. Den unendlichen Abstand zum Zentrum $r \rightarrow \infty$ erreicht man für Winkel φ_∞ mit

$$(1 + \epsilon \cos \varphi_\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{r} = 0 \implies \cos \varphi_\infty = -1/\epsilon. \quad (2.24)$$

	Masse $m[m_\oplus]$	Mittlerer Abstand $\langle \vec{x} \rangle [10^6 \text{ km}]$	num. Exzentrizität ϵ	Periode $T[\text{a}]$
Sonne	333000	-	-	-
Merkur	0.055	57.9	0.206	0.241
Venus	0.82	108.2	0.007	0.613
Erde	1	149.6	0.017	1.0004
Mars	0.11	227.9	0.093	1.881
Jupiter	317.8	779.3	0.049	11.862

Tabelle 2.1: Einige Daten aus dem Sonnensystem.

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 1$ (Parabel) ist $\cos \varphi_\infty = 1$, also $\varphi_\infty = \pm\pi$ und die Bahnkurve führt für $t \rightarrow \infty$ wieder in die Einfallsrichtung zurück.

Hyperbeln

Hyperbeln sind definiert als Punktmenge $\{P \mid |\overline{F_1P}| - |\overline{F_2P}| = 2a\}$ mit Brennpunkten F_1, F_2 und großer Halbachse a (siehe Abb. 2.10).

Wir charakterisieren die Hyperbelbahn durch den Stoßparameter b (den Abstand, in dem das Teilchen am Zentrum vorbeifliege, wenn es nicht abgelenkt würde) und den Winkel ϑ , um den es von der geraden Flugbahn abgelenkt wird (siehe Abb. 2.10). Wir ordnen dem Perihel r_{\min} den Winkel $\varphi(t=0) = 0$ zu.

Nach Abb. 2.10 ist dann $\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty)$, also $\vartheta/2 = \varphi_\infty - \pi/2$ und

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \left(\varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \varphi_\infty = \frac{1}{\epsilon} \quad (2.25)$$

wobei wir das Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ verwendet haben. Wie in Kap. 2.4 verwenden wir die Erhaltungsgrößen Energie

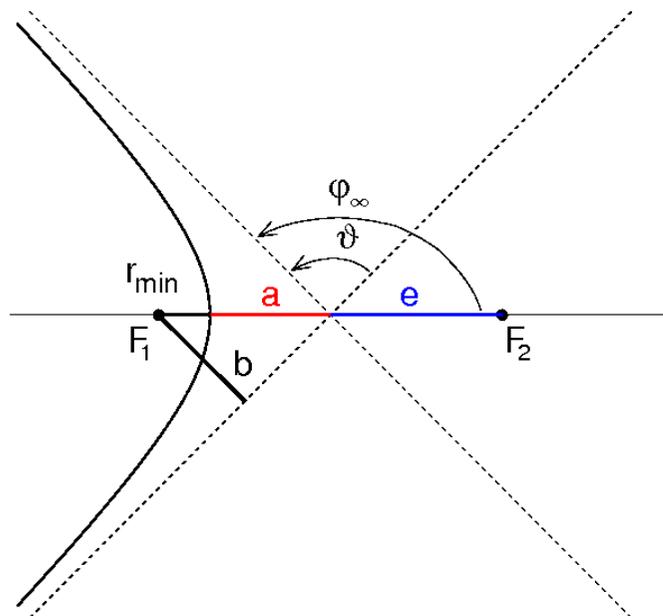


Abbildung 2.10: Hyperbolische Streubahn. b ist hier der Stoßparameter, nicht die imaginäre Halbachse.

und Drehimpuls:

$$E = \frac{\mu}{2} [\dot{\vec{x}}(t = -\infty)]^2 > 0 \implies \dot{\vec{x}}(t = -\infty) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$$

$$l = \mu |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \mu |\vec{x}(t = -\infty) \times \dot{\vec{x}}(t = -\infty)| = \mu b |\dot{\vec{x}}(t = -\infty)| = \mu b \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$$

Das ergibt den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Stoßparameter

$$l^2 = 2\mu E b^2 \quad (2.26)$$

Für den sonnennächsten Punkt gilt $\dot{r}(t=0) = 0$ und aus der Bahngleichung $r_{\min} = r(\varphi=0) = d/(1+\epsilon)$ und damit für die (erhaltene) Gesamtenergie

$$E = \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{\gamma\mu M}{r_{\min}} = \gamma\mu M \left(\frac{d}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right)$$

Mit der Beziehung $d = l^2/(\gamma\mu^2 M)$ für den Halbparameter (siehe Gl. (2.23)) folgt

$$E = \gamma\mu M \left(\frac{(1+\epsilon)^2}{2d} - \frac{1+\epsilon}{d} \right) = \gamma\mu M \frac{\epsilon^2 - 1}{2d}$$

und durch nochmalige Verwendung des Halbparameters d sowie von Gl. (2.26)

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2dE}{\gamma\mu M} = \frac{2l^2E}{\gamma^2\mu^3 M^2} = \frac{4E^2 b^2}{\gamma^2\mu^2 M^2}$$

Andererseits ist mit Gl. (2.25)

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} - 1 = \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \cot^2 \frac{\vartheta}{2}$$

sodass wir die Zusammenhänge

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma\mu M}{2Eb} \quad \text{und} \quad b = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}} \quad (2.27)$$

finden, letzteres aus Gl. (2.26). Energie E und Drehimpuls l legen also Stoßparameter b und Ablenkwinkel ϑ fest. Den Zusammenhang (2.27) leiten wir ab:

$$b(\vartheta) = \frac{\gamma\mu M}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2} \implies \frac{db(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\gamma\mu M}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Damit können wir nach Gl. (2.18) den differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\mathbf{b}}{\sin\vartheta} \frac{d\mathbf{b}}{d\vartheta} \right| = \left| \frac{\mathbf{b}}{2 \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2}} \left(-\frac{\gamma\mu M}{4E} \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right) \right| = \left| \frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2\frac{\vartheta}{2}} \frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right|$$

wobei wir $\mathbf{b}(\vartheta)$ aus Gl. (2.27) im letzten Schritt verwendet haben. Somit ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\gamma\mu M}{4E \sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right)^2 \quad (2.28)$$

Für geladene Teilchen erscheint das Produkt der Ladungen $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$ anstelle von $\gamma\mu M$ (die Coulombwechselwirkung ist wie die Gravitationswechselwirkung ein $1/r$ -Potential), und dann heißt diese Gleichung (2.28) die *Rutherford'sche Streuformel*.

Bewegungsarten im Gravitationspotential

Der Massenpunkt kann r -Werte erreichen, für die gilt

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma\mu M}{r} \leq E$$

d.h. bei denen das effektive Potential $U(r)$ unterhalb der Energie liegt (siehe Abb. 2.11). Das Zentrifugalpotential ist dabei ein repulsiver Beitrag zum Gravitationspotential, der für kleine Abstände r dominiert.

Für Satelliten ist $E < 0$ (d.h. die Bahn ist gebunden), aber es müssen Abstände $r \leq R$ mit Erdradius R verboten sein (um Kollision zu vermeiden). Also ist ein hinreichender Drehimpuls erforderlich, oder äquivalent eine Mindestgeschwindigkeit tangential zur Erdoberfläche; daraus ergibt sich

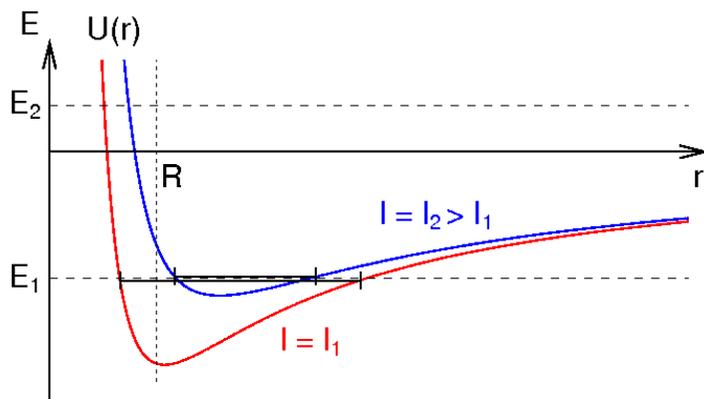


Abbildung 2.11: Zwei effektive Gravitationspotentiale $U(r)$, die sich nur durch den Drehimpuls $l_2 > l_1$ unterscheiden.

die 1. kosmische Geschwindigkeit $v_1 = 7.9$ km/s. Zum Verlassen der Erde braucht ein Flugkörper mindestens $E = 0$; mit der potentiellen Energie an der Erdoberfläche $V(R) = -\gamma\mu M/R$ (Erdbziehungskraft $mg = \gamma\mu M/R^2$, Flugkörpermasse $m \approx \mu$) folgt aus

$$E = 0 = \frac{m}{2} v_2^2 - mgR$$

die 2. kosmische Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2$ km/s.

2.6 Der Virialsatz

In einem N -Teilchen-System mit endlichen Bahnen findet eine ständige Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt statt. Der Virialsatz sagt aus, wie viel die kinetische und die potentielle Energie jeweils im zeitlichen Mittel zur Gesamtenergie beitragen. Diese sehr allgemeine Aussage hängt nur von der Potenz ab, mit der der Abstand der Teilchen r ins Potential eingeht.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Streuproblem zurück (also zu einem allgemeinen Zentralpotential) und nehmen an, dass das Potential $V(\vec{x})$ eine homogene Funktion n -ten Grades von $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist, also

$$V(\lambda\vec{x}) = \lambda^n V(\vec{x}), \quad (2.29)$$

für alle Skalenfaktoren $\lambda \in \mathbb{R}$. In Worten: eine Skalierung der Abstände mit einem Faktor λ führt zu einer Skalierung des Potentials mit λ^n . Dann gilt für alle λ

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda\vec{x}) = \frac{dV(\vec{y})}{d\vec{y}} \frac{d\vec{y}}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{dV(\lambda\vec{x})}{d\vec{x}} \cdot \vec{x}$$

Andererseits erhalten wir aus der rechten Seite von Gl. (2.29)

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda\vec{x}) = \frac{d}{d\lambda} \lambda^n V(\vec{x}) = n\lambda^{n-1} V(\vec{x}).$$

Speziell für $\lambda = 1$ erhalten wir daraus die Beziehung

$$\vec{x} \cdot \frac{d}{d\vec{x}} V(\vec{x}) = n V(\vec{x}), \quad (2.30)$$

aus welcher wir (Beweis folgt) den "Virialsatz"

$$2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle \quad (2.31)$$

herleiten können. Dabei notieren wir mit $\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$ den Mittelwert einer Funktion; $\langle T \rangle$ und $\langle V \rangle$ sind die Mittelwerte der kinetischen, bzw. der potentiellen Energie für gebundene Bahnen,

$$\langle T \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) \quad (2.32)$$

und

$$\langle V \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i V(\vec{x}_i(t)). \quad (2.33)$$

Kepler-Problem: Speziell für das $1/r$ -Potential des Kepler-Problems $V(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{-1}$ ist $n = -1$ und

$$2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle .$$

Zum Beweis von (2.31) betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i &= \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i + \sum_i \vec{x}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \\ &= 2T - \sum_i \vec{x}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V = 2T - nV, \end{aligned} \quad (2.34)$$

wobei wir (2.29) in der Verallgemeinerung auf ein System von N Massenpunkten

$$V(\lambda \vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_N) = \lambda^n V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

verwendet haben. Wir bilden nun das zeitliche Mittel von Gl. (2.34) und finden

$$\begin{aligned} 2 \langle T \rangle - n \langle V \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_i \vec{x}_i(t) \cdot \vec{p}_i(t) \Big|_{t=0}^{t=\tau} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für begrenzte Bahnen. Die Größe $\sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i$, deren zeitlicher Mittelwert für endliche Bahnen verschwindet, heißt Virial.