# Theoretische Mechanik

## WS 2007/08

Harald Jeschke, Universität des Saarlandes/Universität Frankfurt
auf Grundlage eines Skripts von Claudius Gros, Universität Frankfurt



# 0. Literatur

**F. Scheck**
*"Theoretische Physik 1: Mechanik"*,
Springer Verlag.

**W. Nolting**
*"Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik"* und *"Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik"*,
Springer Verlag.

**L. D. Landau und E. M. Lifschitz**
*"Mechanik"* und *"Elastizitätstheorie"*,
Akademie Verlag.

**H. Iro**
*"A Modern Approach to Classical Mechanics"*,
World Scientific Publishing.

**J. L. McCauley**
*"Classical Mechanics"*,
Cambridge University Press.

**H. Goldstein**
*"Klassische Mechanik"*,
Akademische Verlagsgesellschaft.

**W. M. Lai, D. Rubin und E. Krempl** *"(Introduction to) Continuum Mechanics"*,
Butterworth-Heinemann

# 1. Bewegungsgleichungen

## 1.0 Naturgesetze

Die Naturgesetze lassen sich als solche nicht herleiten, sie können nach Kuhn nur falsifiziert werden. Dennoch versucht man i.A. ein in sich konsistentes System von Naturgesetzen zu entwickeln, das auf möglichst wenigen fundamentalen Annahmen beruht, den grundlegenden Postulaten. Hierbei spielt die Berücksichtigung der Symmetrien von Raum und Zeit eine zentrale Rolle.

## 1.1 Raum und Zeit

Die Grundlage der physikalischen Beschreibung der Natur ist die Annahme, dass man eine Abbildung von Raum und Zeit auf mathematische Größen vornehmen kann. In der klassischen Physik beschreiben wir das Verhalten (der Bilder) von Objekten in einem „Raum“, ihren Ortswechsel in diesem Raum mit der „Zeit“. Raum und Zeit sind die grundlegenden Konzepte der Physik; Bewegung verbindet Raum und Zeit.

Nach der Erfahrung mit starren Maßstäben ist der physikalische Raum ein euklidischer $\mathbb{R}^3$. Darin benutzen wir kartesische Ortskoordinaten $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Die Zeit $t$ ist erklärt durch einen (per Definition) periodischen Vorgang (Uhr), z.B. durch einen scharfen atomaren Übergang (Spektrallinie).

Zwei zentrale, eng miteinander verknüpfte Konzepte sind die Invarianz bei einer Koordinatentransformation (eine Göße ändert sich nicht, wenn zu einem festen Zeitpunkt für ein dynamisches System das Koordinatensystem transformiert wird) und der Erhaltungssatz (eine dynamische Göße ist zeitlich konstant entlang der Trajektorie eines Systems).

Eine invariante (koordinatenunabhängige) Bedeutung geben wir

**(a)** dem Zeitabstand $|t_1 - t_2|$ von zwei Ereignissen

**(b)** dem räumlichen Abstand $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ von zwei gleichzeitigen Ereignissen.



Die damit verträglichen Koordinatentransformationen sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= R(t)\vec{x} + \vec{b}(t), & R(t) &\in O(3), \end{aligned} \tag{1.1}$$

d.h. wir haben noch die Wahl

– der Zeitrichtung $\lambda$

– des Zeitnullpunkts $a$

– eines beliebig bewegten, kartesischen räumlichen Bezugssystems.

Die Äquivalenz dieser Koordinatensysteme äussert sich darin, dass die Transformationen (1.1) eine Gruppe bilden.

## 1.2 Galileitransformation

Wir postulieren die Existenz von “Inertialsystemen”, in denen für freie Teilchen das Trägheitsgesetz gilt:

$$m\ddot{\vec{x}} = 0.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung eines absoluten Raums, d.h. eines homogenen und isotropen Raums und einer homogenen Zeit.

In Worten:
*1. Newtonsches Axiom*: Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Massenpunkt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt (Inertialsysteme).

Alle anderen Inertialsysteme ergeben sich hieraus durch diejenigen Transformationen (1.1), die das Trägheitsgesetz invariant lassen. Sie beschreiben den Übergang zu einem (relativ) gleichförmig bewegten Bezugssystem, d.h.

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}, & R &\in O(3), \end{aligned} \tag{1.2}$$

(Galileitransformationen). Wieder bilden diese Transformationen eine Gruppe.

Die Galileitransformation mit $\det R = +1$ und $\lambda = +1$ hängt von 10 Parametern ab, und zwar

$$g(\underbrace{R}_{\omega,\vec{n}}, \vec{v}, \vec{b}, a)$$

Diese stehen in engem Zusammenhang mit den 10 Erhaltungsgrößen, die es im abgeschlossenen $n$-Teilchensystem gibt: $\vec{L}, \vec{r}_S(0), \vec{P}, E$, d.i. der Drehimpuls, die Schwerpunktsbewegung $\vec{r}_S(0) = \vec{r}_S(t) - \vec{P}t/M$, der Gesamtimpuls und die Energie.

Wir zeigen, dass die Transformationen $g$ eine Gruppe bilden (die eigentliche isochrone Galileigruppe G), indem wir zwei Transformationen hintereinander ausführen:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= R^{(1)}\vec{x}_0 + \vec{v}^{(1)}t_0 + \vec{b}^{(1)}, \quad & t_1 &= t_0 + a^{(1)} \\ \vec{x}_2 &= R^{(2)}\vec{x}_1 + \vec{v}^{(2)}t_1 + \vec{b}^{(2)}, \quad & t_2 &= t_1 + a^{(2)} \end{aligned}$$

Wenn wir $\vec{x}_1$ in $\vec{x}_2$ einsetzen, können wir die direkte Transformation $\vec{x}_0 \longrightarrow \vec{x}_2$ ablesen:

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= R^{(2)}R^{(1)}\vec{x}_0 + R^{(2)}\vec{v}^{(1)}t_0 + R^{(2)}\vec{b}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}t_0 + \vec{v}^{(2)}a^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \\ &\stackrel{!}{=} R^{(3)}\vec{x}_0 + \vec{v}^{(3)}t_0 + \vec{b}^{(3)} \\ t_2 &= t_0 + a^{(1)} + a^{(2)} \stackrel{!}{=} t_0 + a^{(3)} \end{aligned}$$

Wir finden:

$$\begin{aligned} R^{(3)} &= R^{(2)}R^{(1)} \\ \vec{v}^{(3)} &= R^{(2)}\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)} \\ \vec{b}^{(3)} &= R^{(2)}\vec{b}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}a^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \\ a^{(3)} &= a^{(1)} + a^{(2)} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nun verifizieren wir die vier Gruppenaxiome:

1. Die Hintereinanderausführung zweier Galileitransformationen
$$g(R^{(2)}, \vec{v}^{(2)}, \vec{b}^{(2)}, a^{(2)})g(R^{(1)}, \vec{v}^{(1)}, \vec{b}^{(1)}, a^{(1)}) = g(R^{(3)}, \vec{v}^{(3)}, \vec{b}^{(3)}, a^{(3)})$$
ist wieder eine Galileitransformation (gezeigt in Eq. (1.3)).
2. Das Assoziativgesetz $(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3)$ folgt aus Assoziativität von Addition und Matrizenmultiplikation.
3. Für das Einselement $E = (\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0)$ gilt
$$Eg_i = g_i E = g_i \forall g_i \in G$$
4. Das Inverse zu $g(R, \vec{v}, \vec{b}, a)$
$$g^{-1} = g(R^T, -R^T\vec{v}, R^T\vec{v}a - R^T\vec{b}, -a)$$
liest man aus Eq. (1.3)) ab, wobei $R^{-1} = R^T$ wegen $\det R = +1$.



Die Gruppeneigenschaft der Galileitransformationen bedeutet die Äquivalenz der Inertialsysteme. Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen wir von nun an stets in einem Inertialsystem.

## 1.3 Schwerpunktsatz

Die Verallgemeinerung des Trägheitsgesetzes auf N Teilchen mit Koordinaten $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N$ im leeren Raum lautet:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = 0 \tag{1.4}$$

($\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ = Impuls des Teilchens $i$). Dabei sind die Massen $m_i$ unveränderliche positive Zahlen, die durch Gl. (1.4) bis auf die Wahl der Masseneinheit festgelegt sind. Nach Gl. (1.4) sind die Massen additiv, wenn sich mehrere Teilchen zu einem einzigen zusammenschließen, also $m_{1,2} = m_1 + m_2$.

Das können wir uns klarmachen, indem wir ein Koordinatensystem $\Sigma'$ betrachten, das sich gegenüber dem System $\Sigma$ mit der Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt; dann ist die Geschwindigkeit $\vec{v}_i'$ aller Teilchen in $\Sigma'$ durch $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$ mit der in $\Sigma$ verknüpft. Damit ergibt sich die Beziehung zwischen den Gesamtimpulsen $\vec{P}$ und $\vec{P}'$:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{V}\sum_i m_i = \vec{P}' + \vec{V}\sum_i m_i$$

Das zeigt, dass wir immer ein System finden können, in dem der Gesamtimpuls $\vec{P}$ verschwindet (durch geeignete Wahl der Geschwindigkeit $\vec{V}$), und wir nehmen an, dass $\vec{P}' = 0$. Auflösen nach der Geschwindigkeit $\vec{V}$ des Bezugssystems $\Sigma$ ergibt:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Zusammenhang zwischen Gesamtimpuls $\vec{P}$ und Geschwindigkeit $\vec{V}$ dieselbe Gestalt hat wie der für ein einzelnes Teilchen $\vec{p}_i = \vec{v}_i/m_i$, wenn wir die Masse $M = \sum_i m_i$ des Gesamtsystems mit der Masse $m_i$ des Massenpunktes identifizieren. Daher ist die Masse eine additive Größe.

Da wir hier mit zeitlich unveränderlichen Massen $m_i$ rechnen, können wir die die Göße $\sum_i m_i \vec{v}_i / \sum_i m_i$ als zeitliche Ableitung von

$$\vec{X} = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$$

darstellen, der Koordinate des Schwerpunkts.

## 1.4 Bewegungsgleichungen

N Teilchen bilden ein mechanisches System, falls ihre Bewegung durch die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_1(t_0),\dots,\vec{x}_N(t_0);\qquad \dot{\vec{x}}_1(t_0),\dots,\dot{\vec{x}}_N(t_0)$$

zu irgendeiner Zeit $t_0$ bestimmt ist. Gleichbedeutend sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1\dots\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1\dots\dot{\vec{x}}_N) \tag{1.5}$$

wobei $\vec{F}_i(\vec{x}_1\dots\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1\dots\dot{\vec{x}}_N)$ das *Kraftgesetz* ist.

In Worten:
*2. Newtonsches Axiom*: Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.

**Beispiele**

*Sonnensystem*:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i = \sum_{k\neq i} -\gamma m_i m_k \frac{\vec{x}_i-\vec{x}_k}{|\vec{x}_i-\vec{x}_k|^3}.$$

*System geladener Teilchen*:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}_i-\vec{x}_k}{|\vec{x}_i-\vec{x}_k|^3}.$$

*Teilchen in einem elektromagnetischen Feld*:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i = q\,\vec{E}(\vec{x},t) + q\left(\dot{\vec{x}}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right).$$

Hierbei sind $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t)$ äußeres elektrisches Feld und magnetische Induktion. Die von den Teilchen selber erzeugten Felder sind hier vernachlässigt.

*Erzwungene, gedämpfte Schwingung auf einer Geraden*:

$$m\ddot{x} = -f\,x - K\,\dot{x} + k(t).$$

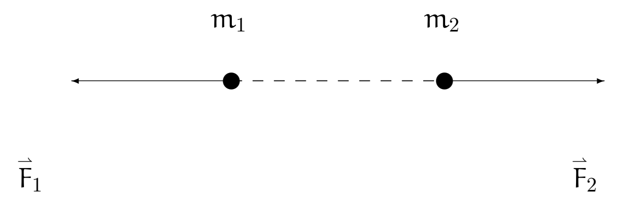
Hier ist $K$ eine summarische Beschreibung der Dämpfung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.



## 1.5 Kräfte

Die Mechanik liefert keine Theorie der Kräfte. Newton befasst sich mit Kräften, die nur von der Lage $(\vec{x}_1\dots\vec{x}_N)$ des Systems abhängen und stellt dafür ein weiteres Postulat auf:

*3. Newtonsches Axiom*: Die Kraftwirkungen zweier Massenpunkte aufeinander sind entgegengesetzt gleich: **Actio = Reactio**




Im (abgeschlossenen) 2-Teilchensystem ist nach Gl. (1.4) und Gl. (1.5) $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$. Wenn das Kraftgesetz in jedem Koordinatensystem gleich lauten soll (siehe Kap. 1.1 ), so ist es von der Form einer Zentralkraft

$$\vec{F}_1=\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}=-\vec{F}_2=f(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)\,\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\,, \tag{1.6}$$

d.h. die Kräfte liegen in der Verbindungsgeraden der beiden Teilchen und hängen nur vom Abstand ab. Mit $\vec{F}_{12}$ ist die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft bezeichnet, und da es hier nur zwei Teilchen gibt, ist das gleich der gesamten Kraft $\vec{F}_1$ auf Teilchen 1.

Solche Kräfte besitzen stets ein Potential $V(r)$, das durch die Lösung der Gleichung $V'(r)=f(r)$ mit $r=|\vec{x}_1-\vec{x}_2|$ gegeben ist, d.h.

$$V(r)-V(r_0)=-\int_{r_0}^{r} dr'V(r')$$

im hier diskutierten eindimensionalen Fall (im dreidimensionalen Fall $V=V(\vec{r})$ ist die Rekonstruktion des Potentials komplizierter, s.u.). Das Potential liegt bis auf die Integrationskonstante $V(r_0)$ fest, falls $V(r)$ integrabel ist.

Für die Kraft folgt

$$\vec{F}_1 = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = -V'(r) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \vec{x}_1}}_{\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}},$$

also

$$\vec{F}_1 = -V'(r) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{1.7}$$

## Kräfteparallelogramm

Eine weiteres Postulat der Newtonschen Mechanik betrifft die Art, wie sich Kräfte addieren, und indem wir Käfte als Vektoren notiert haben, haben wir diese Annahme implizit schon verwendet:

*4. Axiom (Superpositionsprinzip)*: Es gibt 2-Körper-Kräfte (Postulat) und diese sind additiv:

$$\vec{F}_i = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|),$$

wobei $\vec{F}_{ik}$ die vom Teilchen $k$ auf das Teilchen $i$ wirkende Kraft ist (siehe Abb. 1.1). Aus Gl. (1.7) folgt dann wieder die Existenz eines Potentials

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = -\sum_{k \neq i} V'_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}. \tag{1.8}$$

mit

$$V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \sum_{\text{Paare(i,k)}} V_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|), \tag{1.9}$$

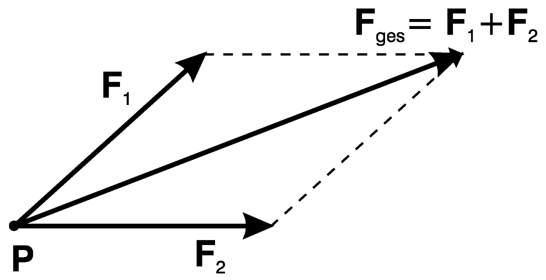



**Abbildung 1.1:** Das Kräfteparallelogramm.



wobei die Paarpotentiale $V_{ik}(r)$ durch aus den Paar-weise wirkenden Kräften durch Integration von $V'_{ik}(r) = -f_{ik}(r)$ berechnet werden kann. Dabei ist

$$\vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) = f_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}.$$

Beispiele sind das Sonnensystem und ein System geladener Teilchen. Wir bemerken, dass das Prinzip "Actio = Reactio" paarweise gilt und somit auch der Schwerpunktsatz Gl. (1.4) erfüllt ist. Zudem gilt "Actio = Reactio" auch für die resultierende Kraft zwischen 2 beliebigen Teilsystemen.

Mit der Annahme additiver 2-Körper-Kräfte kann man diese statisch (Feder-Kraftmesser) ausmessen. So erst bekommt die Newton'sche Bewegungsgleichung Gl. (1.5) einen Sinn: Die statisch ermittelten Kräfte bestimmen die Bewegung.

## 1.6 Galilei-Invarianz

Wir postulieren, dass die Bewegungsgleichungen eines Systems der Art von Gl. (1.5) und Gl. (1.8) in jedem Inertialsystem gleich lauten. Dieses ist eine a priori nicht zu rechtfertigende Forderung an die Struktur der Naturgesetze. Ob diese Forderung gerechtfertigt ist, lässt sich nur anhand der Konsequenzen experimentell überprüfen. Heute wissen wir, dass die Galilei-Invarianz nur für nicht-relativistische mechanische Systeme gilt.

Ein Beispiel hierfür sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \tag{1.10}$$

*Galilei-Invarianz* bedeutet, dass sie nach einer Galilei-Transformation im neuen Koordinatensystem die selbe Form haben müssen, d.h.

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt^2} = \vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N).$$

Dies ist für $\vec{x}'_i = R\vec{x}_i + \vec{b}$ der Fall, falls

$$\vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N) = R\vec{F}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \tag{1.11}$$

Für die additiven Zweikörperkräfte (1.8) ist dies der Fall.

Anders ausgedrückt: Mit $\vec{x}_i(t)$ ist auch die Galileitransformierte $\vec{x}'_i(t')$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen. Dies gilt auch für die Operation der

Zeitumkehr:

$$t' = -t, \qquad \vec{x}'(t') = \vec{x}(t).$$

Also ist mit $\vec{x}(t)$ auch $\vec{x}(-t)$ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung (1.10), da diese zweiter Ordnung in der Zeit ist und somit keine Zeitrichtung auszeichnet. Dies ist nicht bei dissipativen Systemen, wie z.B. der gedämpften Schwingung, der Fall.

## 1.7 Erhaltungssätze

Aus Gl. (1.5) folgen

**(a)** Impulssatz

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i, \qquad \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}. \tag{1.12}$$

Dabei lässt sich der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ als

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{x}_i = M\frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{x}_i = M\dot{\vec{X}}$$

schreiben, wobei $M = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse und

$$\vec{X} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{x}_i$$

die Schwerpunkt-Koordinate ist.
Die Impulserhaltung ist eine Folge der Homogenität des Raumes.

**(b)** Drehimpulssatz

Der Drehimpuls eines Massenpunktes ist $\vec{L}_i = \vec{x}_i \times \vec{p}_i$. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ befolgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \underbrace{\dot{\vec{x}}_i \times \vec{p}_i}_{m_i\dot{\vec{x}}_i\times\dot{\vec{x}}_i=0} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}, \tag{1.13}$$

wobei das totale Drehmoment $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$ ist mit $\vec{M}_i = \vec{x}_i \times \vec{F}_i$. Der Gesamtdrehimpuls lässt sich in den Drehimpuls des Schwerpunktes



$\vec{L}_{SP} = \vec{X} \times \vec{P}$ und in den Relativ-Drehimpuls $\vec{L}_{rel} = \sum_i(\vec{x}_i - \vec{X}) \times \vec{p}_i$ zerlegen:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \left(\vec{x}_i - \vec{X} + \vec{X}\right) \times \vec{p}_i \\ &= \underbrace{\sum_i \vec{X} \times \vec{p}_i}_{\vec{X}\times\vec{P}} + \sum_i \left(\vec{x}_i - \vec{X}\right) \times \vec{p}_i = \vec{L}_{SP} + \vec{L}_{rel}.\end{aligned}$$

Die Drehimpulserhaltung ist eine Folge der Isotropie des Raumes.

**(c)** Energiesatz

Die Bewegungsgleichung für die totale kinetische Energie $T = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{x}}_i^2$ ist

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{x}}_i^2 = \sum_i m_i\dot{\vec{x}}_i\ddot{\vec{x}}_i = \sum_i \dot{\vec{x}}_i\vec{F}_i. \tag{1.14}$$

Somit ist $\sum_i \dot{\vec{x}}_i\vec{F}_i$ die *Leistung*, die das System von Massenpunkten in Form von kinetischer Energie aufnimmt. Auch die kinetische Energie lässt sich zerlegen:

$$\begin{aligned}T &= \sum_i \frac{1}{2}m_i(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}} + \dot{\vec{X}})^2 \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \underbrace{\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})\dot{\vec{X}}}_{(\sum_i m_i\dot{\vec{x}}_i - M\dot{\vec{X}})\dot{\vec{X}} = M(\dot{\vec{X}}-\dot{\vec{X}})\dot{\vec{X}}=0} + \sum_i \frac{1}{2}m_i(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2.\end{aligned}$$

Also setzt sich auch die kinetische Energie aus einem Relativ-Anteil, $T_{rel}$, und der kinetischen Energie des Schwerpunktes, $T_{SP}$, zusammen:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 = T_{SP} + T_{rel}.$$

Für additive Zweikörperkräfte lässt sich die Leistung mit Gl. (1.7) auch als

$$\sum_i \vec{F}_i\dot{\vec{x}}_i = -\sum_i \frac{\partial}{\partial\vec{x}_i}V(\vec{x}_1\ldots\vec{x}_N)\dot{\vec{x}}_i = -\frac{dV}{dt}$$

schreiben. Gleichung (1.14) kann dann in die Form eines Energiesatzes umgeschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0. \tag{1.15}$$

Man sagt auch, das System sei konservativ. Für Systeme, in denen Reibungskräfte wirken, ist die totale Energie $T + V$ nicht erhalten, solche Systeme nennt man dissipativ.
Die Energieerhaltung ist eine Folge der Homogenität der Zeit.

**Potential der Kraft**

Bei der eindimensionalen Bewegung unter dem Einfluss einer ortsabhängigen Kraft war es immer möglich,

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = m\ddot{x}\dot{x} = -\frac{d}{dt}V(x) \quad \text{mit} \quad V(x)-V(x_0) = -\int^x dx' F(x')$$

zu schreiben, d.h. einfache 2-Körperkräfte sind konservativ. Bei beliebigen dreidimensionalen Bewegungen und Kräften ist das nicht notwendigerweise erfüllt, und man definiert: Kräfte, für die gilt

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} \tag{1.16}$$

heißen konservativ, und $V(\vec{x})$ ist dann das Potential der Kraft (die potentielle Energie).

Aus Gl. (1.16) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \frac{d}{dt}V(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} = \nabla V(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

und wir schließen, dass für eine konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}), \quad \text{d.h.} \quad F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad F_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} \tag{1.17}$$

gelten muss: Die Kraft lässt sich als Gradient eines skalaren Potentials schreiben.

Wir nehmen an, dass das Potential $V$ stetige partielle zweite Ableitungen besitzt; dann sind (nach dem Schwarzschen Lemma) die zweiten partiellen Ableitungen von $V$ vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

und mit Gl. (1.17) folgt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.18}$$



Nun ist aber

$$\text{rot}F \equiv \nabla \times \vec{F} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \partial_\beta F_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,, \tag{1.19}$$

hier knapp geschrieben mit dem Levi-Civita-Tensor (Epsilontensor)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha, \beta, \gamma \text{ gerade Permutation von 1,2,3} \\ -1 & \text{falls } \alpha, \beta, \gamma \text{ ungerade Permutation von 1,2,3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.20}$$

d.h. von den 27 Elementen von $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sind nur 6 ungleich null: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ und $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$.
Ausgeschrieben ist rot$\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

und somit bedeutet Gl. (1.18), dass rot$\vec{F} = 0$ sein muss. Mithilfe des Stokesschen Integralsatzes kann man zeigen, dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Es gibt auch ein integrales Kriterium, um zu entscheiden, ob eine Kraft konservativ ist. Dazu schreiben wir für das totale Differential von V

$$dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \nabla V(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

Wenn wir jetzt diese Größe entlang einer geschlossenen Kurve integrieren, erhalten wir

$$\oint_C \nabla V(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_C dV = V_{\text{Ende}} - V_{\text{Anfang}} = 0$$

Wenn wir links Gl. (1.16) einsetzen, finden wir

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} \quad \text{konservativ}$$

In Worten: Eine konservative Kraft leistet auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit.

Kurvenintegrale darf man aus Teilstücken zusammensetzen (siehe Abb. 1.2). Wir wählen also den geschlossenen Weg von $P_1$ über $C_1$ nach $P_2$ und dann

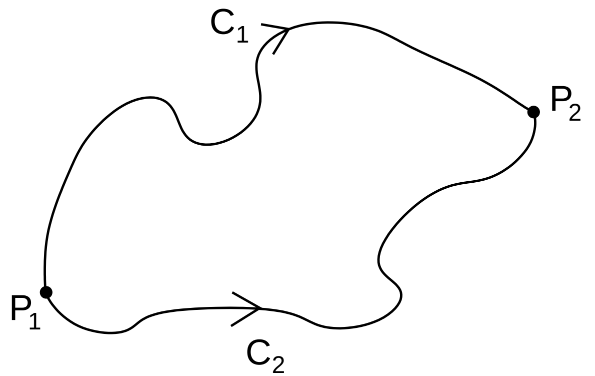



**Abbildung 1.2:** Verschiebung eines Massenpunktes.

über $-C_2$ zurück nach $P_1$ (die Durchlaufrichtung bestimmt das Vorzeichen des Kurvenintegrals!):

$$0 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} \Longrightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

In Worten: Ein Kraftfeld ist genau dann konservativ, wenn die Arbeit beim Verschieben des Massenpunktes zwischen zwei Raumpunkten wegunabhängig ist.

**Abgeschlossene konservative Systeme**

Konservative Systeme mit $\vec{F} = 0$ und $\vec{M} = 0$ nennt man *abgeschlossen.* Beispiele sind Systeme von Massenpunkten mit additiven Zweikörperkräften. Abgeschlossene konservative Systeme haben die folgenden 10 Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung):

| | |
|---|---|
| $\vec{P}$ | 3 Impulse |
| $\vec{X} - \vec{P}t/M$ | 3 Schwerpunktsbewegungen |
| $\vec{L}$ (oder $\vec{L}_{rel}$) | 3 Drehimpulse |
| $T + V$ (oder $T_{rel} + V$) | Energie |

**Satz von Noether**

Etwas allgemeiner gilt (siehe später, Satz von Noether): Das mechanische System

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \tag{1.22}$$



hat genau dann die oben genannten 10 Erhaltungsgrößen, falls $V$ unter jeder beliebigen euklidischen Transformation invariant ist:

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots R\vec{x}_N + \vec{b}) = V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \tag{1.23}$$

für alle $R \in SO(3)$ = Gruppe der Drehungen mit $\det R = 1$ und für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Man kann zeigen, dass dies mit $\vec{F} = 0$ und $\vec{M} = 0$ gleichbedeutend ist. Weiterhin kann man zeigen, dass die Energieerhaltung aus der Invarianz des Systems unter Zeittranslationen $t \to t' = t + a$ folgt.

## 1.8 Beschleunigte Bezugssysteme

Falls ein Bezugssystem $\tilde{\Sigma}$ (mit Ortsvektor $\vec{y}$) kein Inertialsystem ist, dann muss man die gültige Bewegungsgleichung in diesem System durch Transformation der Bewegungsgleichung in einem Inertialsystem $\Sigma$ (mit Ortsvektor $\vec{x}$) berechnen. Beispiel:

**Massenpunkt in einem rotierenden Bezugssystem**

Die Bewegungsgleichung im Inertialsystem $\Sigma$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

muss durch Einsetzen der Transformationsgleichung

$$\vec{x} = R(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$$

transformiert werden; diese besagt, dass $\vec{y}$ zu jedem Zeitpunkt $t$ anders rotiert und verschoben werden muss, um zum Vektor $\vec{x}$ zu gelangen. Mit den Zeitableitungen

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y} + R\dot{\vec{y}} + \dot{\vec{b}} \qquad \ddot{\vec{x}} = \ddot{R}\vec{y} + 2\dot{R}\dot{\vec{y}} + R\ddot{\vec{y}} + \ddot{\vec{b}}$$

wird die Bewegungsgleichung zu

$$m\left(R\ddot{\vec{y}} + 2\dot{R}\dot{\vec{y}} + \ddot{R}\vec{y} + \ddot{\vec{b}}\right) = \vec{F}.$$

Nach $\ddot{\vec{y}}$ können wir auflösen, indem wir von links mit $R^{-1}$ von links multiplizieren ($R^T = R^{-1}$ für eigentliche Rotationen, d.h. Rotationen mit $\det(R) = 1$)

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}' - 2m\Omega\dot{\vec{y}} - mR^T\ddot{R}\vec{y} - m\vec{a},$$

mit:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= R^T\vec{F} && \text{Kraft, von } \tilde{\Sigma} \text{ aus gesehen.} \\ \vec{a} &= R^T\ddot{\vec{b}} && \text{Beschleunigung des Punktes } \vec{y} \equiv 0, \text{ von } \tilde{\Sigma} \text{ aus gesehen.} \\ \Omega &= R^T\dot{R} && \text{Eine antisymmetrische } 3\times 3 \text{ Matrix.} \end{aligned}$$

### Erzeugende für Drehungen

Die Erzeugende $\Omega$ ist antisymmetrisch, denn durch Ableiten von $R^TR = 1$ folgt

$$R^T\dot{R} + \dot{R}^TR = \Omega + \Omega^T = 0.$$

Antisymmetrische $(3\times3)$-Matrizen bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum mit den Erzeugern (der Basis)

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und jede antisymmetrische Matrix $\Omega$ kann dargestellt in der Form

$$\Omega = \omega_1 A_x + \omega_2 A_y + \omega_3 A_z = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen des Zusammenhanges $\exp(\Omega) = R$ wird $\Omega$ die Erzeugende der Drehung genannt. Die Wirkung von $\Omega$ auf $\vec{y}$ ist also

$$R^T\dot{R}\,\vec{y} = \Omega\,\vec{y} = \begin{pmatrix} \omega_2 y_3 - \omega_3 y_2 \\ \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3 \\ \omega_1 y_2 - \omega_2 y_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{y}$$

mit

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\,,$$

der *vektorielle Winkelgeschwindigkeit* im Nichtinertialsystem $\tilde{\Sigma}$. Wir brauchen noch

$$R^T\ddot{R} = \frac{d}{dt}\left(R^T\dot{R}\right) - \dot{R}^T\dot{R} = \dot{\Omega} - \underbrace{\dot{R}^TR}_{\Omega^T}\underbrace{R^T\dot{R}}_{\Omega} = \dot{\Omega} + \Omega^2.$$

Damit ist

$$R^T\ddot{R}\,\vec{y} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}).$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung im $y$-System:

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}' - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}}) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) - m\vec{a}. \quad (1.24)$$



Die rechts neben $\vec{F}'$ auftretenden Kräfte heißen Scheinkräfte, insbesondere

$$\boxed{\begin{aligned} -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}}) &= \text{Corioliskraft} \\ -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) &= \text{Zentrifugalkraft.} \end{aligned}}$$

*Zweiter Zugang zu beliebig beschleunigten Bezugssystemen*: Wir betrachten wieder die Systeme $\Sigma$ mit Ortsvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sowie $\tilde{\Sigma}$ mit Ortsvektor $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ und Basisvektoren $\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \tilde{\vec{e}}_3$. $\Sigma$ wird als Inertialsystem vorausgesetzt, $\tilde{\Sigma}$ ist beliebig beschleunigt. Dann ist die Relativbewegung der Systeme zusammengesetzt aus Relativebewegung des Koordinatenursprungs von $\tilde{\Sigma}$ im Vergleich zu $\Sigma$ und der Rotation der Achsen von $\tilde{\Sigma}$ um diesen Ursprung, von $\Sigma$ aus gesehen.

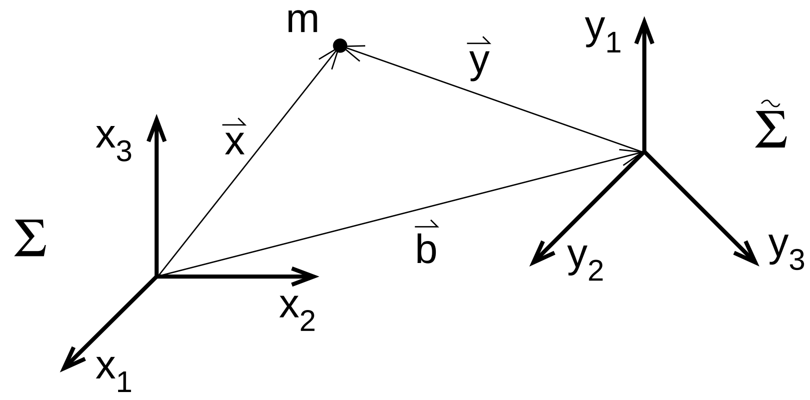



**Abbildung 1.3:** Beschreibung von Massenpunkt $m$ in Inertialsystem $\Sigma$ und Nichtinertialsystem $\tilde{\Sigma}$.

Ortsvektor von Massenpunkt $m$ ist (siehe Fig. 1.3):

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{y} = \vec{b} + \sum_{i=1}^{3} y_i \tilde{\vec{e}}_i \quad (1.25)$$

Jetzt ermitteln wir die Geschwindigkeit in beiden Systemen:

$$\tilde{\Sigma}: \qquad \dot{\vec{y}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \tilde{\vec{e}}_i\,,$$

d.h. aus Sicht des mitrotierenden Beobachters in $\tilde{\Sigma}$ sind die Achsen fest; von

$\Sigma$ aus betrachtet sieht es anders aus:

$$\Sigma: \qquad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{b}} + \sum_{i=1}^{3} \left( \dot{y}_i \tilde{\vec{e}}_i + y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i \right) , \tag{1.26}$$

Darin ist $\dot{\vec{b}}$ die Relativgeschwindigkeit der Koordinatenursprünge, $\sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \tilde{\vec{e}}_i$ die Geschwindigkeit von m in $\tilde{\Sigma}$, $\sum_{i=1}^{3} y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i$ die Geschwindigkeit eines starr mit $\tilde{\Sigma}$ mitrotierenden Punktes, aus Sicht von $\Sigma$.

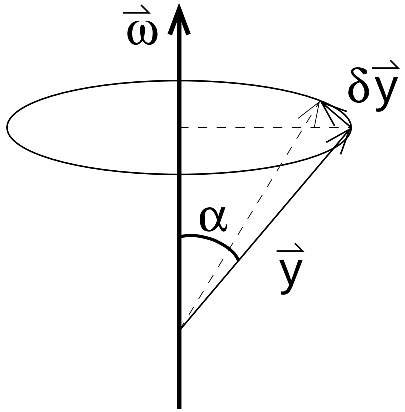



**Abbildung 1.4:** Änderung $\delta\vec{y}$ von $\vec{y}$ nur aufgrund der Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

$\tilde{\Sigma}$ rotiert mit der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seinen Ursprung. Die Änderung $\delta\vec{y}$ von $\vec{y}$ durch die Rotation steht senkrecht zu $\vec{y}$ und zu $\vec{\omega}$. Damit kann man den dritten Term umschreiben (siehe Abb. 1.4):

$$\delta|\vec{y}| = \omega|\vec{y}|\sin(\alpha)dt = |\vec{\omega} \times \vec{y}|dt$$

und damit

$$\frac{\delta|\vec{y}|}{dt} = \sum_{i=1}^{3} y_i \dot{\tilde{\vec{e}}}_i = \vec{\omega} \times \vec{y}$$

Einsetzen in Gl. (1.26) ergibt

$$\Sigma: \qquad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{b}} + \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y} \, . \tag{1.27}$$

Mit Gl. (1.25) kann man schreiben

$$\Sigma: \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{x} - \vec{b}\right) = \frac{d}{dt}\vec{y} = \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y} \, , \tag{1.28}$$

wobei wir mit $\frac{d}{dt}\vec{y}$ die Zeitableitung aus Sicht von $\Sigma$ notieren, $\dot{\vec{y}}$ bedeutet die Zeitableitung innerhalb von $\tilde{\Sigma}$, und $\vec{\omega} \times \vec{y}$ ist die Auswirkung der Rotation.



Damit erhalten wir eine Ableitungsregel, wie man in einem Inertialsystem einen Vektor ableitet, der in einem rotierenden System dargestellt ist:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt} + \vec{\omega} \times$$

in Worten, die Ableitung aus Sicht von $\Sigma$ setzt sich zusammen aus der Ableitung der Komponenten in $\tilde{\Sigma}$ und der Anwendung des Operators $\vec{\omega}\times$.

Mit dieser Regel können wir Gl. (1.27) ein zweites Mal nach der Zeit ableiten:

$$\begin{aligned} \Sigma: \qquad \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{b}}\right) &= \left( \frac{\tilde{d}}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \left( \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y} \right) \\ &= \ddot{\vec{y}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \vec{y} \right) \\ &= \ddot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \vec{y} \right) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Im Nichtinertialsystem bekommen wir also die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{b}} - m\vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \vec{y} \right) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} \tag{1.30}$$

Rechts sind die Terme 3 und 4 wieder Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Die Scheinkräfte in dieser Gleichung (alles außer $\vec{F}$ bewirken, dass eine kräftefreie Bewegung ($\vec{F} = 0$) eines Teilchen im System $\Sigma$ von $\tilde{\Sigma}$ aus gesehen so kompliziert verläuft, dass sie vom Inertialsystem $\Sigma$ aus geradlinig bleibt.

## 1.9 Beschreibung von Bahnkurven

Die Bahnkurven, die von Punktmassen im Raum beschrieben werden, erfassen wir mathematisch als Raumkurven. Wir wollen zunächst allgemeine Eigenschaften der Raumkurven festhalten.

*Natürliche Parametrisierung*

Eine Raumkurve heißt glatt, wenn es mindestens eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\vec{x} = \vec{x}(t)$ gibt, für die nirgendwo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$$

gilt. Bei solchen Raumkurven ist es oft günstig, die Bogenlänge $s$ anstelle der Zeit $t$ als Kurvenparameter zu verwenden. Die Bogenlänge ist die Länge der Raumkurve, gemessen von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt aus.

Wir betrachten den Polygonzug, den wir erhalten, indem wir das Zeitintervall $[t_0, t]$ gemäß

$$t_n = t_0 + n\Delta t$$

$$t_N = t_0 + N\Delta t \equiv t \qquad \text{mit} \quad \Delta t = \frac{t - t_0}{N}$$

unterteilen (siehe Abb. 1.5). Die Länge des Polygonzuges ist

$$L_N(t, t_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \left|\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)\right| = \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)}{\Delta t}\right| \Delta t$$

Zur Bogenlänge gelangen wir, wenn wir die Länge der Zeitintervalle $\Delta t$ gegen Null gehen lassen:

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} L_N(t, t_0) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{\vec{x}(t_{n+1}) - \vec{x}(t_n)}{\Delta t}\right| \Delta t \\ &= \int_{t_0}^{t} dt' \left|\frac{d\vec{x}(t')}{dt'}\right| = \int_{t_0}^{t} dt' \left|\vec{v}(t')\right| \end{aligned}$$

Daraus lesen wir auch ab

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left|\vec{v}(t)\right|$$

Da wir $\left|\vec{v}(t)\right| > 0$ vorausgesetzt haben, wächst $s(t)$ streng monoton, und die Umkehrfunktion $t(x)$ ist eindeutig bestimmt. Einsetzen in den Ortsvektor der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \vec{x}\big(t(s)\big) = \vec{x}(s)$$

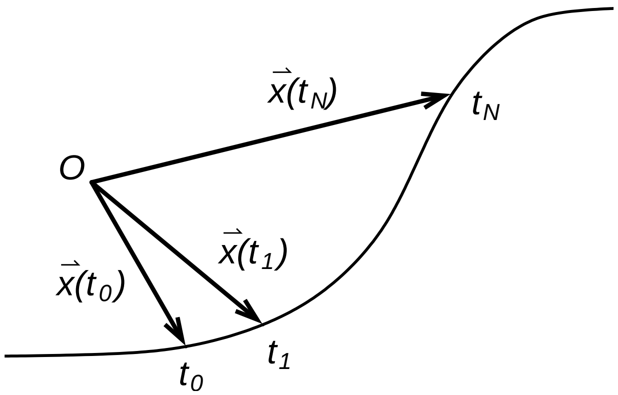



**Abbildung 1.5:** Zerlegung der Raumkurve in $N$ Teilstücke durch Zeitintervalle $[t_0, t_1], ..., [t_{N-1}, t_N]$.



ergibt die sogenannte natürliche Parametrisierung der Raumkurve nach der Bogenlänge.

*Begleitendes Dreibein*

Zur Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse im Raum ist es oft günstig, eine Orthonormalbasis zu verwenden, die sich als Funktion der Bogenlänge ändert und mit dem Teilchen mitwandert. Dieses begleitende Dreibein ist aus

$\vec{t}$ Tangenteneinheitsvektor
$\vec{n}$ Normaleneinheitsvektor
$\vec{b}$ Binormaleneinheitsvektor

aufgebaut, die ein orthonormiertes Rechtssystem bilden, d.h. es gilt $\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ und $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$.

Wir konstruieren diese Einheitsvektoren, indem wir ausnutzen, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$ in Richtung der Tangente zeigt; wir müssen ihn nur normieren:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Wenn wir die Bahnkurve nach der Bogenlänge parametrisiert haben, folgt nach der Kettenregel

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

Da sich die Richtung von $\vec{t}(s)$ mit wachsender Bogenlänge $s$ ändert, läßt sich die Krümmung der Kurve durch

$$\kappa = \left|\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|$$

quantifizieren, und das Inverse von $\kappa$ ist der Krümmungsradius $\rho = \kappa^{-1}$. Für eine Gerade ändert sich der Tangenteneinheitsvektor nicht, und es gilt $\kappa = 0$ und $\rho = \infty$.

Die Ableitung eines Einheitsvektors steht senkrecht auf diesem; diese Tatsache machen wir uns zunutze, um den Normaleneinheitsvektor zu konstruieren:

$$\vec{n}(s) = \frac{\frac{d\vec{t}(s)}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{t}(s)}{ds}$$

Die von $\vec{n}$ und $\vec{t}$ aufgespannte Ebene heißt Schmiegungsebene. Der Binormaleneinheitsvektor ergibt sich jetzt durch die Forderung eines orthonormalen Rechtssystems:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$$

$\vec{b}(s)$ steht senkrecht auf der Schmiegungsebene und ist bei einer ebenen Bewegung konstant. Ändert sich $\vec{b}(s)$ jedoch mit $s$, so ist diese Änderung ein Maß dafür, wie stark sich die Kurve aus der Schmiegungsebene herauswindet. Wir berechnen die Änderung von $\vec{b}(s)$ als

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \kappa\vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ &= \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds}\end{aligned}$$

Also ist die Änderung von $\vec{b}$ senkrecht zu $\vec{t}$ sowie senkrecht zu $\vec{b}$, weil $\vec{b}$ ein Einheitsvektor ist. Wir setzen also

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n}$$

mit der Torsion $\tau$ und dem Torionsradius $\sigma = \tau^{-1}$. Wir können jetzt durch Ableiten von $\vec{n}(s) = \vec{b}(s) \times \vec{t}(s)$ noch die Änderung des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}(s)$ mit der Bogenlänge berechnen:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = -\tau\vec{n} \times \vec{t} + \kappa\vec{b} \times \vec{n} = \tau\vec{b} - \kappa\vec{t}$$

Die drei Gleichungen für die Änderung des begleitenden Dreibein mit der Bogenlänge heißen Frenetsche Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa\vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau\vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau\vec{b} - \kappa\vec{t}\end{aligned}$$